Priprema za predavanje

R a z r e d b e n i   I s p i t i
G I M N A Z I J A

9. sat

Davor Menon
davor.menon@gmail.hr

3. svibnja 2006.

Nastavna cjelina: Priprema za razredbene ispite

Nastavna jedinica: Nizovi i redovi

Tip sata: Ponavljanje

Oblici rada: Frontalni i individualni

Ciljevi:

obrazovni:

- Ponoviti pojmove i svojstva niza, aritmetičkog niza i geometrijskog niza.
- Ponoviti i uvježbati metode rješavanja određenih problema s aritmetičkim nizovima, geometrijskim nizovima i geometrijskim redovima.

Funkcionalni:

- Podizanje razine razumijevanja i povezivanja prije naučenog.
- Povećati brzinu rješavanja.

Odgojni:

- « *Sve se plaća, sve se vraća!* »

Nastavna sredstva i pomagala: Ploča, kreda i projektor.

Uvodni dio

Učenicima je ovo već deveti sat i stoga neće biti potrebno objašnjavati način rada. Nakon kratkog ponavljanja osnovnih svojstava aritmetičkog i geometrijskog niza odmah prelazimo na rješavanje zadataka.

V A Ž N O !
Nije potrebno detaljno obraditi svako dolje navedeno svojstvo!

Ukoliko učenici nisu upoznati s nekim od dolje navedenih pojmova i svojstava, tada će ovo dobro doći predavaču kako ne bi morao «izmišljati» definicije i izvode.

Za ovaj dio treba utrošiti maksimalno 15min!

Pojam niza

Definicija 1 (***N i z***)

Niz u skupu S je svaka funkcija $a:\mathrm{N}\rightarrow S$ koja prirodnom broju pridružuje element a_n skupa S. Element nazivamo a_n općim ili n-tim članom niza, a sam niz označavamo simbolom (a_n).

◎ Niz je određen ako mu je zadan opći član!

» $a_n=\dfrac{n+1}{n+2}$; članovi niza redom su: $\dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{5},\ \ldots$

» $a_n=2^{-n}$; članovi niza redom su: $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8},\ \ldots$

◎ Zadavanje niza rekurzivnom formulom!

» $a_n=n\cdot a_{n-1},\ a_1=1,\ n\geq 2$; članovi niza redom su: 1, 2, 6,…

» $a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2},\ a_1=1,\ a_2=2,\ n\geq 3$; članovi niza redom su: 1, 2, $\dfrac{3}{2}$,…

Aritmetički niz

Imamo dan sljedeći niz brojeva:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, …

Možemo li odrediti na koji način je zadan gornji niz?

◎ Rekurzivnim formulama…

» $a_1=2,\ a_n=a_{n-1}+3$

Za nizove kod kojih je razlika između dva susjedna člana stalna imamo poseban naziv: aritmetički nizovi.

Definicija 2 (***A r i t m e t i č k i   n i z*** **)**

Niz je aritmetički ako je razlika svakog člana i člana ispred njega stalna i iznosi d

$$a_n - a_{n-1} = d, \quad n \geq 2.$$

d nazivamo razlikom ili diferencijom aritmetičkog niza.

Opći član aritmetičkog niza!

$$\begin{aligned} \text{»}\quad & a_1 \\ & a_2 = a_1 + d \\ & a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d \\ & a_4 = a_1 + 3d \\ & \quad \vdots \\ & a_n = a_1 + (n-1)d \end{aligned}$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza!

Imamo parcijalne sume:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

Možemo pisati… (Objasniti zašto!)

$$+\begin{cases} S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d) \\ S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_n - (n-1)d) \end{cases}$$

$$2S_n = \underbrace{a_1 + a_n + a_1 + a_n + a_1 + a_n + \cdots + a_1 + a_n}_{n\times}$$

$$S_n = \frac{1}{2} n(a_1 + a_n)$$

Primjer 1

Ako je $a_6 = 16$ i $a_8 = 22$, odredi a_{10}!

Primjer 2

Odredi dvadeseti član aritmetičkog niza, ako nam je poznato da je suma prvog i petog člana jednaka 24, a umnožak drugog i trećeg jednaka 60!

Geometrijski niz

(Način rada je isti kao kod Aritmetičkog niza, pa se mnoge stvari mogu izostaviti!)

Imamo sljedeći niz brojeva:

2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, …

Kojim rekurzivnim formulama je određen ovaj niz?

» $a_1 = 2$ i $a_n = a_{n-1} \cdot 3$

Definicija 3 (*G e o m e t r i j s k i n i z*)
Za niz $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}$ kažemo da je geometrijski niz ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_{n+1} = a_n \cdot q$ gdje je $a_1 \neq 0$ i $q \neq 0$.

Opći član geometrijskog niza

$$
\begin{aligned}
&a_1 \\
&a_2 = a_1 \cdot q \\
&a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\
&a_3 = a_1 \cdot q^3 \\
&\quad\vdots \\
&a_n = a_1 \cdot q^{n-1}
\end{aligned}
$$

Porijeklo imena

$$a_{n-1}, \quad a_n, \quad a_{n+1}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Svaki član geometrijskog niza, osim prvog, geometrijska je sredina svoja dva susjedna člana.

Interpolacija

Neka su dana dva realna broja $a_1 \neq 0$ i $a_n \neq 0$. Odredimo q tako da dobijemo geometrijski niz kojemu je prvi član a_1, a n-ti član a_n, gdje je $n > 1$.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$q^{n-1} = \frac{a_n}{a_1}$$

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

Primjer 3

Interpoliraj 4 člana geometrijskog niza između -1 i 10!

Primjer 4

Interpoliraj 3 člana geometrijskog niza između -1 i 10!

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza!

$$-\begin{cases} S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} \\ q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \cdots + a_1 \cdot q^n \end{cases}$$

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1 q^n$$
$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

Primjer 5

Odredi geometrijski niz ako je zbroj prvog i četvrtog člana jednak 52, a zbroj drugog i trećeg -12.

Geometrijski red

Definicija 4 (*R e d*)

Neka je (x_n) niz, izraz

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + \cdots$$

nazivamo redom i označavamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \ .$$

Njegova n-ta parcijalna suma je

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \ .$$

Red je konvergentan ako je konvergentan niz njegovih parcijalnih suma. Tada je suma reda jednaka limesu niza parcijalnih suma

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n .$$

Geometrijski red

Ako je (a_n) geometrijski niz, tada je suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$
$$= a_1 + a_1 \cdot q + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} + \cdots$$

Tvrdnja 1
Geometrijski red je konvergentan onda i samo onda ako vrijedi $|q| < 1$, a njegova je suma

$$S = \frac{a_1}{1-q} .$$

Zadaci

V A Ž N O !
Nisu svi zadaci predviđeni za rješavanje na satu.
Za neke zadatke će se samo dati ideja kako riješiti.

1. Suma tri uzastopna člana geometrijskog niza je 26, a produkt 216. Nađite ih ako je niz rastući!
   R: 2, 6, 18
2. U ljekarni je prvog dana prodano 55 kutijica aspirina, a zatim svakog sljedećeg dana jedna kutijica manje. Koliko će se kutijica ukupno prodati?
   R: 1540
3. Nađite zbroj svih brojeva između 50 i 350 kojima je zadnja znamenka jednaka 1!
   R: 5880
4. Izračunajte zbroj $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \cdots + 2^2 - 1^2$!
   R: 5050
5. Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza jednak je $4n^2$. Izračunaj član a_{10} !
   R: 76
6. Tri broja čiji je zbroj 124 imaju svojstvo da su tri uzastopna člana geometrijskog niza i istovremeno prvi, jedanaesti i trinaesti član aritmetičkog niza. Nađite njihov produkt!
   R: 8000
7. Neka je $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Ako je $S_A = 1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \cdots$ i $S_B = 1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \cdots$ nađite $S_A + S_B$!
   R: $\dfrac{4}{\sin^2 2x}$
8. Izračunajte $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{99}$!
   R: -1
9. Između brojeva 1 i 256 interpolirana su tri broja tako da su to uzastopni članovi geometrijskog niza. Nađite njihov zbroj!
   R: 341

10. U geometrijskom nizu zbroj prvih 6 članova jednak je trostrukom zbroju prva 3 člana. Koliki je q?
    R: $\sqrt[3]{2}$
11. Ako je za svaki $n \in \mathrm{N}$ zbroj prvih n članova aritmetičkog niza jednak $2n + 3n^2$, nađite k-ti član!
    R: $6k - 1$
12. U beskonačno konvergentnom redu svaki je član jednak četverostrukom zbroju članova koji slijede iza njega. Nađite kvocijent (q) reda!
    R: $\frac{1}{5}$
13. Nađite kvocijent geometrijskog reda (q) od 20 članova u kojem je zbroj prvih 10 članova reda 10 puta manji od zbroja posljednjih 10 članova!
    R: $\sqrt[10]{10}$
14. Gumena loptica ispuštena je s visine od 3m na tvrdu podlogu. Svaki put kad udari u nju, odbije se do $\frac{2}{3}$ visine. Izračunajte ukupni put (padanja i podizanja) koji loptica prevali do umirenja.
    R: 15m
15. Izračunajte zbroj prvih sto zajedničkih članova aritmetičkih nizova 17, 21, 25, … i 16, 21, 26, … !
    R: 101100
16. Niz (a_n) definiran je na sljedeći način: $a_1 = -6, \quad a_{n+1} = a_n + n$, za $n \in \mathrm{N}$. Koliko je a_{2004}?
    R: 2007000
17. Godine starosti petero braće čine aritmetički niz. Zbroj godina najstarije dvojice jednak je zbroju godina ostale trojice, a svi zajedno osim najmlađeg imaju ukupno 78 godina. Koliko je star najmlađi brat?
    R: 12