Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Davor Menon
matematika-informatika

Metodička analiza nastavne teme

Pravac i krivulje drugog reda

OSIJEK
20. travnja 2005.

Sadržaj

1 Motivacija

Učenici trećeg razreda prirodoslovnih gimnazija se u nastavi matematike susreću s krivuljama drugog reda. Svi oni su i prije znali prepoznati elipsu, hiperbolu i parabolu. Te tri krivulje se često nazivaju konikama ili čunjosječnicama. Taj naziv dolazi od činjenice da se te krivulje mogu dobiti kao presjek stošca (čunja, konusa) ravninom. Tu činjenicu je otkrio Grk Menehmo oko 340. prije Krista.

Pošto su ove krivulje već jako dugo u ljudskoj mašti, nije ni čudo da postoje razna imena za njih. Imena su im nadjenuta zbog nekog njihovog svojstva. Kasnije u nastavi će učenici imati priliku doznati odakle dolaze nazivi elipsa, parabola i hiperbola. U matematici se mnogim svojstvima daju pridjevi poput: elipsoidno, paraboloidno... Znati zbog čega se nešto zove imenom kojim se zove, vodi nas k dubljem razumijevanju objekta proučavanja. Zbog toga je porijeklo imena vrlo važan motivirajući faktor. Sjetimo se da mala djeca stalno ispituju roditelje i ostale odrasle osobe u svojoj okolini: "Što je to?", "Kako se to zove?".

Ovdje ćemo se zadržati na području koje nosi naziv **pravac i krivulje drugog reda**. Ovaj naziv nije nimalo mističan i tajnovit. Što bi tu moglo biti zanimljivo? Zapitajmo se odakle naziv "krivulje drugog reda". Učenici bi već trebali biti upoznati s činjenicom da pod nazivom krivulje drugog reda ne smatramo samo elipsu, parabolu i hiperbolu. Postoje i druge krivulje koje nose naziv krivulje drugog reda, ali one nam nisu tako pogodne za obradu u srednjoj školi. Elipsa, hiperbola i parabola su mnogo zanimljivije.

Učenicima bi činjenicu da su krivulje drugog reda dobile naziv zbog svojstva da ih pravac može sječi najviše u dvije točke, mogli vješto prezentirati i motivirati ih da krenu istraživati u koliko točaka i sjeku li se uopće pravac i krivulja drugog reda.

2 Obrazovni ciljevi

Da bi mogli motivirati učenike na pravilni i najbolji način, moramo znati što nam je cilj. Ciljeve dijelimo po vrsti i imamo odgojne, obrazovne i funkcijalne ciljeve. Često se pravi pogreška i pretpostavlja da su obrazovni ciljevi važniji od funkcionalnih i odgojnih. Činjenica jest da se veća pažnja poklanja obrazovnim ciljevima i da postoji sustav koji nadgleda i kontrolira ispunjavanje obrazovnih ciljeva. I mi ćemo u ovom radu prvo posvetiti pažnju odgojnim ciljevima. Stoga je važno napomenuti da su odgojni i funkcionalni ciljevi jednako važni. To se često zaboravlja, ali u novije vrijeme puno se govori o odgojnim ulogama škole. I profesori matematike moraju dati svoj doprinos odgoju mladih.

U obrazovne ciljeve najčešće svrstavamo pojmove koje treba obraditi u trenutnoj nastavnoj cjelini. No, u obrazovne ciljeve ubrajamo i metode koje učenici trebaju svladati, a često su tu i sve matematičke zakonitosti. Pojmove treba razumijeti, znati objasniti ili prepoznati. Metode se pak moraju znati samostalno sprovesti tako da nas dovedu do željenog rješenja. Matematičke zakonitosti takodjer treba znati izreći i primjeniti. Ponekad ih treba znati i dokazati, ali to je prepušteno naprednijim učenicima u matematički jačim školama.

Obrazovne ciljeve je potrebno unaprijed definirati. Učenicima mora biti jasno što moraju znati iz ove nastavne teme. U ovoj nastavnoj temi se ne uvode novi pojmovi. Učenicima su svi upotrebljeni pojmovi poznati, ali pojmovi se proširuju. Tako učenici znaju što je sjecište, ali sada govorimo o specifičnom sjecištu. O sjecištu pravca i krivulje drugog reda. Učenici su upoznati s tangentom na krivulju, ali sada govorimo o specifičnom slučaju tangente na krivulju drugog reda. U ovom poglavlju se usitinu ne uvodi niti jedan novi pojam.

Ova nastavna tema donosi nove metode. Prva je metoda određivanja koordinata sjecišta pravca i krivulje drugog reda. Druga metoda služi za određivanje broja i vrste sjecišta pravca i krivulje drugog reda. Obje metode su jednako važne i obrazovni cilj ove nastavne teme je njihovo usvajanje i sposobnost primjene na konkretnim slučajevima. Kod prve metode svaki učenik mora znati odrediti koordinate sjecišta pravca i krivulje drugog reda, te ih grafički prikazati na slici. Grafička interpretacija je vrlo važna jer tako učenik povezuje jednadžbe s grafovima funkcija.

Stoga za ovu nastavnu temu definiramo sljedeće obrazovne ciljeve:

- Znati koliko je sjecišta moguće između pravca i krivulje drugog reda. Također treba znati zašto je to tako.
- Znati odrediti sjecište pravca i krivulje drugog reda, gdje su pravac i krivulja drugog reda dane svojim jednadžbama
- Na osnovi jednadžbi pravca i krivulje drugog reda odrediti, bez da se određuju koordinate sjecišta, broj sjecišta.
- Znati prepoznati tangentu na krivulju drugog reda.

Na osnovi stupnja usvojenosti obrazovnih ciljeva dolazimo do odluke o ocjeni koju je zaslužio pojedini učenik. Ocjenjivanje nije tema ovog poglavlja, ali je to toliko važno pitanje da se mora naglasiti da pravilno ocjenjivanje služi kao poticaj učenicima. Učenici cijene pravedno ocjenjivanje.

3 Prije i poslje

Prije nego krenemo u motiviranje naših učenika za nove pothvate i istraživanje njima nepoznatih stvari, preporučljivo je znati što oni već znaju o problemu i koliko su dobro svladali metode kojima će se služiti da dođu do novih spoznaja.

3.1 Predznanje učenika

Znamo da su se učenici trećeg razreda prirodoslovne gimnazije tijekom svojeg školovanja često susretali s pravcima. Učenici su još u prvom razredu obrađivali gradivo pod nazivom “Sjecište dvaju pravaca i sustavi linearnih jednadžbi”. Tu su trebali shvatiti grafičku interpretaciju rješenja sustava linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice. Sada tu priču moraju proširiti i umjesto jednadžbi dva pravca, imaju jednadžbu pravca i jednadžbu krivulje drugog reda. No, to im ne bi trebalo biti novo. Prije nešto vise od desetak sati su obrađivali nastavnu jedinicu “Međusobni položaj pravca i kružnice” u trajanju od jedan školski sat. Sada neće vidjeti ništa značajno različito od tog slučaja. Pošto su već obradili u detalje elipsu, hiperbolu i parabolu (njihove jednadžbe), učenici ne bi trebali imati problema sa shvaćanjem i usvajanjem novoga gradiva. Sljedeća tablica donosi detaljniji pregled:

Razred	Nastavna tema	Broj sati
1	Sjecište dvaju pravaca i sustavi linearnih jednadžbi.	3
2	Kvadratna jednadžba. (nastavna cjelina)	21
3	Jednadžba pravca.	4
	Međusobni položaj pravca i kružnice	1
	Elipsa. Jednadžba elipse.	3
	Hiperbola. Jednadžba hiperbole.	4
	Parabola. Jednadžba parabole.	3

Vrlo je važno i koliko sati je predviđeno za ovu nastavnu temu. Treba odrediti koliko duboko se može ići. To ovisi o predznanju učenika, o njihovoj zainteresiranosti i njihovoj sposobnosti da usvoje određene pojmove. Ovdje nema novih pojmova koje učenici trebaju usvojiti. Svi pojmovi s kojima učenici trebaju baratati su dobro poznati od prije. To su pojmovi poput: točka, pravac, elipsa, hiperbola, parabola, jednadžba krivulje, jednadžba pravca, sjecište, točka dodira, tangenta na krivulju u točki T...

Za ovu temu je predviđeno četiri školska sata. Način na koji će se gradivo rasporediti u ta četiri sata ovisi isključivo o stanju u razredu. Ako učenici nisu kvalitetno usvojili prijašnje gradivo koje se treba sada pokazati u primjeni, treba odvojiti vremena i ponoviti nužne metode. Svaki razred je poseban i treba mu posvetiti punu pažnju kada se radi priprema za obradu nastavne teme. U praksi ćemo često imati fragmentirane razrede u pogledu poznavanja matematičkih znanja i vještina. Treba odvagnuti količinu vremena koje će se upotrijebiti za ponavljanje i prisjećanje.

Iako je teško povjerovati, postoji mogućnost da neki pojedinci i u trećem razredu prirodoslovne gimnazije nisu u potpunosti svladali rješavanje sustava dvije jednadžbe s dvije nepoznanice. Pogotovo ako se taj sustav svodi na slučaj kvadratne jednadžbe. Ovaj problem se može lako riješiti davanjem većeg broja raznovrsnih varijacija zadatka gdje treba odrediti sjecište krivulje drugog reda i pravca. Učenici će se brzo prisjetiti vještina koje su im zbog neupotrebljavanja otupjele i usporene, a rješavanje takvih zadataka neće imati za posljedicu samo ponavljanje, već i bolje shvaćanje novog gradiva.

3.2 Što dolazi nakon ove nastavne cjeline?

Na prvi pogled nam se može učiniti da gradivo koje dolazi nakon naše nastavne teme nema utjecaja na našu pripremu. Takvo razmišljanje je velika pogreška. Od velike je važnosti spoznaja što će učenicima trebati u budućoj nastavi, a pogotovo što će im trebati u budućem obavljanju zanimanja za koje se pripremaju. Pošto se ovdje govori o prirodoslovnoj gimnaziji, najvažnije nam je što će učenicima trebati u budućem obrazovnom procesu.

Upoznavanje s gradivom koje neposredno sljedi omogućuje nam da s učenicima obrađujemo trenutnu temu upravo na način koji će nam olakšati rad na sljedećim nastavnim temama. To može biti ponavljanje priješnjeg gradiva u sklopu uvježbavanja trenutnog gradiva. Tako s rješavanjem zadataka obavljamo dva zadatka: uvježbavanje i pripremno ponavljanje za sljedeću nastavnu temu.

Poslije ove nastavne teme dolazi nastavne teme “Pravac je tangenta krivulje” (7 sati) i “Pol i polara krivulje” (3 sata). Uočavamo da smo dobar dio pojmova i primjera za tangentu na krivulju drugog reda već odradili, te će učenici samo nadograditi svoje znanje. Izvod uvjeta dodira je usko povezan s jednadžbom tangente na krivulju drugog reda u točki T.

4 Izvedba sata

4.1 Uvod

Na početku sata treba sprovesti sve ono o čemu smo govorili u prvoj i drugoj točki. Prvi i glavni cilj uvoda je da zainteresira učenike za problem. Ako je potrebno, prije motivacije se može provjeriti je li predznanje učenika doista na onoj razini na kojoj smo mi pretpostavili. Ako je predznanje učenika znatno slabije, treba poduzeti brze korake kako bi ih podsjetili na stvari koje bi im bile od koristi pri sadašnjem radu. To je od velike važnosti jer učenici koji ne razumiju o čemu mi govorimo neće biti motivirani za praćenje nastave.

Zadatak 1 *Nađi zajedničke točke pravaca danih s* $x-5y-7=0$ *i* $x-y-3=0$*!*

Zadatak 2 *Nađi zajedničke točke pravca danog s* $x-5y-7=0$ *i elipse dane s* $25x^2+4y^2=100$*!*

Treba zadati još zadataka slična **Zadatku 2** koji bi pokrili i druge moguće položaje pravca u odnosu na elipsu. Također se trebaju zadacima pokriti i ostale krivulje: hiperbola i parabola.

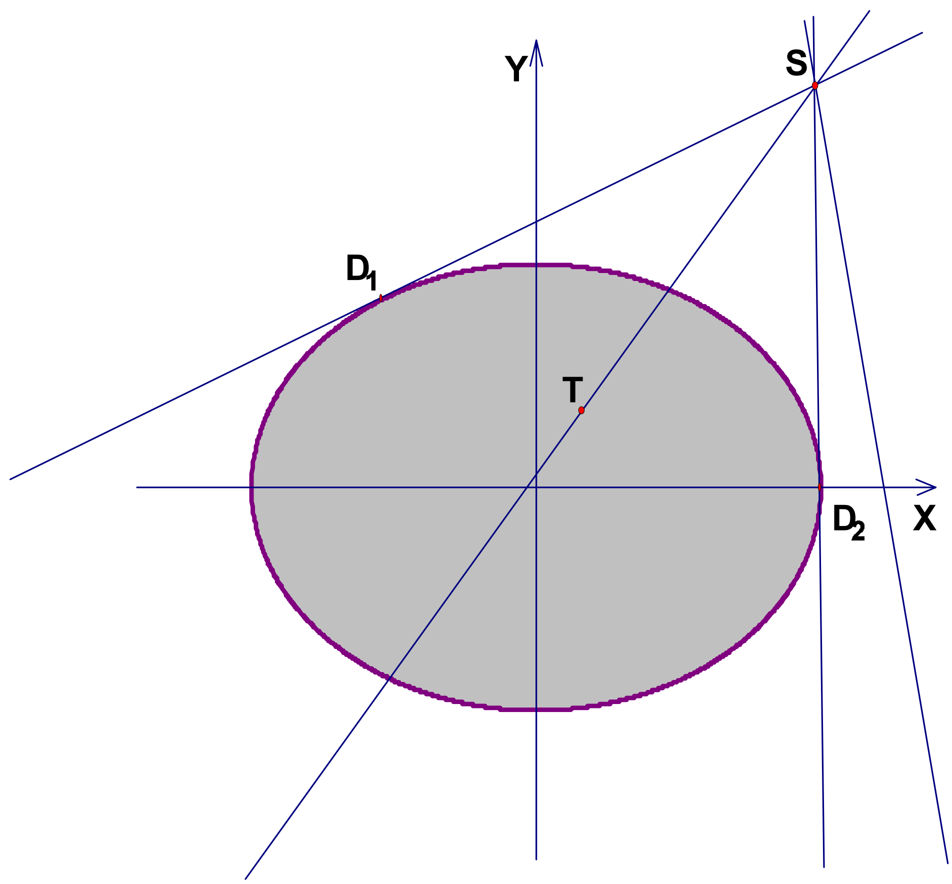
To bi trebalo biti dovoljno da učenici shvate metodu izračunavanja koordinata sjecišta. Ukoliko uvidimo da učenici imaju poteškoća s takvim zadacima, treba se zadržati i poraditi na potpunom razumijevanju. U zadacima trebaju biti zastupljeni svi slučajevi (jedno sjecište, dva sjecišta, niti jedno sjecište) kako bi učenici dobili potrebno iskustvo za daljnju raspravu. Što su primjeri raznovrsniji, to će biti lakše tražiti od djece da kritički razmišljaju.

4.2 Diskusija o mogućim odnosima pravca i krivulje drugog reda

Nakon niza primjera učenici počinju uočavati pojedine pravilnosti. Sada su učenici spremni za raspravu u kojoj će moći izraziti svoja razmišljanja i svoje "teorije" koje su stvorili na osnovu riješenih zadataka i primjera. Vrlo je važno da se učenici potiču na razmišljanje i slobodno izražavanje mišljenja. Učenicima treba dati do znanja da kriva teorija nije nužno loša stvar, ali treba razvijati i kritičnost. Tu pogotovo mislimo na samokritičnost. Samokritičnost omogućava učenicima da nakon postavljanja teorije samo uoče njene nedostatke i dorade ju na način da se uklopi u slučajeve viđene u primjerima.

I u ovoj nastavnoj cjelini treba prvo prepustiti riječ učenicima. Također se eliminiranje pogrešnih teorija prepušta učenicima. Učenici će uvijek biti kritičniji prema tuđim zaključcima, nego što bi to bili prema vlastitim. Stoga trebamo razvijati kulturu argumentiranog raspravljanja. Raspravu treba laganim primjedbama usmjeravati u željenom smjeru.

Treba također poticati učenike da svoje zamisli probaju vizualizirati. Na slici 1. prvo uočimo da elipsa dijeli ravninu u tri skupa: točke koje pripadaju elipsi, točke koje su unutar elipse i točke koje su izvan elipse. Jasno je koje su to točke elipse. Točke koje su unutar elipse zadovoljavaju jednadžbu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$. Točke za koje vrijedi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>1$ se nalaze izvan elipse.



Slika 1: Provođenje rasprave

Izaberimo točku T. Svaki pravac koji prolazi točkom T siječe elipsu u dvije točke.

Izaberimo sada točku D_1. Pravac koj prolazi točkom D_1 siječe elipsu u barem jednoj točki. Postoji jedan i samo jedan pravac koji elipsu siječe samo u jednoj točki (D_1). Takav pravac ima poseban naziv - tangenta na elipsu u točki D_1. Svaki drugi pravac korz D_1 siječe elipsu u dvije točke.

Izaberimo sada točku S. Pravci koji prolaze kroz S mogu prolaziti i kroz točku T (sijeku elipsu u dvije točke), mogu prolaziti kroz D_1 i D_2 i tada sjeći krivulju u jednoj točki (tangente - svaki siječe elipsu u samo jednoj točki) i mogu uopće ne sječi krivulju.

Slična analiza se provodi i za hiperbolu i za parabolu. Tu se može pojaviti mali problem što to nisu zatvorene krivulje. Ali na slici se lako učenicima pokaže koje točke se nalaze unutar, a koje izvan krivulje.

4.3 Broj mogućih sjecišta

Nakon što su učenici svladali tehniku pronalaženja sjecišta pravca i krivulje, a rasprava o mogućim položajima pravca i krivulje drugog reda je održana, pravi je trenutak da postavimo pitanje kako bi se mogli uvjeriti koliko mnogo sjecišta je moguće između pravca i krivulje drugog reda. Učenici će sigurno imati svojih prijedloga i ako imamo vremena na raspolaganju trebali bi ih podržati u njihovim idejama i ohrabriti ih da se sami okušaju. To će stvoriti pustolovno ozračje.

Raspravu treba voditi u pravcu željenog rješenja, a željeno rješenje je da se riješi sljedeći sustav:

$$
\begin{aligned}
y &= kx + l \quad \text{pravac} && (1)\\
a^2b^2 &= b^2x^2 + a^2y^2 \quad \text{elipsa} && (2)
\end{aligned}
$$

Iz jednadžbe (1) znamo koliki je y i to uvrstimo u jednadžbu (2). Dobivamo:

$$
\begin{aligned}
b^2x^2 + a^2(kx+l)^2 &= a^2b^2\\
b^2x^2 + a^2k^2x^2 + 2kla^2x + a^2l^2 - a^2b^2 &= 0\\
(b^2 + a^2k^2)x^2 + (2kla^2)x + (a^2l^2 - a^2b^2) &= 0 && (3)
\end{aligned}
$$

Učenici bi trebali individualno rješavati gornji sustav uz povremenu pomoć profesora u slučaju da ostanu bez inspiracije. Svakako bi im se trebalo dati uputstvo kako započeti i čemu bi trebali težiti.

Svaki učenik bi trebao s lakoćom uočiti da je dobivena jednadžba kvadratna. Kvadratnoj jednadžbi bi svi učenici trebali znati odrediti rješenja. Nije predviđeno da se ponavlja kvadratna jednadžba, jer se ona često susreće i često ju spominjemo u nastavi. U skladu s tim ne očekujemo da će biti poteškoća u daljnjem radu. Svi učenici bi trebali shvatiti da je sada očito da ovaj sustav može imati najviše dva rješenja.

4.4 Kada i koliko ima sjecišta?

Sada smo se uvjerili da može biti najviše dva sjecišta elipse i pravca. Ali mi znamo mnogo stvari o kvadratnoj jednadžbi koju smo detaljno obradili. Učenicima bi trebalo objasniti da bi bilo lijepo kada bi znali još neke stvari o rješenjima, a ne samo činjenicu da ih maksimalno može biti dva. Bilo bi dobro znati ima li dva, jedno ili ni jedno rješenje, odnosno sjecište. Vratimo se sada našoj kvadratnoj jednadžbi.

Ako je (3) kvadratna jednadžba, znamo kako se dobivaju njena rješenja:

$$x_{1,2} = \frac{-2kla^2 \pm \sqrt{(2kla^2)^2 - 4(b^2 + a^2k^2)(a^2l^2 - a^2b^2)}}{2(b^2 + a^2k^2)} \tag{4}$$

U drugom razredu prirodoslovne gimnazije se kvadratna jednadžba detaljno obradila i tamo se govorilo da broj i vrsta rješenja kvadratne jednadžbe ovosi o determinanti D. U našim rješenjima (4) imamo sljedeću determinantu:

$$D = (2kla^2)^2 - 4(b^2 + a^2k^2)(a^2l^2 - a^2b^2) \tag{5}$$

Ako je $D = 0$? Tada imamo dva realna rješenja koja su međusobno jednaka, tj. $x_1 = x_2$. Geometrijska interpretacija takvog slučaja jest da imamo samo jednu zajedničku točku pravca i elipse.

Ako je $D < 0$? Tada kvadratna jednadžba ima dva konjugirano kompleksna rješenja. Geometrijska interpretacija ovog slučaja bi bila da elipsa i pravac nemaju zajedničkih točaka.

Ako je $D > 0$? Tada kvadratna jednadžba ima dva realna i različita rješenja, tj. $x_1 \neq x_2$. Geometrijska interpretacija ovog posljednjeg slučaja je da elipsa i pravac imaju dvije zajedničke točke. Jedna je (x_1, y_1), a druga (x_2, y_2).

Postaje jasno da sada ne moramo tražiti rješenje sustava jednadžbe pravaca i jednadžbe elipse, ako nas zanima odnos krivulje i pravca. Dovoljno je vidjeti kakva je determinanta D da bi mogli zaključiti imali li i koliko zajedničkih točaka elipse i pravca.

Također dobivamo **uvjet dodira**: $a^2k^2 + b^2 = l$.

Isti postupak možemo provesti i za parabolu i za hiperbolu. Preporučljivo je da učenici sami provedu taj raųn radi vježbe. Može se zadati kao domaća zadaća ili možda kao manji samostalni rad. Takav samostalni rad bi se na idućem satu prezentirao pred razredom u jednom petominutnom izlaganju. Takav način bi povećao motiviranost učenika i pomogao da se matematika učini pristupačnijom.

4.5 Primjena izvedenih zaključaka

Iako bi svi učenici prirodoslovne gimnazije morali shvatiti princip razmišljanja u dosadašnjem radu, uvijek ima učenika kojima to neće biti potpuno jasno. Neke učenike matematika jednostavno ne zanima dovoljno da bi se motivirali i aktivno uključili u rasprave pri rješavanju problema. Takvi učenici će se zadovoljiti primjenom zakonitosti koje im mi prezentiramo i neće se previše pitati zašto je to tako. S druge strane, ima učenika koji žele razumijeti građu koja se radi na satu matematike, ali treba im više vremena da bi doista shvatili što smo radili. Zbog obje ove skupine učenika, sada bi bilo zgodno da riješimo nekoliko shematskih zadataka u kojima bi se primjenila znanja koja smo upravo stekli.

Zadatak 3 *Koristeći (5) odredite presijeca li pravac zadan s* $x - 5y - 7 = 0$ *elipsu zadanu s* $25x^2 + 4y^2 = 100$ *u jednoj, dvije ili možda u nijednoj točki!*

Ovakvi zadaci će učenicima približiti teoriju koju nažalost mnogi ne shvate odmah. Tome je razlog njihova nezainteresiranost i nemotiviranost. Moramo prihvatiti da to nije u potpunosti u našoj moći. Stvarnost je takva da mnogi učenici nemaju poticaj od strane okoline (obitelj, prijatelji) da budu bolji poznavatelji matematičkog gradiva. Unatoč tome, svi učenici bi trebali znati riješavati zadatke ovog tipa. Mora se inzistirati na sposobnosti primjene navedenih zaključaka.

Učenicima koji su shvatili princip rada ovi će zadaci biti dosadni i zamorni. Njima bi se moglo naći nekoliko zahtjevnijih zadataka koji bi proširili njihovo shvaćanje i povećalo njihov interes za nastavu. Takvi učenici vole izazov i zadatke koji naizgled nemogu biti rješeni. Što su se više patili oko rješavanja pojedinog zadatka, to će biti ponosniji što su ga na kraju ipak riješili. Mi, kao profesori, trebali bi svaki uspjeh koji je zahtijevao veliki napor učenika pohvaliti. Slabiji učenici će takvu pohvalu zaslužiti i rješavanjem lakših zadataka, dok će oni bolji u matematici dobiti zadatke koji zahtjevaju od njih koncentriranost i napor.

5 Ocjenjivanje

Motivacija na početku nastavne teme je dovoljna da učenici budu motivirani za proučavanje problema koji se javljaju tijekom obrade nastavne teme. No, to neće motivirati učenike da se potrude usavršiti svoju vještinu provođenja naučenih metoda. Također mnoge pojmove i zakonitosti koje su učenici svladali trebaju se memorirati i moći reproducirati. Glavna motivacija sada postaje ocjena. U idealnom školstvu učenicima bi želja za znanjem bila dovoljna motivacija.

Pokazalo se da su učenici najviše motivirani za učenje kada točno znaju što se mora znati za određenu ocjenu. Kada učenici ne znaju koliko moraju učiti za određeni uspjeh, nemaju volje za učenjem. Jedan dio učenika uvijek misli da se mogu "provući" i s manjim znanjem, a drugi pak smatra da je potrebno previše toga znati za određeni uspjeh te ih to obeshrabljuje. Stoga učenik koji zna što se mora znati za željenu ocjenu ima dobru motivaciju za učenje. On točno zna što mora znati želi li ocjenu odličan ili dovoljan. Također se učenici mogu usredotočiti samo na bitno gradivo i ne moraju tratiti vrijeme na odlučivanje što jest, a što nije bitno.

U ovoj nastavnoj temi definiramo gradivo koje se mora usvojiti (reproducirati i primjeniti) za određenu ocjenu na sljedeći način:

Dovoljan: Znati odrediti koordinate sjecišta pravca i krivulje drugog reda, ako su zadane njihove jednadžbe.
Znati na osnovi njihovih jednadžbi odrediti dodiruju li se pravac i krivulja.

Dobar: Ako su zadane jednadžbe pravca i krivulje drugog reda. Treba znati odrediti koliko sjecišta imaju (ako postoje) pravac i krivulja drugog reda bez računanja koordinata sjecišta.

Vrlo dobar: Znati objasniti zašto krivulja drugog reda može s pravcem imati maksimalno dvije zajedničke točke.
Znati na koji način smo došli do uvjeta dodira krivulje drugog reda i pravca.

Odličan: Znati izvesti uvijet dodira pravca i krivulje drugog reda.

6 Odgojni i funkcionalni ciljevi

Već smo spomenuli kako mnogi smatraju da ostvarivanje odgojnih ciljeva ima manju važnost od ostvarenja obrazovnih ciljeva. Također smo već naglasili da je to potpuno pogrešan zaključak. Škola, odnosno profesori, imaju veliku odgovornost na području odgoja učenika. Svojim primjerenim i odgovornim ponašanjem profesor uvelike utječe na razvoj djeteta. Dovoljno je sjetiti se da učenici polovicu radnog dana provode u školi. Svi znamo da karakter učenika određuje koliko ćemo moći tražiti od učenika. Učenici koji su problematični i imaju loše društvene vještine neće biti motivirani za učenje. Takvi učenici stoga neće biti u mogućnosti postići dobru usvojenost obrazovnih ciljeva.

Čak je i rad s učenicima koji poštuju tuđi način razmišljanja i otvoreni su za nove ideje lakši i uspješniji. Stoga je vrlo važno da odgojnim ciljevima posvetimo više pažnje.

U nastavi matematike se najbolje usvajaju novi pojmovi i metode kada se od učenika traži da sami dođu do rješenja danog problema. Tu presudnu ulogu igra pravilno održana diskusija. Da bi diskusija bila učinkovita, učenici trebaju posjedovati umijeće diskutiranja. Moraju poštovati tuđe mišljenje i pri tome razvijati argumentirano branjenje svoje teze, tj. argumentirano trebaju pobijati tuđe tvrdnje. Ovakve vještine se trebaju postepeno razvijati i učenici se trebaju odgajati da razmišljaju na takav način. Takav odgoj će učenicima biti vrlo koristan i u životu. Život će ih često stavljati u situacije gdje će morati argumentirano obrazložiti svoj zahtjev. Nije potrebno spominjati koliko u današnjem svijetu nedostaje tolerancije među rasama, vjerama, narodnostima... Kao profesor matematike morali bi kod učenika razvijati mišljenje da iznimka ne potvrđuje pravilo.

Funkcionalni ciljevi imaju malo direktniju vezu s ispunjavanjem obrazovnih ciljeva. Funkcionalni ciljevi su vrlo različiti, a mi ćemo se posvetiti samo povezanima s ovom temom. Vrlo je važno da učenici razviju sposobnost preciznog skiciranja postavljenih problema. Uvijek se kod geometrijskog zadatka preporučuje skiciranje problema. Pri tome se mora paziti da se elementi postave u općenitu situaciju kako ne bi izveli pogrešne zaključke. To zahtijeva poznavanje problema i sličnih situacija. Drugim riječima, potrebno je iskustvo. A iskustvo se može stjecati samo riješavanjem novih zadataka. Tijekom svojeg školovanja, učenici stječu sposobnost predvidjeti slučajeve koji bi se mogli pojaviti kao rješenje i tako stvaraju sve bolje i bolje skice. Pri izradi skica geometrijskih zadataka uz iskustvo su važne i osobine poput urednosti i preciznosti. Iako je urednost i preciznost uvelike uvjetovana karakterom djeteta, moguće ju je razvijati vježbom i pozitivnom kritikom.

U ovoj nastavnoj temi vrlo je važna brzina pri rješavanju sustava dvije jednadžbe s dvije nepoznanice. Ta brzina je rezultat vještine koja se također postiže vježbom. Do sada su učenici već trebali poprilično razviti vještinu rješavanja takvih problema, ali nikad nije loše dati nekoliko zadataka za vježbu kod kuće. Važno je napomenuti da su i funkcionalni ciljevi vrlo važni u daljnjoj nastavi.

Literatura

[1] B. Dakić, N. Elezović: *ANALITIČKA GEOMETRIJA*, Element, Zagreb, 1999.

[2] M. Pavleković: *METODIKA NASTAVE MATEMATIKE S INFORMATIKOM I*, Element, Zagreb, 1999.

[3] M. Pavleković: *METODIKA NASTAVE MATEMATIKE S INFORMATIKOM II*, Element, Zagreb, 1999.