Konike

Povijesni pregled konika[*]

Davor Menon[†]
davor.menon@gmail.com

31. ožujka 2006.

Sažetak

Konike (presjeci stošca ravninom) se proučavaju više od 2 000 godina. O njima su pisali mnogi velikani matematike. Od Menehma preko Euklida, Arhimeda i Apolonia sve do Papusa. Sve do radova Keplera nema značajnijih pomaka.

U ovom radu ćemo se još pobliže pozabaviti porijeklom imena konika (elipsa, parabola i hiperbola) i Papo–Boškovićevom definicijom konika.

Ključne riječi: konike, presjeci stošca ravninom, Papo-Boškovićeva definicija konika

[*]Seminarski rad iz *Metodike nastave matematike II*

[†]Odjel za matematiku, Osijek

1 Povijesni pregled konika

1.1 Antička Grčka

Pronalazak konika (čunjosječnica) pripisuje se Menehmu (4. st. pr. Kr.), pripadniku Platonove Akademije u Ateni. Menehmo je otkrio da se presjekom stošca i ravnine koje je okomita na izvodnicu stošca dobiju do tada nepoznate krivulje. Vrsta krivulje je ovisila o vrsti štošca. Za stožac šiljastog vrha dobivamo elipsu, pravokutnog vrha parabolu i tupog vrha dobivamo hiperbolu. Ove nazive nije dao Menehmo, imena pripadajućim krivuljama su pridružena kasnije.

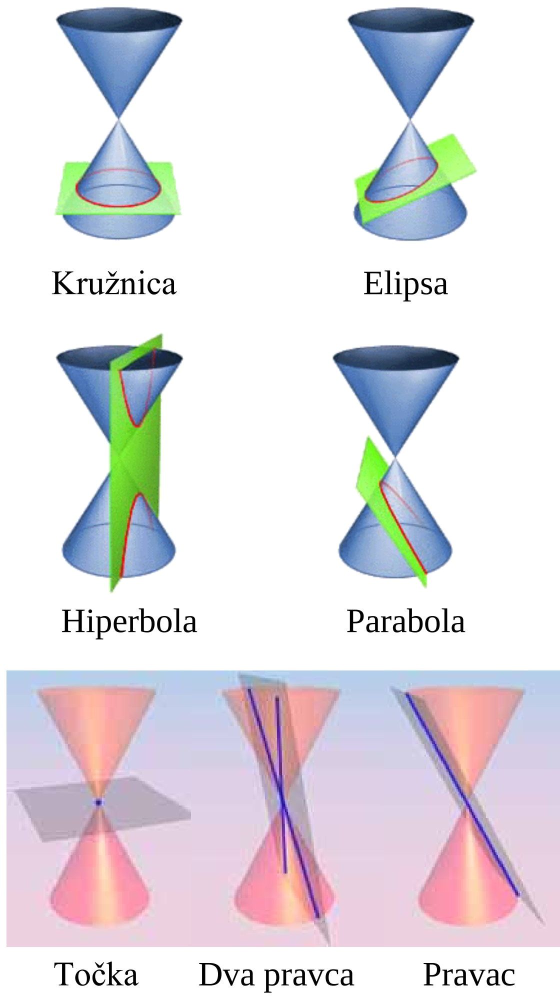
Konikama se također bavio i Euklid (325. – 265. pr. Kr.). Njegova djela koja se bave ovim predmetom su izgubljena. Djela Arhimeda (287. – 212.) sadrže neke važne rezultate o svojstvima konika, pogotovo parabole.

Najveći antički pisac o konikama je svakako Apolonije iz Perge (262. – 190.). Njegov poznati rad o konikama se sastoji od osam knjiga. Apolonije je prvi uvidio da se na jednom te istom stožcu – bio on kos ili uspravan, šiljast ili tup – mogu kao presjek stošca i ravnine dobiti sve tri krivulje (vidi Slika 1). Koju krivulju ćemo dobiti ovisi o nagibu ravnine koja siječe stožac. Kod uspravnog stošca, ravnina koja je okomita na os stošca će nam dati kružnicu. Što je ravnina bliža vrhu stošca to je ona manja i u samom vrhu stošca prelazi u točku. Ukoliko ravninu malo nagnemo, dobivamo elipsu. Postavio li ravninu tako da je paralelna s jednom od izvodnica stošca kao presjek dobivamo parabolu. Ukoliko je ravnina postavljena tako da je paralelna s osi stožca dobivamo hiperbolu. Apolonije je također uveo nazive koje danas koristimo: elipsa, parabola i hiperbola (pogledaj poglavlje 2).

Posljednji od antičkih velikana geometrije je Papo iz Aleksandrije (290. – 350.). Njegovo glavno djelo poznato kao “Colection” je važno – između ostalog – jer sadrži navode i komentare rezultata svojih prethodnika. Papo je uveo pojmove fokusa i direktisa hiperbole. Upravo ova svojstva će kasnije Ruđer Bošković iskoristiti u svojem radu (pogledati poglavlje 3).

1.2 Kršćanska Europa

Od tada je povijest konika gotovo prazna sve do petnaestog stoljeća. Renesansa je donijela oživljavanje interesa za grčko znanje sto za posljedicu ima povečan interes za konike i ostale krivulje. Prve četiri Apolonijeve knjige o konikama su do tog vremena bile sačuvane na grčkom (prijevod na latinski objavljen u Veneciji 1537.) i još tri su bile arapski (pronađene u 17. stoljeću) prijevodi. Osma knjiga je izgubljena. Papusova djela su originalno bila napisana u osam knjiga, ali su do petnaestog stoljeća samo djelomice



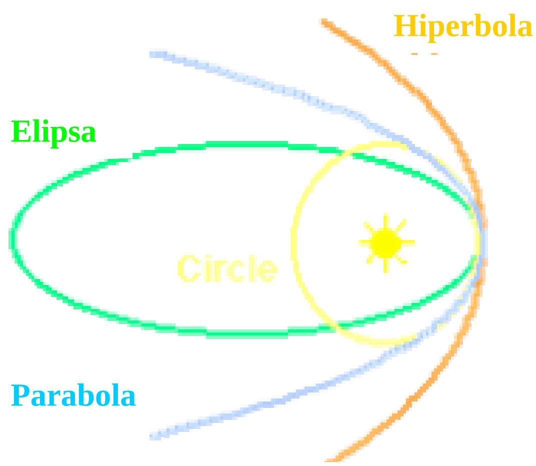
Slika 1: Presjeci stožca i ravnine

sačuvana.

Prvo originalno djelo o konikama u Kršćanskoj Europi se zove "Libellus super viginti duobus elementis conicis" čiji autor je Johannes Werner (1468. – 1528.). Bavi se problemima već obrađivanim od strane grčkih pisaca. Bavio se samo parabolom i hiperbolom. Razlog tomu je njegovo zanimanje za udvostručavanje kocke, pri čemu mu elipsa nije imala značaja.

Tijekom renesanse se osim zbog traženja "starih mudrosti" povećao interes za primjenu geometrijskih spoznaja i u umjetnosti. Nadalje, proučavanjem raznih optičkih problema su konike dobile još više na važnosti.

Također, nove spoznaje u astronomiji su značajno potakla zanimanje za konike. Nicholas Copernicus (1473. – 1543.) je ostao pri uvjerenju da je kružnica glavna kada se govori o gibanju nebeskih tijela, ali je Johanes Kepler (1571. – 1630.) prepoznao eliptičnu putanju Marsa oko Sunca. Svojstva konika primjnjivih na astrologiju su tada postala vrlo zanimljiva cijelo svijetu (vidi Slika 2).

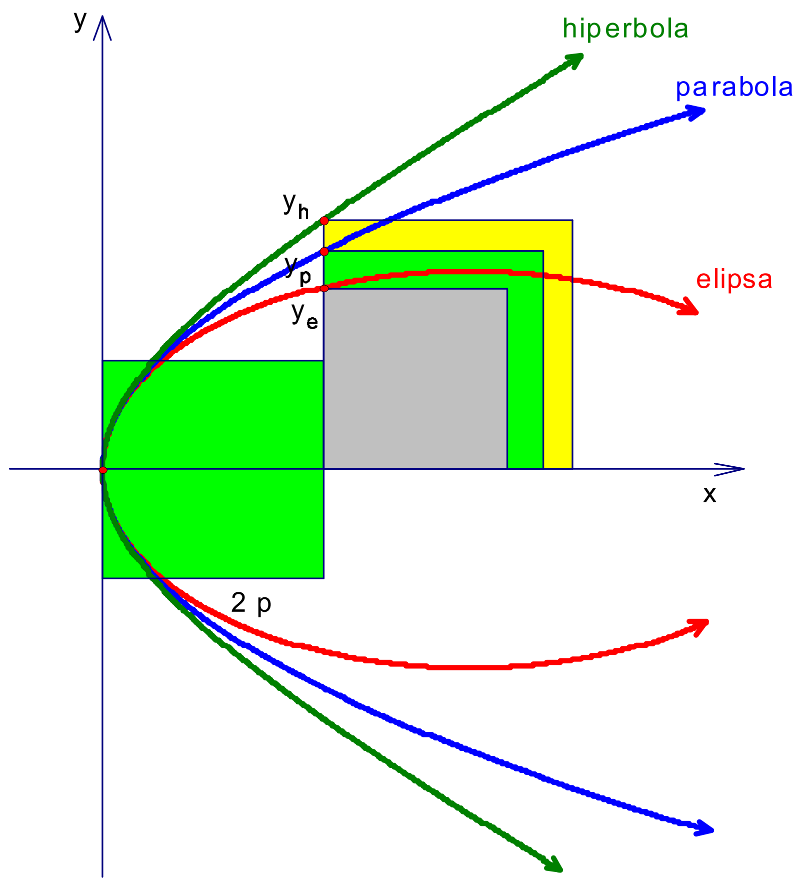


Slika 2: Gibanje nebeskih tijela

Kao dio svoje knjige "Astronomiae pars Optica" je jedno poglavlje (peto) posvetio konikama. Kepler razlikuje pet vrsta konika: kružnicu, elipsu, parabolu, hiperbolu i pravac. Tvrdi da se jedna krivulja može dobiti iz druge neprekidnim mjenjanjem. Pravac i parabola su dva ekstremna oblika hiperbole, a parabola i krug su dva ekstremna oblika kružnice. Kepler je prvi uveo naziv "fokus" za značajne točke na osi konike.

2 Porijeklo imena elipse, parabole i hiperbole

Sve nas je vrlo vjerojatno zanimalo, a neke još uvijek zanima, zašto konike nose nazive elipsa, parabola i hiperbola. Već smo prije spomenuli kako Apolonije iz Perge prvi nadjenuo imena konikama. Naišao sam na nekoliko "*verzija*".



Slika 3: Grafička usporeda površina kvadrata

Svi se slažu da je izvorno značenje grčkih riječi bitno. U Tablici 1 se može vidjeti prijevod riječi.

Ovdje ćemo malo detaljnije govoriti o površini kvadrata (pogledaj Slika 3). Promotrimo točku $(2p, 0)$, gdje je p poluparametar parabole. I elipsa i

	izvorna riječ	značenje
hiperbola	$\upsilon\pi\varepsilon\rho o\lambda\lambda\eta$	suvišak, prebačeno
parabola	$\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\eta$	jednakost, pokraj
elipsa	$\varepsilon\lambda\lambda\varepsilon\iota\psi\iota\zeta$	nedostatak, podbačeno

Tablica 1: Značenje naziva konika

hiperbola imaju jednake poluparametre. Jednadžbe krivulja su sljedeće:

$$\begin{array}{ll} y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2 & \ldots\text{hiperbola} \\ y^2 = 2px & \ldots\text{parabola} \\ y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 & \ldots\text{elipsa} \end{array}$$

Površina kvadrata između tjemena krivulja i točke $(2p, 0)$ iznosi $4p^2$. Površine kvadrata s druge stranice je upravo y^2 kada je $x = 2p$ za svaku krivulju. Tako da dobivamo:

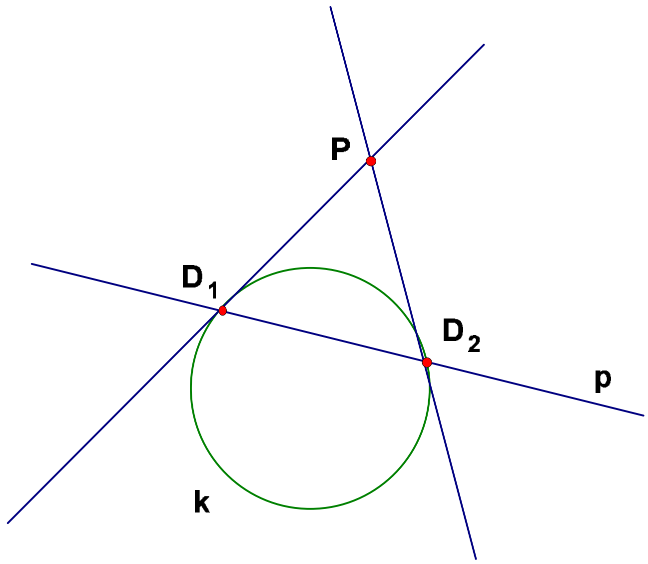
$$\begin{array}{ll} y^2 = 4p^2\left(1 + \frac{p}{a}\right) & > 4p^2 \\ y^2 = 2p(2p) & = 4p^2 \\ y^2 = 4p^2\left(1 - \frac{p}{a}\right) & < 4p^2 \end{array}$$

3 Papo–Boškovićeva definicija konika

Dubrovački matematičar Ruđer Bošković (1711. – 1787.) koristeći se svojstvima koje je opisao Papo iz Aleksandrije u djelu “Sectionum conicarum elementa” (Rim, 1764.) izgradio teorija konika na čisto geometrijski način. To je učinio tako dotjerano da sa sintetičke strane Boškovićevo djelo nije nadmašeno.

3.1 Pol i polara

Prije nego krenemo u izvođenje Papo-Boškovićevog poučka moramo reći što je pol i polara. Ako iz točke povučemo dvije tangente na krivulju, dobivamo dva dirališta. Provučemo li pravac kroz ta dva dirališta dobili smo polaru. Točku iz koje smo povukli tangente na krivulju zovemo pol (vidi Slika 4). Bez daljnje rasprave – jer nam to nije cilj u ovom radu – uzimamo da je jednadžba polare za elipsu $b^2xx_p + a^yy_p = a^2b^2$, gdje je pol $P(x_p, y_p)$. Imamo još i jednadžbu polare za hiperbolu $b^2xx_p - a^yy_p = a^2b^2$ i parabolu $yy_p = p(x + x_p)$, gdje je p poluparametar parabole.



Slika 4: Pol i polara kružnice

3.2 Izvod Papo–Boškovićevog poučka

Definicija polare za neku krivulju ne isključuje promatranje polara točaka unutar pojedine konike. Mi ćemo upravo za pol uzeti fokus konike.

Ako je za parabolu fokus $F\left(\frac{p}{2}\right)$ uzet za pol, tada njegova polara ima jednadžbu (vidi Slika 5)

$$x = -\frac{p}{2}\ .$$

Uzmemo li fokus elipse $F_2(e, 0)$ kao pol, dobivamo jednadžbu polare fokusa F u odnosu na elipsu

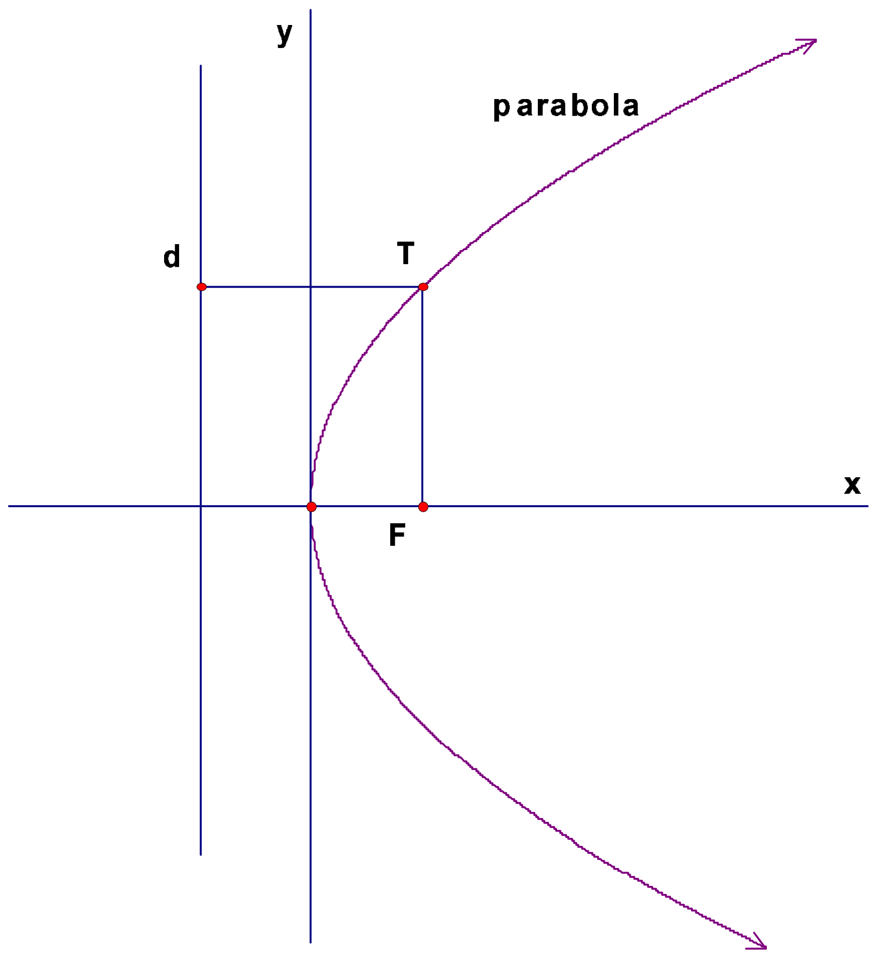
$$x = \frac{a^2}{e}\ .$$

Analogno se dobije i za drugi fokus $F_1(-e, 0)$ jednadžba polare

$$x = -\frac{a^2}{e}\ .$$

Nadalje, prisjetimo se da je numerički ekscentritet parabole (i hiperbole) $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

Bošković je gledao omjer udaljenosti točke krivulje od fokusa i udaljenosti točke od direktise (polare fokusa). Kod parabole je slučaj trivijalan. Iz definicije parabole slijedi da taj omjer uvijek jednak 1.



Slika 5: Parabola i njena direktisa

Kod elipse ipak trebamo pokazati čemu je jednak taj omjer.

$$\begin{array}{rcl}
|TF_2| & = & \sqrt{(e-x)^2+y^2} \\
 & = & |A-\varepsilon x| \\
|Td_2| \quad 0 & = & \left|\dfrac{a^2}{e}-x\right| \\
 & = & \left|\dfrac{a-\varepsilon x}{\varepsilon}\right| \\
\dfrac{|TF_2|}{|Td_2|} & = & \varepsilon
\end{array}$$

Isti rezultat se dobiva i za drugi fokus elipse, a analogno se cijeli račun može ponoviti i za hiperbolu. I za hiperbolu vrijedi da je omjer konstantan i jednak ε.

Promatrajući svojstva numeričkog ekscentriteta za pojedine konike dobijamo sljedeći teorem.

Teorem 1 (Papo–Boškovićev teorem)

Neka je varepsilon realan pozitivan broj, F čvrsta točka ravnine i d čvrsti pravac te ravnine kojemu ne pripada točka F.

Skup točaka T te ravnine za koje je omjer udaljenosti od F, $|TF|$, i udaljenosti od pravca d, $|Td|$, konstantan i jednak broju ε, tj.

$$\frac{|TF|}{|Td|}=\varepsilon$$

krivulja je drugog reda, i to elipsa ako je $0<\varepsilon<1$, parabola ako je $\varepsilon=1$ i hiperbola ako je $\varepsilon>1$.