

Sveučilišni poslijediplomski doktorski studij matematike

Sveučilište u Zagrebu

Ivana Kuzmanović

Optimizacija rješenja parametarski ovisne Sylvesterove jednadžbe i primjene

Mentor: prof.dr.sc. Ninoslav Truhar,
Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku

Zagreb, 2012.

"Mathematics is the music of reason."

James Joseph Sylvester

Mojoj obitelji

Sadržaj

1	Uvod	1
1.1	Uvod	1
1.2	Organizacija disertacije	8
1.3	Pregled pomoćnih pojmova i rezultata	11
2	Sylvesterova i Ljapunovljeva jednadžba i primjene	19
2.1	Egzistencija i jedinstvenost rješenja Sylvesterove jednadžbe	19
2.2	Osnovne metode za rješavanje Sylvesterove i Ljapunovljeve jednadžbe . .	21
2.3	Neke primjene Sylvesterove i Ljapunovljeve jednadžbe	24
2.3.1	Neke primjene Sylvesterove, odnosno Ljapunovljeve jednadžbe u teoriji dinamičkih sustava	24
2.3.2	Problem prigušenja mehaničkih sustava	25
2.3.3	Problem rješavanja algebarske Riccatijeve jednadžbe Newtonovom metodom	30
3	Sherman-Morrison-Woodbury-eva formula za Sylvesterovu jednadžbu	33
3.1	Sherman-Morrison-Woodbury-eva formula za Sylvesterovu jednadžbu . .	33
3.2	Algoritam za rješavanje Sylvesterove jednadžbe koristeći S-M-W formulu	36
3.3	Primjena	39
4	Optimizacija rješenja parametarski ovisne Sylvesterove jednadžbe	43
4.1	Uvod	43
4.2	Algoritam za računanje rješenja parametarski ovisne Sylvesterove jednadžbe	44
4.2.1	Efikasno računanje $\text{vec}(X(v))$	45
4.3	Optimizacija rješenja parametarski ovisne Sylvesterove jednadžbe	50
4.3.1	Optimizacija s obzirom na kriterij $\text{tr}(X(v)) \rightarrow \min$	50
4.3.2	Optimizacija s obzirom na kriterij $\ X(v)\ _F \rightarrow \min$	51
4.4	Primjena - problem optimalne viskoznosti prigušivača mehaničkih sustava	53
4.4.1	Numerički primjeri	53
5	Sherman-Morrison-Woodbury-eva formula za T-Sylvesterovu jednadžbu	59
5.1	T -Sylvesterova jednadžba	59
5.1.1	Algoritam za rješavanje T -Sylvesterove jednadžbe	61
5.2	Sherman-Morrison-Woodbury-eva formula za T -Sylvesterovu jednadžbu .	62

5.2.1	Algoritam za rješavanje T -Sylvesterove jednačbe koristeći S-M-W formulu	65
5.3	Algoritam za računanje rješenja parametarski ovisne T -Sylvesterove jednačbe	67
5.4	Optimizacija rješenja parametarski ovisne T -Sylvesterove jednačbe . . .	69
5.5	Numerički primjeri	70
6	Optimizacija parametara pri modalnom prigušenju	73
6.1	Identifikacija i optimizacija modalnog prigušenja	73
6.2	Modalno prigušenje i parametarski ovisna Ljapunovljeva jednačba	76
6.3	Različiti oblici prigušenja	79
6.3.1	Prigušenje oblika $D = \alpha M$	79
6.3.2	Prigušenje oblika $D = \beta K$	81
6.3.3	Rayleigh-evo prigušenje $D = \alpha M + \beta K$	83
6.3.4	Prigušenje oblika $D = \alpha M + \beta M^{1/2} \sqrt{M^{-1/2} K M^{-1/2}} M^{1/2}$	87
6.4	Numerički primjeri	89
	Popis algoritama	102
	Bibliografija	104
	Životopis	111
	Sažetak	112
	Summary	115

Zahvale

Na početku, najiskrenije se zahvaljujem svom mentoru prof. dr. sc. Ninoslavu Truharu na vodstvu tijekom izrade doktorske disertacije, te na nesebičnoj pomoći u znanstvenom radu. Zahvaljujem mu na stvaranju poticajne radne sredine i prenošenju znanja, iskustava i kontakata iz njegove bogate međunarodne suradnje.

Srdačno se zahvaljujem kolegi doc. dr. sc. Zoranu Tomljanoviću na podršci tijekom poslijediplomskog studija, a osobito na susretljivosti tijekom mojih početaka znanstvenog rada, te na ugodnoj i poticajnoj suradnji.

Zahvaljujem se prof. dr. sc. Kristianu Sabi na podršci i na kontinuiranom interesu za napredak mog znanstvenog rada, te na nesebičnoj pomoći kad god je bilo potrebno.

Zahvaljujem se Povjerenstvu za ocjenu disertacije: doc. dr. sc. Ivici Nakiću, doc. dr. sc. Luki Grubišiću i prof. dr. sc. Ninoslavu Truharu. Osobito se zahvaljujem doc. dr. sc. Ivici Nakiću na detaljnom čitanju disertacije i vrijednim primjedbama.

Zahvaljujem se anonimnim recenzentima radova koji sačinjavaju disertaciju, njihovi komentari su značajno poboljšali kvalitetu radova, a time i kvalitetu disertacije.

Zahvaljujem se svim kolegama s Odjela za matematiku s kojima sam zajedno pohađala poslijediplomski studij, a koji su mi uljepšavali dugo vrijeme provedeno na putovanjima, kao i svim ostalim zaposlenicima Odjela za matematiku Sveučilišta u Osijeku koji su na bilo koji način doprinijeli mom znanstvenom radu.

Toplo se zahvaljujem svojim roditeljima Stevi i Gordani, te sestri Nataši na neizmjernoj podršci i poticanju tijekom cijelog školovanja.

Na kraju, najtoplije se zahvaljujem svom suprugu Igoru i kćeri Lani na podršci, ljubavi i strpljenju.

Poglavlje 1

Uvod

1.1 Uvod

Osnovni problem kojim se bavi ova disertacija je efikasno rješavanje Sylvesterove jednadžbe¹

$$AX + XB = E,$$

(odnosno u slučaju $B = A^T$ i $E = E^T$, Ljapunovlje jednadžbe²), kao i T -Sylvesterove jednadžbe

$$AX + X^T B = E,$$

pri čemu se pretpostavlja da matrice A , B , i E posjeduju određenu strukturu. Također se proučava problem optimizacije rješenja parametarski ovisne Sylvesterove (odnosno Ljapunovljeve) jednadžbe oblika

$$(A_0 - vU_1V_1)X(v) + X(v)(B_0 - vU_2V_2) = E,$$

kao i parametarski ovisne T -Sylvesterove jednadžbe oblika

$$(A_0 - vU_1V_1)X(v) + X(v)^T(B_0 - vU_2V_2) = E.$$

Sylvesterova jednadžba može se promatrati kao poopćenje nekih važnih poznatih problema kao što su: linearne jednadžbe ($AX = C$), invertiranje matrice ($AX = I$), problem svojstvenih vektora ($AX - X\Lambda = 0$, gdje je $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$) i komutirajuće

¹Sylvesterova jednadžba dobila je ime po engleskom matematičaru Jamesu Josephu Sylvesteru (1814.-1897.)

²Ljapunovljeva jednadžba dobila je ime po ruskom matematičaru Aleksandru Mikhailovichu Ljapunovu (1857.-1918.)

matrice ($AX - XA = 0$). Specijalan slučaj Sylvesterove jednadžbe je i matrična jednadžba $AX = XB$ koju je J. J. Sylvester promatrao još 1884. godine u svom radu [60].

Sylvesterove, odnosno Ljapunovljeve jednadžbe imaju široku primjenu u mnogim dijelovima matematike, ali i drugih primjenjenih znanosti. Jedna od najjednostavnijih primjena Sylvesterove jednadžbe je blok-dijagonalizacija blok-trokutaste matrice oblika

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Naime, iz jednakosti

$$\begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & AX - XB + C \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

odmah se vidi da je problem blok-dijagonalizacije blok-trokutaste matrice ekvivalentan problemu rješavanja Sylvesterove jednadžbe $AX - XB = -C$ (vidi [28]).

Nadalje, Sylvesterova i Ljapunovljeva jednadžba imaju važnu primjenu u teoriji upravljanja. Pri proučavanju kontinuiranih linearnih vremenski invarijantnih (LTI) sustava važnu ulogu imaju gramijan upravljivosti, gramijan osmotrivosti i unakrsni gramijan (vidi primjerice [3, 22, 27]). Gramijan upravljivosti i gramijan osmotrivosti dobivaju se kao rješenja Ljapunovljeve jednadžbe. S druge strane, unakrsni gramijan dobiva kao rješenje Sylvesterove jednadžbe. Sylvesterova, odnosno Ljapunovljeva jednadžba koriste se nadalje i pri redukciji modela [3, 5, 58], numeričkom rješavanju diferencijalne Riccatijeve jednadžbe [23] i algebarske Riccatijeve jednadžbe [9], obradi slike [17], kod problema pridruživanja svojstvenih vrijednosti [13, 14], u problemu prigušenja u mehaničkim sustavima [7, 11, 70, 46, 19, 63, 64, 65, 67], problemu računanja zaglađene spektralne apscise [66] i mnogim drugim.

Budući da rješavanje Sylvesterove jednadžbe $AX + XB = E$ (odnosno Ljapunvljeve jednadžbe $AX + XA = E$) uvelike ovisi o strukturi matrica A , B i E , trenutno postoji veliki broj različitih algoritama za njihovo rješavanje, čija točnost i efikasnost ovisi o strukturi navedenih jednadžbi.

Jedna od najrobusnijih i najrasprostranjenijih metoda za rješavanje Sylvesterove jednadžbe je Bartels-Stewartova metoda (vidi [4, 59, 22, 3]), dok je za Ljapunovljevu jednadžbu najkorištenija Hammarlingova metoda (vidi [30]). Bartels-Stewartova metoda bazira se na Schurovoj dekompoziciji matrica A i B , te na nekoj vrsti povratnih supstitucija za rješavanje dobivenih trokutastih matričnih jednadžbi. Prednost metoda baziranih na Schurovoj dekompoziciji je potpuna neovisnost o strukturi matrica A , B i E , te se

zbog toga mogu primjeniti na sve probleme koji imaju jedinstveno rješenje. Neosjetljivost na strukturu im je ujedno i nedostatak jer imaju istu složenost u slučaju jednadžbi s nestrukturiranim, kao i s vrlo strogo strukturiranim matricama.

S druge strane, postoji niz iterativnih metoda koje se koriste za rješavanje Sylvesterove, odnosno Ljapunovljeve jednadžbe sa strukturiranim matricama A i B , najčešće su to rijetko popunjene matrice A, B i desna strana E malog ranga. Tu prije svega treba istaknuti metode bazirane na projekciji na odgovarajući Krylovljevi potprostor (vidi primjerice [33, 34, 35, 57]), odnosno ADI tipa (vidi primjerice [8, 10, 40, 41, 48]), te metode bazirane na racionalnoj Krylovljevoj metodi (za čiju je efikasnu upotrebu nužno poznavanje dobrog skupa ADI parametara).

U prvom dijelu radnje proučavat će se Sylvesterova jednadžba oblika

$$(A_0 + U_1 V_1)X + X(B_0 + U_2 V_2) = E, \quad (1.1)$$

pri čemu su A_0, B_0 matrice jednostavne strukture (npr. dijagonalne ili blok dijagonalne), a U_1, V_1^T, U_2, V_2^T pravokutne matrice kod kojih je broj stupaca puno manji od broja redaka (radi jednostavnosti u ovom uvodnom dijelu pretpostavit ćemo da je broj redaka za sve matrice U_1, V_1^T, U_2, V_2^T jednak n , te da sve imaju isti broj stupaca r). Modeli sa Sylvesterovim jednadžbama navedenog oblika pojavljuju se primjerice u [9, 43], pri primjeni Newtonove metode na rješavanje Riccatijeve jednadžbe koja dolazi iz problema teorije transporta, dok se slučaj Ljapunovljeve jednadžbe navedenog oblika pojavljuje pri problemu optimizacije prigušenja mehaničkih sustava (vidi primjerice [46, 69]).

Kao što je primjećeno u radovima [9, 43, 38, 63, 64], Sylvesterova (odnosno Ljapunovljeva) jednadžba oblika (1.1) može se vrlo uspješno riješiti primjenom Sherman-Morrison-Woodbury-eve formule. U tom smislu, prvi rezultat koji je izveden u radnji jest takozvana Sherman-Morrison-Woodbury-eva formula za rješenje Sylvesterove jednadžbe navedenog oblika i predstavlja poopćenje ideja iz [9, 43, 63, 64]. U tu svrhu definirani su operatori

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(X) &= A_0 X + X B_0, \\ \mathcal{L}_{UV}(X) &= U_1 V_1 X + X U_2 V_2 \end{aligned}$$

pomoću kojih se Sylvesterova jednadžba (1.1) u operatorskom obliku može zapisati kao

$$(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{UV})(X) = E. \quad (1.2)$$

Pokazano je da tada Sherman-Morrison-Woodbury-eva formula za Sylvesterovu jednadžbu (1.1) ima oblik:

$$X = (\mathcal{L}_0^{-1} - \mathcal{L}_0^{-1} \mathcal{U} (\mathcal{I} + \mathcal{V} \mathcal{L}_0^{-1} \mathcal{U})^{-1} \mathcal{V} \mathcal{L}_0^{-1})(E),$$

gdje su $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ operatori definirani s

$$\mathcal{U}(X_1, X_2) = U_1 X_1 + X_2 V_2, \quad \mathcal{V}(X) = (V_1 X, X U_2) .$$

Odgovarajuća matična formula je oblika

$$\text{vec}(X) = (\mathbb{L}_0^{-1} - \mathbb{L}_0^{-1} \mathbb{U} (I + \mathbb{V} \mathbb{L}_0^{-1} \mathbb{U})^{-1} \mathbb{V} \mathbb{L}_0^{-1}) \text{vec}(E), \quad (1.3)$$

gdje su $\mathbb{L}_0$, $\mathbb{U}$ i $\mathbb{V}$ matrice operatora $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ u standardnoj bazi. Matrice $\mathbb{L}_0$, $\mathbb{U}$ i $\mathbb{V}$ su strukturirane matrice, te stoga prethodna formula omogućava konstrukciju efikasnog algoritma za rješavanje Sylvesterove jednadžbe (1.1).

Nadalje, pokazano je da su algoritmi bazirani na Sherman-Morrison-Woodbury-evoj formuli osobito efikasni za izračunavanje rješenja parametarski ovisne Sylvesterove jednadžbe

$$(A_0 - v U_1 V_1) X(v) + X(v) (B_0 - v U_2 V_2) = E \quad (1.4)$$

u slučaju kada se treba odrediti rješenja za više različitih vrijednosti parametra v . Jedan od primjera gdje se pojavljuje ovakav problem je problem optimizacije viskoznosti prigušivača mehaničkih sistema (vidi [63, 64]).

Za rješavanje ovakvih problema standardne metode bazirane na Schurovoj dekompoziciji rijetko se koriste jer postaju prespore. Za slučaj parametarski ovisne Lypunovljeve jednadžbe je u [63] predložena metoda bazirana na Sherman-Morrison-Woodbury-evoj formuli. Osnovni nedostatak predložene metode je u velikoj složenosti te u lošem korištenju računalne memorije, što je uzrokovalo neupotrebljivost tog algoritma u slučaju problema većih dimenzija.

U disertaciji je, korištenjem formule (1.3), izveden algoritam za računanje rješenja parametarski ovisne Sylvesterove jednadžbe koji je poopćenje i poboljšanje algoritma iz [63] s nekoliko aspekata. Prvo, umjesto Ljapunovljeve jednadžbe novi algoritam rješava Sylvesterovu jednadžbu. Drugo poboljšanje odnosi se na značajnu uštedu u broju operacija, te uspješno prevladavanje poteškoća algoritma iz [63] u korištenju memorije. Poboljšanje je postignuto na način da je rješavanje pripadnog linearnog sustava s matricom $(I + \mathbb{V} \mathbb{L}_0^{-1} \mathbb{U})$ umjesto redukcijom na Hessenbergovu formu (kako je predloženo u [63]), zamjenjeno aproksimacijom rješenja primjenom FOM metode. Kako u FOM metodi, između ostalog, nije potrebno eksplicitno formirati matricu sustava $(I + \mathbb{V} \mathbb{L}_0^{-1} \mathbb{U})$, taj pristup omogućio je primjenu novog algoritma na puno većim sustavima uz poboljšanu efikasnost.

Za standardne metode bazirane na Schurovoj dekompoziciji za rješavanje jednadžbe (1.4) potrebno je $O(n^3)$ elementarnih operacija za svaku vrijednost parametra v . Metoda bazirana na Sherman-Morrison-Woodbury-evoj formuli s pristupom iz [63] ima složenost

$O(r^3n^3)$, $r \ll n$ elementarnih operacija za prvu vrijednost od v , dok svako sljedeće rješavanje s drugom vrijednosti od v ima složenost $O(r^2n^2)$ elementarnih operacija. Nova metoda bazirana na Sherman-Morrison-Woodbury-evoj formuli koja je predložena u disertaciji za prvu vrijednost od v ima složenost $O(rkn^2)$, gdje k predstavlja dimenziju Krylovljevog potprostora u FOM metodi, što u slučaju $r, k \ll n$ predstavlja značajno poboljšanje efikasnosti. Za svako sljedeće rješavanje s drugom vrijednosti od v iziskuje samo $O(rn^2)$ dodatnih operacija.

Osim toga, ovim pristupom moguće je i derivacije od $X(v)$ računati u $O(rn^2)$ elementarnih operacija, što omogućava također efikasnu optimizaciju rješenja $X(v)$ obzirom na parametar v . U disertaciji su izvedeni algoritmi za optimizaciju rješenja $X(v)$ obzirom na dva kriterija - kriterij minimalnog traga od $X(v)$ (za kvadratne matrice A_0 i B_0), kao i kriterij minimalne Frobeniusove norme od $X(v)$ (za pravokutne matrice A_0 i B_0), te se optimizacija s obzirom na navedene kriterije može vrlo efikasno provesti Newtonovom metodom.

Sličnim tehnikama kao za Sylvesterovu jednadžbu, moguće je izvesti i Sherman-Morrison-Woodbury-evu formulu za T -Sylvesterovu jednadžbu $AX + X^T B = E$. T -Sylvesterova jednadžba pojavljuje se pri rješavanju palindromskog problema svojstvenih vrijednosti prilikom anti-blok-dijagonalizacije anti-blok-trokutaske matrice (vidi [37, 61]), te je stoga u posljednje vrijeme sve više proučavana.

U radu [61] dan je algoritam za rješavanje T -Sylvesterove jednadžbe složenosti $O(n^3)$ koji se bazira na generaliziranoj Shurovoj dekompoziciji para (A, B^T) . Ukoliko su matrice A i B specijalno strukturirane, moguće je koristeći strukturu konstruirati efikasnije algoritme. U disertaciji se promatra T -Sylvesterova jednadžba oblika

$$(A_0 + U_1 V_1)X + X^T (B_0 + U_2 V_2) = E,$$

pri čemu su A_0, B_0 jednostavne matrice, a U_1, V_1^T, U_2, V_2^T matrice s puno manje stupaca nego redaka. Slično kao i za Sylvesterovu jednadžbu, definiramo li

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}_0(X) &= A_0 X + X^T B_0, \\ \hat{\mathcal{L}}_{UV}(X) &= U_1 V_1 X + X^T U_2 V_2,\end{aligned}$$

promatrana T -Sylvesterova jednadžba u operatorskom obliku glasi

$$(\hat{\mathcal{L}}_0 + \hat{\mathcal{L}}_{UV})(X) = E. \tag{1.5}$$

Zapišemo li $\hat{\mathcal{L}}_{UV} = \hat{\mathcal{U}}\hat{\mathcal{V}}$, gdje su $\hat{\mathcal{U}}, \hat{\mathcal{V}}$ operatori definirani s $\hat{\mathcal{U}}(X_1, X_2) = U_1 X_1 + X_2^T V_2$

i $\hat{\mathcal{V}}(Y) = (V_1 Y, Y^T U_2)$, pokazuje se da Sherman-Morrison-Woodbury formula za T -Sylvesterovu jednadžbu ima oblik

$$X = (\hat{\mathcal{L}}_0^{-1} - \hat{\mathcal{L}}_0^{-1} \hat{\mathcal{U}} (\mathcal{I} + \hat{\mathcal{V}} \hat{\mathcal{L}}_0^{-1} \hat{\mathcal{U}})^{-1} \hat{\mathcal{V}} \hat{\mathcal{L}}_0^{-1})(E),$$

odnosno u matričnom obliku

$$\text{vec}(X) = (\hat{\mathbb{L}}_0^{-1} - \hat{\mathbb{L}}_0^{-1} \hat{\mathbb{U}} (I + \hat{\mathbb{V}} \hat{\mathbb{L}}_0^{-1} \hat{\mathbb{U}})^{-1} \hat{\mathbb{V}} \hat{\mathbb{L}}_0^{-1}) \text{vec}(E),$$

gdje su $\hat{\mathbb{L}}_0$, $\hat{\mathbb{U}}$ i $\hat{\mathbb{V}}$ matrice operatora $\hat{\mathcal{L}}_0$, $\hat{\mathcal{U}}$ i $\hat{\mathcal{V}}$. Dobivena formula omogućava konstrukciju efikasnog algoritma za rješavanje promatrane jednadžbe.

I u ovom slučaju osobita se efikasnost postiže pri računanju rješenja parametarski ovisne T -Sylvesterove jednadžbe

$$(A_0 - vU_1V_1)X(v) + X(v)^T(B_0 - vU_2V_2) = E,$$

kao i pri optimizaciji rješenja prethodne jednadžbe (primjerice obzirom na kriterij minimalnog traga rješenja). Za razliku od standardnog algoritma iz [61] koji ima složenost $O(n^3)$ po iteraciji minimizacijskog procesa, algoritam baziran na Sherman-Morrison-Woodbury-evoj formuli ima složenost $O(rkn^2)$ u prvoj te $O(rn^2)$ u svakoj sljedećoj iteraciji, gdje su $r, k \ll n$.

Posljednji dio radnje posvećen je optimizaciji rješenja parametarski ovisne Ljapunovljeve jednadžbe koja se pojavljuje u problemu optimizacije prigušenja mehaničkih sustava opisanih jednadžbom

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = 0.$$

Navedeni problem je u posljednje vrijeme promatran primjerice u [46, 11, 69, 63, 7]. Cilj optimizacije prigušenja je odrediti matricu prigušenja nekog zadanog oblika $D = f(M, K; a)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, odnosno parametre $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, koji će za dane matrice mase M i krutosti K osigurati najbolje (obzirom na neki kriterij) iščezavanje titranja sustava u vremenu. Kriterij optimalnosti korišten u [46, 11, 69, 63, 7] je kriterij minimalne prosječne ukupne energije sustava, koji je ekvivalentan problemu određivanja optimalnog rješenja parametarski ovisne Ljapunovljeve jednadžbe oblika

$$A(a)X(a) + X(a)A^T(a) = -Z$$

s obzirom na parametre $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tako da vrijedi $\text{tr}(X) \rightarrow \min$. Na ovaj problem mogu se primjeniti i neki drugi optimizacijski kriteriji vezani za rješenje pripadne Ljapunovljeve jednadžbe, primjerice kriterij minimalne spektralne norme ili kriterij minimalne Frobeniusove norme od $X(a)$.

U primjenama se često pretpostavlja da je prigušenje modalno, odnosno da se matrica D može dijagonalizirati s istom matricom Φ kao i par M, K (vidi primjerice [1, 2, 69]), odnosno da je oblika $D = M f_1(M^{-1}K) + K f_2(K^{-1}M)$, gdje su f_1 i f_2 analitičke funkcije. U slučaju modalnog prigušenja, u disertaciji je pokazano da jednostavna struktura matrice $A(a)$ omogućava eksplicitan zapis rješenja $X(a)$ kao

$$X(a) = P \begin{bmatrix} \hat{X}_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{X}_{nn} \end{bmatrix} P^T, \quad \hat{X}_{ii} = \begin{bmatrix} \frac{2\omega_i^2 + t_i^2}{2\omega_i^2 t_i} & -\frac{1}{2\omega_i} \\ -\frac{1}{2\omega_i} & \frac{1}{t_i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, s,$$

$$\hat{X}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = s + 1, \dots, n.$$

gdje je P *perfect shuffle* permutacijska matrica, a $\omega_1, \dots, \omega_n$ dijagonalni elementi matrice Ω , definirane s $\Phi^T K \Phi = \Omega^2$ i $t_i(a) = f_1(\omega_i^2) + f_2(\omega_i^{-2})$,

Eksplicitno rješenje omogućava da se problem optimalnog prigušenja s obzirom na navedene kriterije svodi na optimizaciju funkcije n varijabli

$$\begin{aligned} \text{tr}(X(a)) &= \sum_{i=1}^s \left(\frac{2}{t_i(a)} + \frac{t_i(a)}{2\omega_i^2} \right), \\ \|X(a)\|_2 &= \max_{i=1, \dots, s} \frac{4\omega_i^2 + t_i(a)^2 + t_i \sqrt{4\omega_i^2 + t_i(a)^2}}{4\omega_i^2 t_i(a)}, \\ \|X(a)\|_F &= \sqrt{\sum_{i=1}^s \left(\frac{2}{t_i(a)^2} + \frac{t_i(a)^2}{4\omega_i^4} + \frac{3}{2\omega_i^2} \right)}. \end{aligned}$$

Za neke specijalne tipove modalnog prigušenja, kao što su prigušenje proporcionalno masi, prigušenje proporcionalno krutosti, Rayleigh-evo prigušenje i dr. optimalni parametri mogu se eksplicitno izračunati ili dobiti rješavanjem sustava jednadžbi. Tako je primjerice jedinstven optimalni parametar za prigušenje oblika $D = \alpha M$, $\alpha > 0$ s obzirom na kriterije minimalnog traga, minimalne Frobeniusove norme i minimalne spektralne norme dan redom s

$$\alpha_{\text{tr}(X)}^* = 2 \sqrt{\frac{s}{\sum_{i=1}^s \frac{1}{\omega_i^2}}}, \quad \alpha_{\|X\|_2}^* = \omega_1 \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)}, \quad \alpha_{\|X\|_F}^* = \sqrt[4]{\frac{8s}{\sum_{i=1}^s \frac{1}{\omega_i^4}}}.$$

U disertaciji su, osim za prethodno navedeno prigušenje, izračunati optimalni parametri za još nekoliko često korištenih tipova prigušenja. Na numeričkim primjerima ilustrirana je sličnost i razlika između promatranih tipova prigušenja, kao i između promatranih kriterija optimalnosti.

1.2 Organizacija disertacije

Ova disertacija organizirana je na sljedeći način:

Poglavlje 1: Uvod

U uvodnom poglavlju dana je motivacija za problem koji se promatra u disertaciji. Također, dan je pregled osnovnih pojmova i rezultata numeričke linearne algebre koji će se koristiti u disertaciji.

Poglavlje 2: Sylvesterova i Ljapunovljeva jednadžba i primjene

U ovom poglavlju navedeni su osnovni pojmovi i rezultati vezani za Sylvesterovu, odnosno Ljapunovljevu jednadžbu. U poglavlju 2.1 naveden je uvjet rješivosti, kao i uvjet jedinstvenosti rješenja Sylvesterove, odnosno Ljapunovljeve jednadžbe. Nadalje, u poglavlju 2.2 ukratko su prikazane osnovne ideje najpoznatijih algoritama za njihovo rješavanje: Bartels-Stewartovog algoritma za Sylvesterovu, te Hammarlingovog algoritma za Ljapunovljevu jednadžbu. U poglavlju 2.3 navedena su neka područja i problemi u kojima se mogu primjeniti Sylvesterova, odnosno Ljapunovljeva jednadžba.

Poglavlje 3: Sherman-Morrison-Woodbury-eva formula za Sylvesterovu jednadžbu

U ovom poglavlju dana je takozvana Sherman-Morrison-Woodbury-eva formula za Sylvesterovu jednadžbu (poglavlje 3.1), te efikasan algoritam za rješavanje Sylvesterove jednadžbe koristeći navedenu formulu (poglavlje 3.2), kao i moguća primjena dobivenog algoritma, s naglaskom na problem rješavanja algebarske Riccatijeve jednadžbe (poglavlje 3.3).

Poglavlje 4: Optimizacija rješenja parametarski ovisne Sylvesterove jednadžbe

U ovom poglavlju prikazan je algoritam za računanje (poglavlje 4.2) i optimizaciju (poglavlje 4.3) rješenja parametarski ovisne Sylvesterove jednadžbe

$$(A_0 - vU_1V_1)X(v) + X(v)(B_0 - vU_2V_2) = E.$$

Optimizacija se vrši u ovisnosti o parametru $v \in \mathbb{R}$, s obzirom na dva različita kriterija: kriterij minimalnog traga od $X(v)$ (poglavlje 4.3.1) i kriterij minimalne Frobeniusove norme od $X(v)$ (poglavlje 4.3.2). Kriterij minimalnog traga može se primjeniti samo u slučaju $m = n$, dok je kriterij minimalne Frobeniusove norme primjenjiv i u slučaju $m \neq n$.

Prednosti novog algoritma ilustrirane na problemu optimizacije viskoznosti prigušivača mehaničkih sustava (poglavlje 4.4).

Poglavlje 5: Sherman-Morrison-Woodbury-eva formula za T -Sylvesterovu jednadžbu

U poglavlju 5.1. dani su osnovni rezultati o T -Sylvesterovoj jednadžbi, kao i osnovni algoritam za rješavanje T -Sylvesterove jednadžbe. U poglavlju 5.2. dana je takozvana Sherman-Morrison-Woodbury-eva formula za T -Sylvesterovu jednadžbu, te odgovarajući efikasan algoritam za rješavanje T -Sylvesterove jednadžbe koristeći navedenu formulu. Algoritmi za računanje i optimizaciju rješenja parametarski ovisne T -Sylvesterove jednadžbe dani su u poglavljima 5.3 i 5.4, a u poglavlju 5.5 ilustrirani su na numeričkim primjerima.

Poglavlje 6: Optimizacija parametara pri modalnom prigušenju

U ovom poglavlju proučava se optimalno prigušenje D dinamičkog sustava opisanog jednadžbom

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = 0$$

koje će za dane matrice mase M i krutosti K osigurati najbolje (s obzirom na neki kriterij) iščezavanje gibanja (tj. komponenata vektora x) u vremenu. Pretpostavimo li da se matrica D može dijagonalizirati s istom matricom kao i par (M, K) , onda se radi o takozvanom modalnom prigušenju. Veza modalnog prigušenja i Ljapunovljeve jednadžbe dana je u poglavlju 6.2. U poglavlju 6.3 izračunati su optimalni parametri s obzirom na navedene optimizacijske kriterije za neke specijalne oblike matrice prigušenja. U numeričkim primjerima u poglavlju 6.4 uspoređeno je gibanje sustava s optimalnim prigušenjima različitog tipa, kao i s optimalnim parametrima s obzirom na različite kriterije. Također, uspoređeni su neki specifični problemi s obzirom na parametre procijenjene mjerenjem i optimalne parametre.

Neki od rezultata koji su navedeni u ovoj disertaciji nalaze se u sljedećim člancima:

- I. Kuzmanović, N. Truhar, *Optimization of the solution of the parametric dependent Sylvester equation and applications*, poslanom u časopis Journal of Computational and Applied Mathematics;
- I. Kuzmanović, N. Truhar, *Sherman-Morrison-Woodbury formula for Sylvester and T -Sylvester equation with applications*, poslanom u časopis International Journal of Computer Mathematics;
- I. Kuzmanović, Z. Tomljanović, N. Truhar, *Optimization of material with modal damping*, Applied Mathematics and Computation 218 (2012) pp.7326 – 7338 (doi 10.1016/j.amc.2012.01.011).

Notacija

U ovoj disertaciji koristi se sljedeća notacija

$\ \cdot\ $	spektralna norma;
$\ \cdot\ _F$	Frobeniusova norma;
$\sigma(A)$	spektar matrice A ;
$\det(A)$	determinanta matrice A ;
$\text{tr}(A)$	trag matrice A ;
$\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$	dijagonalna matrica s elementima $d_1, \dots, d_n$ na dijagonali;
I_s	jedinična matrica reda s ;
$\mathbb{R}_+$	skup nenegativnih realnih brojeva;
$\mathbb{R}_+^n$	skup uređenih n -torki nenegativnih realnih brojeva;
$\otimes$	Kroneckerov produkt;
$\oplus$	Kroneckerova suma;
$\text{vec}(A)$	vektORIZACIJA matrice A ;
$\text{reshape}(A, m, n)$	$m \times n$ matrica nastala 'preslagivanjem' elemenata matrice A uzimanih redoslijedom po stupcima;
$\text{Re}(z)$	realni dio kompleksnog broja z ;
$\text{Im}(z)$	imaginarni dio kompleksnog broja z ;

1.3 Pregled pomoćnih pojmova i rezultata

U ovom poglavlju navest ćemo neke matematičke pojmove i standardne rezultate koji će se koristiti u daljnjem tekstu disertacije.

Kroneckerov produkt i operator vektorizacije

Pri proučavanju Sylvesterove (odnosno Ljapunovljeve) jednadžbe jedan od važnih alata koji osigurava elegantan uvid u karakterizaciju rješivosti, kao i konstrukciju efikasnih metoda za rješavanje specijalno strukturiranih Sylvesterovih (odnosno Ljapunovljevih) jednadžbi je Kroneckerov produkt i operator vektorizacije matrice.

Za $m \times n$ i $p \times q$ matrice $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$, Kroneckerov produkt matrica A i B (u oznaci $A \otimes B$) definiran je s

$$A \otimes B := \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}.$$

Kroneckerova suma kvadratnih matrica A i B reda m i n , redom, definirana je s

$$A \oplus B := A \otimes I_n + I_m \otimes B \in \mathbb{R}^{mn \times mn}.$$

Operacija vektorizacije je linearan operator koji $m \times n$ matricu A preslika u vektor duljine mn na način da niže stupce matrice A uzastopno jedan za drugim. Preciznije, ako je $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, gdje su $a_i \in \mathbb{R}^m$ stupci matrice A , onda je

$$\text{vec}(A) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

U nastavku su navedena osnovna svojstva Kroneckerovog produkta i operatora vektorizacije (vidi [39]) koja će se koristiti u disertaciji.

Neka su A i B matrice odgovarajućih dimenzija i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T, \quad (1.6)$$

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD, \quad (1.7)$$

$$\text{vec}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{vec}(A) + \beta \text{vec}(B), \quad (1.8)$$

$$\text{vec}(ABC) = (C^T \otimes A) \text{vec}(B). \quad (1.9)$$

U sljedećem važnom teoremu dane su svojstvene vrijednosti Kroneckerovog produkta i Kroneckerove sume.

Teorem 1.3.1. (*vidi [39], Teorem 1, str. 411*) Neka su matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ i $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sa svojstvenim vrijednostima λ_i , $i = 1, \dots, m$ i μ_j , $j = 1, \dots, n$, redom. Tada su svojstvene vrijednosti matrice $A \otimes B$ dane s

$$\lambda_i \cdot \mu_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Svojstvene vrijednosti matrice $A \oplus B$ dane su s

$$\lambda_i + \mu_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Inverz sume matrica i Sherman-Morrison-Woodbury-eva formula

Jedan od osnovnih rezultata u ovoj disertaciji je takozvana Sherman-Morrison-Woodbury-eva formula za Sylvesterovu i T -Sylvesterovu jednadžbu koje se temelje na standardnoj Sherman-Morrison-Woodbury-evoj formuli za inverz sume matrica.

Postoji niz jednakosti za inverz sume matrica oblika $(A + BCD)$. Možemo ih podijeliti u dvije osnovne skupine - prvoj skupini pripadaju jednakosti kod kojih je pretpostavka da je C opća pravokutna matrica, dok druga skupina jednakosti pretpostavlja da je C regularna kvadratna matrica (vidi [31]).

Primjetimo da ako je P matrica takva da je $I + P$ regularna, onda vrijedi

$$\begin{aligned} (I + P)^{-1} &= (I + P)^{-1}(I + P - P) \\ &= I - (I + P)^{-1}P. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Neka je A regularna matrica, a B , C i D pravokutne matrice takve da je $(A + BCD)$ regularna matrica. Tada primjenom jednakosti (1.10) dobivamo

$$\begin{aligned}
 (A + BCD)^{-1} &= (A(I + A^{-1}BCD))^{-1} \\
 &= (I + A^{-1}BCD)^{-1}A^{-1} \\
 &= (I - (I + A^{-1}BCD)^{-1}A^{-1}BCD)A^{-1} \\
 &= A^{-1} - (I + A^{-1}BCD)^{-1}A^{-1}BCDA^{-1}. \tag{1.11}
 \end{aligned}$$

Nadalje, lako se vidi da za sve matrice P i Q odgovarajuće dimenzije vrijedi $P(I + QP) = (I + PQ)P$. Ako je $(I + PQ)$ regularna matrica, množenjem prethodne nejednakosti slijeva matricom $(I + PQ)^{-1}$ i zdesna matricom $(I + QP)^{-1}$, dobivamo jednakost

$$(I + PQ)^{-1}P = P(I + QP)^{-1}. \tag{1.12}$$

Uzastopnom primjenom jednakosti (1.12), iz jednakosti (1.11) dobivamo niz od šest jednakosti za inverz sume matrica

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - (I + A^{-1}BCD)^{-1}A^{-1}BCDA^{-1} \tag{1.13}$$

$$= A^{-1} - A^{-1}(I + BCDA^{-1})^{-1}BCDA^{-1} \tag{1.14}$$

$$= A^{-1} - A^{-1}B(I + CDA^{-1}B)^{-1}CDA^{-1} \tag{1.15}$$

$$= A^{-1} - A^{-1}BC(I + DA^{-1}BC)^{-1}DA^{-1} \tag{1.16}$$

$$= A^{-1} - A^{-1}BCD(I + A^{-1}BCD)^{-1}A^{-1} \tag{1.17}$$

$$= A^{-1} - A^{-1}BCDA^{-1}(I + BCDA^{-1})^{-1}. \tag{1.18}$$

Primjetimo da je u (1.15) matrica $(I + CDA^{-1}B)$ dimenzije $r_1 \times r_1$, gdje je r_1 broj stupaca matrice B . Slično je u (1.16) matrica $(I + DA^{-1}BC)$ dimenzije $r_2 \times r_2$, gdje je r_2 broj stupaca matrice C .

Ako je i C regularna kvadratna matrica, onda vrijedi Sherman-Morrisson-Woodbury-eva jednakost dana u sljedećem teoremu.

Teorem 1.3.2. *Sherman-Morrison-Woodbury-eva formula (vidi [74])*

Neka je A regularna matrica reda n , B i D^T $n \times r$ matrice, te C regularna matrica reda r . Tada je matrica $A + BCD$ regularna ako i samo ako je $r \times r$ matrica $C^{-1} + DA^{-1}B$ regularna i u tom slučaju vrijedi

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}. \tag{1.19}$$

Istovremena dijagonalizacija para hermitskih matrica

Jedan od osnovnih rezultata koji se koristiti pri problemu prigušenja mehaničkih sustava opisanom u poglavlju 2.3.2 odnosi se na istovremenu dijagonalizaciju para hermitskih matrica.

Dvije dijagonalizabilne matrice $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ su istovremeno dijagonalizabilne ako postoji regularna matrica $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ takva da su $S^{-1}AS$ i $S^{-1}BS$ dijagonalne matrice.

Dvije dijagonalizabilne matrice $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ su istovremeno dijagonalizabilne kongruencijom ako postoji regularna matrica $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ takva da su S^*AS i S^*BS dijagonalne matrice.

Sljedeći teorem daje nužan i dovoljan uvjet da bi dvije matrice bile istovremeno dijagonalizabilne, odnosno istovremeno dijagonalizabilne kongruencijom.

Teorem 1.3.3. (*vidi [32]*)

- a) *Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ dijagonalizabilne matrice. Tada postoji regularna matrica S takva da su $S^{-1}AS$ i $S^{-1}BS$ dijagonalne ako i samo ako matrice A i B komutiraju, odnosno ako i samo ako je $AB = BA$.*
- b) *Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitske matrice. Tada postoji unitarna matrica U takva da su U^*AU i U^*BU dijagonalne ako i samo ako matrice A i B komutiraju, odnosno ako i samo ako je $AB = BA$.*
- c) *Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ dvije hermitske matrice i B pozitivno definitna matrica. Tada postoji regularna matrica S takva da je $S^*AS = D$ i $S^*BS = I$, gdje je D dijagonalna matrica (pri čemu su dijagonalni elementi matrice D svojstvene vrijednosti matrice $B^{-1}A$).*

Generalizirani problem svojstvenih vrijednosti i generalizirana Schurova dekompozicija

Osnovni algoritam za rješavanje T -Sylvesterove jednadžbe temelji se na generaliziranoj Schurovoj dekompoziciji matrice.

Neka su A i B kvadratne matrice reda n . Skup svih matrica oblika $A - \lambda B$, $\lambda \in \mathbb{C}$ naziva se matrični par (eng. *matrix pencil*) i označava s (A, B) . Svojstvene vrijednosti para (A, B) su elementi skupa $\sigma(A, B)$ definiranog s

$$\sigma(A, B) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda B) = 0\}.$$

Ako je $\lambda \in \sigma(A, B)$ i

$$Ax = \lambda Bx, \quad x \neq 0 \quad (1.20)$$

tada je x svojstveni vektor para (A, B) . Problem (1.20) naziva se generalizirani problem svojstvenih vrijednosti.

Matrični par (A, B) ima n svojstvenih vrijednosti ako i samo ako je $\text{rang}(B) = n$. Također, lako se vidi da u tom slučaju je $\sigma(A, B) = \sigma(B^{-1}A)$. Ako je B singularna matrica, tada $\sigma(A, B)$ može biti prazan skup, konačan ili beskonačan skup, kao što se vidi u sljedećem teoremu koji predstavlja generalizaciju Schurove dekompozicije matrice.

Teorem 1.3.4. *Generalizirana Schurova dekompozicija (Teorem 7.7.1, [28])*

i) Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Tada postoje unitarne matrice Q i Z takve da su $Q^*AZ = T$ i $Q^*BZ = S$ gornje-trokataste matrice. Ako su za neki k i t_{kk} i s_{kk} jednaki nula, tada je $\sigma(A, B) = \mathbb{C}$. Inače

$$\sigma(A, B) = \{t_{ii}/s_{ii} : s_{ii} \neq 0\}.$$

ii) Neka su $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Tada postoje ortogonalne matrice Q i Z takve da je $Q^T AZ$ kvazi - gornja trokutasta matrica i $Q^T BZ = S$ gornja trokutasta matrica.

FOM metoda za rješavanje linearnih sustava

Jedan od alata koji će osigurati efikasno rješavanje i optimizaciju rješenja Sylvesterove i T -Sylvesterove jednadžbe odnosi se na efikasno rješavanje, odnosno aproksimaciju rješenja pripadnog sustava linearnih jednadžbi. Osnovna aproksimacijska metoda koja će se koristiti je metoda *Full Orthogonalization Method* (FOM) koja daje aproksimaciju rješenja linearnog sustava iz pripadnog Krylovljevog potprostora.

Neka je A matrica reda n i b vektor dimenzije n . Krylovljev potprostor reda r generiran s matricom A i vektorom b dan je s

$$\mathcal{K}_r(A, b) = \text{span}\{b, Ab, \dots, A^{r-1}b\}.$$

Krylovljev potprostor generiran s matricom A i vektorom b dan je s

$$\mathcal{K}(A, b) = \text{span}\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\}.$$

Očigledna posljedica Hamilton-Cayley-evog teorema je da za $r \geq n$ vrijedi $\mathcal{K}_r(A, b) = \mathcal{K}(A, b)$. Također, lako se vidi da su Krylovljevi potprostori invarijantni na pomake, tj. da je $\mathcal{K}_r(A, b) = \mathcal{K}_r(A - vI, b)$, $v \in \mathbb{R}$.

Arnoldijeva procedura je algoritam za izgradnju ortonormirane baze za Krylovljev potprostor $\mathcal{K}_k$, a onda implicitno i procedura za ortogonalnu projekciju bilo koje matrice na Krylovljev potprostor $\mathcal{K}_k$. U Algoritmu 1 dana je Arnoldijeva procedura bazirana na modificiranoj Gram-Schmidtovoj proceduri. Ostale varijante Arnoldijeve procedure (kao što je primjerice Householder Arnoldi) mogu se vidjeti primjerice u [50].

Algoritam 1 Arnoldijeva procedura bazirana na modificiranoj Gram-Schmidtovoj proceduri

```

Odabrati jedinični vektor  $v_1$ 
for  $j = 1, \dots, k$  do
    izračunati  $w_j = Av_j$ 
    for  $i = 1, \dots, j$  do
         $h_{ij} = (w_j, v_i)$ 
         $w_j = w_j - h_{ij}v_i$ 
    end for
     $h_{j+1,j} = \|w_j\|_2$ 
    if  $h_{j+1,j} = 0$  then
        stop
    end if
     $v_{j+1} = w_j/h_{j+1,j}$ 
end for

```

Vektori $v_1, \dots, v_k$ dobiveni u Arnoldijevoj proceduri čine ortonormiranu bazu za Krylovljev potprostor $\mathcal{K}_k$. Ukoliko algoritam stane nakon koraka j , tada je $\mathcal{K}_j$ invarijantan potprostor od A i u tom slučaju je projekcija na njega egzaktna.

Neka je V_k $n \times k$ matrica sa stupcima $v_1, \dots, v_k$. Tada je $V_k^T V_k = I$. Neka je nadalje $\bar{H}_k$ $(k+1) \times k$ gornja Hessenbergova matrica s elementima $h_{ij}, i = 1, \dots, n, j = i - 1, \dots, n$ koji su definirani u Algoritmu 1, te neka je H_k matrica dobivena od matrice $\bar{H}_k$ ispuštanjem zadnjeg retka. Tada vrijedi (vidi [50], Propozicija 6.5)

$$\begin{aligned}
 AV_k &= V_k H_k + h_{k+1,k} v_{k+1} e_k^T \\
 &= V_{k+1} \bar{H}_k, \\
 V_k^T AV_k &= H_k.
 \end{aligned}$$

Složenost Algoritma 1 za izgradnju ortonormirane baze od $\mathcal{K}_k(A, b)$, gdje je A matrica reda n je $2n^2k + 2k^2n$.

Full Orthogonalization Method (FOM) je metoda za aproksimaciju rješenja sustava $Ax = b$ koristeći ortogonalnu projekciju na Krylovljev potprostor

$$\mathcal{K}_k(A, r_0) = \text{span}\{r_0, Ar_0, \dots, A^{k-1}r_0\},$$

gdje je $r_0 = b - Ax_0$, a x_0 početna aproksimacija. Rješenje x_k u k -toj iteraciji traži se tako da $x_k \in x_0 + K_k(A, r_0)$ i da rezidualni vektor r_k bude okomit na $K_k(A, r_0)$.

Neka je V_k matrica čiji stupci su dobiveni Arnoldijevom procedurom s $v_1 = r_0/\|r_0\|$, te neka je $V_k^T AV_k = H_k$. Tada je x_k oblika

$$x_k = x_0 + V_k y_k,$$

pri čemu je

$$0 = V_k^T r_k = V_k^T (b - Ax_k) = V_k^T (r_0 - AV_k y_k),$$

odnosno $H_k y_k = V_k^T r_0$. Označimo li $\beta = \|r_0\|_2$, tada je

$$V_k^T r_0 = V_k^T (\beta v_1) = \beta e_1.$$

Kao posljedica toga, aproksimacija rješenja u FOM metodi dana je s

$$x_k = x_0 + V_k y_k, \quad \text{gdje je} \quad y_k = H_k^{-1}(\beta e_1).$$

U Algoritmu 2 dana je FOM metoda.

Algoritam 2 *Full Orthogonalization Method (FOM)*

```

Izračunati  $r_0 = b - Ax_0$ ,  $\beta = \|r_0\|_2$ ,  $v_1 = r_0/\beta$ 
Definirati  $k \times k$  matricu  $H_k = \{h_{ij}\}_{i,j=1,\dots,k}$ ; Postaviti  $H_k = 0$ 
for  $j = 1, \dots, k$  do
    izračunati  $w_j = Av_j$ 
    for  $i = 1, \dots, j$  do
         $h_{ij} = (w_j, v_i)$ 
         $w_j = w_j - h_{ij}v_i$ 
    end for
     $h_{j+1,j} = \|w_j\|_2$ 
    if  $h_{j+1,j} = 0$  then
        stop
    end if
     $v_{j+1} = w_j/h_{j+1,j}$ 
end for
Izračunati  $y_k = H_k^{-1}(\beta e_1)$  i  $x_k = x_0 + V_k y_k$ 

```

Za rezidualni vektor vrijedi

$$\begin{aligned}
 b - Ax_k &= b - A(x_0 + V_k y_k) \\
 &= r_0 - AV_k y_k \\
 &= \beta v_1 - V_k H_k y_k - h_{k+1,k} e_k^T y_k v_{k+1} \\
 &= \beta v_1 - \beta V_k e_1 - h_{k+1,k} e_k^T y_k v_{k+1} \\
 &= -h_{k+1,k} e_k^T y_k v_{k+1},
 \end{aligned}$$

odnosno rezidual je dan s

$$\|b - Ax_k\| = \| -h_{k+1,k} e_k^T y_k v_{k+1} \| = h_{k+1,k} |e_k^T y_k|. \quad (1.21)$$

Složenost Algoritma 2 za (punu) matricu reda n dana je približno s $2kn^2 + 2k^2n$.

Za ostale varijante FOM metode, kao što su *Restarted FOM*, *Incomplete Orthogonalization Process (IOM)*, *Direct IOM* pogledati [50]. *Restarted FOM* metoda za sustave s matricom sustava s pomacima, tj. oblika $A - vI$ proučavana je u [56].

Poglavlje 2

Sylvesterova i Ljapunovljeva jednadžba i primjene

U ovom poglavlju dan je pregled osnovnih rezultata o Sylvesterovoj i Ljapunovljevoj jednadžbi, osnovne metode za rješavanje Sylvesterove i Ljapunovljeve jednadžbe, kao i neka područja njihove primjene.

2.1 Egzistencija i jedinstvenost rješenja Sylvesterove jednadžbe

Sylvesterova jednadžba linearna je matrična jednadžba oblika

$$AX + XB = E, \quad (2.1)$$

gdje su $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $E \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dane, a $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ nepoznata matrica. Specijalni slučaj Sylvesterove jednadžbe kod koje je $m = n$, $B = A^T$ i $E^T = E$, tj. matrična jednadžba oblika

$$AX + XA^T = E \quad (2.2)$$

naziva se Ljapunovljeva jednadžba.

Kriterij egzistencije (ne nužno jedinstvenog) rješenja Sylvesterove jednadžbe, poznat kao Rothov teorem (vidi [49]), dan je u sljedećem teoremu.

Teorem 2.1.1. *Sylvesterova jednadžba (2.1) ima rješenje ako i samo ako su matrice*

$$\begin{pmatrix} A & E \\ 0 & -B \end{pmatrix} \quad i \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}$$

slične.

Nadalje promotrimo nužan i dovoljan uvjet egzistencije jedinstvenog rješenja Sylvesterove, odnosno Ljapunovljeve jednadžbe.

Koristeći Kroneckerov produkt i operator vektorizacije matrice, te koristeći svojstva (1.8) i (1.9) operatora vektorizacije, jednadžbu (2.1) moguće je pretvoriti u linearni sustav dimenzije $mn \times mn$ oblika

$$Px = e, \quad (2.3)$$

gdje je $P = (I_n \otimes A) + (B^T \otimes I_m) = B^T \oplus A$, te $x = \text{vec}(X)$ i $e = \text{vec}(E)$.

Ta pretvorba ne osigurava efikasnu metodu za rješavanje opće Sylvesterove jednadžbe jer je dobiveni sustav velike dimenzije (standardnim algoritmom rješava se u $\mathcal{O}(m^3n^3)$ elementarnih operacija, prostorna složenost je $\mathcal{O}(m^2n^2)$), ali daje nužan i dovoljan uvjet za postojanje jedinstvenog rješenja Sylvesterove jednadžbe. Naime, jednadžba (2.2) ima jedinstveno rješenje ako i samo ako jednadžba (2.3) ima jedinstveno rješenje, tj. ako i samo ako je P regularna matrica. Kako su prema Teoremu 1.3.1 svojstvene vrijednosti matrice P dane s $\lambda_i + \mu_j$, gdje su λ_i , $i = 1, \dots, m$ i μ_j , $j = 1, \dots, n$ svojstvene vrijednosti matrica A i B , redom, lako se dobiva sljedeći fundamentalni teorem o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja Sylvesterove jednadžbe.

Teorem 2.1.2. *Jednadžba (2.1) ima jedinstveno rješenje X ako i samo ako matrice A i $-B$ nemaju zajedničkih svojstvenih vrijednosti, odnosno ako je*

$$\lambda_i(A) + \lambda_j(B) \neq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

gdje su $\lambda_i(A)$, $i = 1, \dots, m$ i $\lambda_j(B)$, $j = 1, \dots, n$ svojstvene vrijednosti matrica A i B , redom.

Specijalno, iz Teorema 2.1.2 slijedi da Ljapunovljeva jednadžba (2.2) ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $\lambda_i(A) + \lambda_j(A) \neq 0$ za sve $i, j = 1, \dots, m$. Nadalje, lako se vidi da ako je X rješenje Ljapunovljeve jednadžbe (2.2), tada zbog $E = E^T$ odmah slijedi i da je X^T rješenje jednadžbe (2.2). To znači da u slučaju kad je rješenje jedinstveno također mora vrijediti i $X = X^T$, odnosno jedinstveno rješenje Ljapunovljeve jednadžbe je ujedno i simetrična matrica.

Primjedba 2.1.3. *Lako se vidi da je matrica P u sustavu (2.3) vrlo strukturirana matrica oblika*

$$P = \begin{bmatrix} A + b_{11}I & b_{21}I & \cdots & b_{n1}I \\ b_{12}I & A + b_{22}I & \cdots & b_{n2}I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n}I & b_{2n}I & \cdots & A + b_{nn}I \end{bmatrix},$$

te se jednadžba $Px = b$ može uz uvažavanje strukture riješiti i u manje od $\mathcal{O}(m^3n^3)$ operacija, osobito ako i matrice A i B imaju neku jednostavnu strukturu (primjerice ako su dijagonalne ili blok-dijagonalne s malim blokovima na glavnoj dijagonali).

U slučaju Sylvesterove jednadžbe koja ima jedinstveno rješenje za svaku desnu stranu E (npr. u kojoj su matrice A i B stabilne), jedinstveno rješenje može se eksplicitno zapisati.

Teorem 2.1.4. (Teorem 6, Poglavlje 10.18, [6]) Ako

$$X = - \int_0^\infty e^{At} E e^{Bt} dt. \quad (2.4)$$

postoji za svaku matricu E , tada je X jedinstveno rješenje jednadžbe $AX + XB = E$.

2.2 Osnovne metode za rješavanje Sylvesterove i Ljapunovljeve jednadžbe

Najčešće korištena direktna metoda za rješavanje Sylvesterove jednadžbe umjerene dimenzije je Bartels-Stewartova metoda (vidi [4]), dok se Hammarlingova metoda (vidi [30]) koristi za rješavanje Ljapunovljeve jednadžbe.

Osnovna ideja Bartels-Stewartovog algoritma za rješavanje Sylvesterove jednadžbe $AX + XB = E$ sadržana je u redukciji matrica A i B na Schurovu formu

$$Q_1^* A Q_1 = R_1 \text{ i } Q_2^* B Q_2 = R_2, \quad (2.5)$$

gdje su Q_1, Q_2 unitarne matrice a R_1, R_2 gornje trokutaste matrice.

Tada Sylvestrova jednadžba poprima oblik

$$R_1 \bar{X} + \bar{X} R_2 = \bar{E}, \text{ gdje je } \bar{X} = Q_1^* X Q_2, \bar{E} = Q_1^* E Q_2.$$

U svrhu rješavanja dobivene trokutaste jednadžbe, označimo

$$\bar{X} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n], \quad \bar{x}_i \in \mathbb{R}^m, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\bar{E} = [\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n], \quad \bar{e}_i \in \mathbb{R}^m, \quad i = 1, \dots, n,$$

te $R_1 = [r_{ij}^{(1)}], i, j = 1, \dots, m$ i $R_2 = [r_{ij}^{(2)}], i, j = 1, \dots, n$. Sada iz jednadžbe (2.5), izjednačavajući stupce s lijeve i desne strane, dobivamo n linearnih gornjetrokutastih

sustava

$$(R_1 + r_{kk}^{(2)}I)\bar{x}_k = \bar{e}_k - \sum_{i=1}^{k-1} r_{ik}^{(2)}\bar{x}_i, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.6)$$

koji se lako rješavaju redom koristeći supstitucije unatrag. Ako početna Sylvesterova jednadžba ima jedinstveno rješenje, tj. ako A i $-B$ nemaju zajedničkih svojstvenih vrijednosti, onda vrijedi $r_{ii}^{(1)} + r_{kk}^{(2)} \neq 0$, za sve $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$, odnosno svi sustavi iz (2.6) imaju jedinstveno rješenje.

Numerička složenost Bartels-Stewartovog algoritma je $\mathcal{O}(m^3 + n^3)$. Modifikacije Bartels-Stewartove metode dane su u [59, 77].

Hessenberg-Schurova¹ metoda (vidi [22]) pogodna je za rješavanje Sylvesterovih jednadžbi kod kojih je dimenzija od A puno veća nego dimenzija od B . Osnovna ideja je da se A reducira na Hessenbergovu, a B na Schurovu formu. Ako je A reda m a B reda n , složenost Hessenberg-Schurove metode prema [22] je približno $10/3m^3 + 26n^3 + 10m^2n + 5mn^2$. Ostale direktne metode za rješavanje Sylvesterove jednadžbe dane su u [3, 22].

Ljapunovljeva jednadžba, kao specijalni slučaj Sylvesterove jednadžbe može se rješavati bilo kojom metodom za rješavanje Sylvesterove jednadžbe. Primjerice, Bartels-Stewartova metoda primjenjena na Ljapunovljevu jednadžbu ima složenost $32n^3$ operacija (vidi [22]). Specijalizirana metoda za Ljapunovljevu jednadžbu koja je manje složenosti je Hammarlingova metoda, poznata još i pod nazivom metoda drugog korijena.

Neka je A stabilna matrica. Tada se koristeći (2.4) lako vidi da je rješenje Ljapunovljeve jednadžbe

$$AX + XA^* + CC^* = 0 \quad (2.7)$$

pozitivno semidefinitna matrica, pa se može zapisati kao $X = UU^*$, gdje je U gornje trokutasta matrica. Hammarlingova metoda je metoda koja računa U bez da se eksplicitno izračuna X .

Neka je $A = QRQ^*$ Shurova dekompozicija od A , $\bar{X} = Q^*XQ$, te $\bar{E} = Q^*EQ$, gdje je $E = -CC^*$ i $\bar{U} = Q^*UQ$. Partitionirajmo $\bar{X}$ na sljedeći način

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X_1 & x \\ x^* & x_{nn} \end{bmatrix}.$$

gdje je $X_1 \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}$, $x \in \mathbb{C}^{n-1}$, $x_{nn} \in \mathbb{C}$.

¹Hessenberg-Schurovu metodu godine 1979. predložili su autori G. Golub, S. Nash i C. Van Loan

Tada se $\bar{X}$ može faktorizirati na sljedeći način

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \hat{X}_1^{1/2} & \frac{1}{\sqrt{x_{nn}}}x \\ 0 & \sqrt{x_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_1^{1/2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x_{nn}}}x^* & \sqrt{x_{nn}} \end{bmatrix} =: \bar{U} \bar{U}^*,$$

gdje je $\hat{X}_1 = X_1 - \frac{1}{x_{nn}}xx^*$. Neka su matrice R i $\bar{E}$ particionirane u skladu s particijom od $\bar{X}$:

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & r \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \bar{E} = \begin{bmatrix} E_1 & e \\ e^* & e_{nn} \end{bmatrix},$$

gdje su $R_1, E_1 \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}$, $r, e \in \mathbb{C}^{n-1}$, $\lambda_n, e_{nn} \in \mathbb{C}$. Tada blokove od $\bar{U}$ možemo dobiti rješavajući sljedeće jednadžbe

$$\begin{aligned} (\lambda_n + \bar{\lambda}_n)x_{nn} &= e_{nn} \\ (R_1 + \bar{\lambda}_n I)x + x_{nn}r &= e \\ R_1 X_1 + X_1 R_1^* + rx^* + xr^* &= E_1. \end{aligned}$$

odnosno

$$x_{nn} = \frac{e_{nn}}{\lambda_n + \bar{\lambda}_n},$$

te

$$x = (R_1 + \bar{\lambda}_n I)^{-1}(e - x_{nn}r).$$

Time je određen zadnji stupac od $\bar{U}$. Ljapunovljeva jednadžba $R_1 X_1 + X_1 R_1^* = E_1 - rx^* - xr^*$ je jednadžba sa stabilnom matricom reda $n - 1$ i na nju se može opet primjeniti opisani postupak. Opisani postupak može se ponavljati sve dok se ne dođe do 1×1 jednadžbe. Na taj način u svakom koraku se dobiva po jedan stupac od $\bar{U}$.

Modifikacija Hammarlingove metode dana je u [59, 77].

Ako je matrica E u (2.1), odnosno (2.2) malog ranga i A, B velike rijetko popunjene matrice, onda se aproksimacija rješenja Sylvesterove, odnosno Ljapunovljeve može dobiti primjerice metodama baziranim na Krylovljevim potprostorima (vidi primjerice [33, 34, 35, 57]) ili *Alternating-Directional-Implicit* (ADI) metodom (vidi primjerice [8, 10, 40, 48, 71]).

Ukoliko je Sylvesterova, odnosno Ljapunovljeva jednadžba koju treba riješiti strukturirana, tada ima smisla prilagoditi neke od standardnih metoda za specijalnu strukturu i time postići znatnu uštedu broja računskih operacija potrebnih za računanje rješenja. U sljedeća dva poglavlja promatra se upravo problem rješavanja specijalno strukturiranih Sylvesterovih jednadžbi, kao i niza međusobno povezanih Sylvesterovih jednadžbi.

2.3 Neke primjene Sylvesterove i Ljapunovljeve jednadžbe

U ovom poglavlju dat ćemo pregled nekoliko standardnih matematičkih problema kod kojih se pojavljuje problem rješavanja, odnosno optimizacije rješenja strukturirane Sylvesterove (odnosno Ljapunovljeve) jednadžbe. Navedeni problemi bit će korišteni u numeričkim primjerima u kojima će biti ilustrirana učinkovitost i svojstva algoritama koji su konstruirani u disertaciji.

2.3.1 Neke primjene Sylvesterove, odnosno Ljapunovljeve jednadžbe u teoriji dinamičkih sustava

Kao što je rečeno u uvodu, pri proučavanju linearnih dinamičkih sustava često se pojavljuju Sylvesterove, odnosno Ljapunovljeve jednadžbe, kao i parametarski ovisne Sylvesterove i Ljapunovljeve jednadžbe.

Kontinuirani linearan vremenski invarijantan (LTI) dinamički sustav dan je sustavom linearnih diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \quad t \geq 0,\end{aligned}\tag{2.8}$$

gdje je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrica stanja sustava, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ulazna matrica i $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ matrica izlaza, te $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ matrica izravnog prijenosa. Matrice A, B, C, D vremenski su invarijantne matrice. Nadalje, $x(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ i $y(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ vektorske su funkcije stanja, ulaza i izlaza kojima je varijabla vrijeme.

Neka je A stabilna matrica². Tada se matrice

$$\mathcal{P} = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad \text{ i } \quad \mathcal{Q} = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

nazivaju gramijan upravljivosti (eng. *controllability gramian*), odnosno gramijan osmotrivosti (eng. *observability gramian*) sustava.

Može se pokazati (vidi [22]) da gramijan upravljivosti $\mathcal{P}$ zadovoljava Ljapunovljevu jednadžbu

$$A\mathcal{P} + \mathcal{P}A^T = -BB^T,$$

dok gramijan osmotrivosti $\mathcal{Q}$ zadovoljava Ljapunovljevu jednadžbu

$$\mathcal{Q}A + A^T \mathcal{Q} = -C^T C$$

²Matrica A je stabilna ili *Hurwitzova* ako sve svojstvene vrijednosti od A imaju negativan realan dio.

Unakrsni gramijan (eng. *cross gramian*) sustava kod kojeg je $m = p$ definiran je s

$$\mathcal{X} = \int_0^\infty e^{At} B C e^{At} dt,$$

a može se pokazati da je dan ujedno i kao rješenje Sylvesterove jednadžbe

$$A\mathcal{X} + \mathcal{X}A = -BC.$$

Problem iz teorije linearnih sustava opisan u nastavku vodi ka problemu rješavanja i optimizacije rješenja parametarski ovisne Ljapunovljeve jednadžbe, a odnosi se na optimizaciju viskoznosti prigušivača.

2.3.2 Problem prigušenja mehaničkih sustava

Prilikom proćavanja mehanićkih sustava, vrlo važan problem koji se javlja je analiza i predvićanje titranja sustava oko položaja ravnoteže koje se javlja kao odgovor na pomak sustava iz položaja ravnoteže. Titranje sustava ovisi o više parametara, pri ćemu važnu ulogu ima prigušenje. Prigušenje je proces disipacije (trošenja) energije sustava tijekom gibanja. Disipacija energije može ovisiti o brzini gibanja, o pomaku ili o oboje. Viskozno prigušenje je prigušenje proporcionalno brzini te se najćešće koristi u analizi titranja.

Matematićki model linearnog vibracijskog mehanićkog sustava dan je sustavom diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx &= 0, \\ x(0) &= x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Matrica mase M i matrica krutosti K su realne, simetrićne i pozitivno definitne matrice reda n . Realna simetrićna pozitivno definitna matrica matrica prigušenja D je oblika

$$D = C_u + C,$$

pri ćemu je C_u simetrićna pozitivno definitna matrica unutarnjeg prigušenja, a C simetrićna pozitivno semidefinitna matrica vanjskog prigušenja.

Općenito, ako nije drugaćije naglašeno, za matricu C_u pretpostavit ćemo da je proporcionalna s matricom kritićnog prigušenja C_{crit} , pri ćemu se za koeficijent proporcionalnosti

obično uzima 2% – 10% (vidi [47])³, tj.

$$C_u = \alpha C_{crit}, \quad (2.10)$$

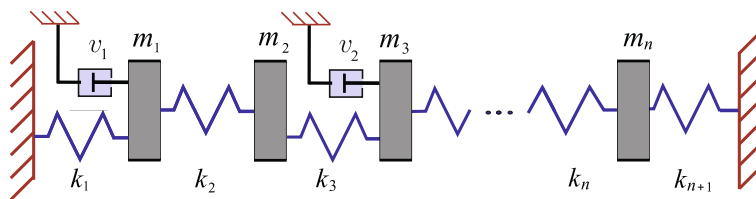
gdje je

$$C_{crit} = 2M^{1/2} \sqrt{M^{-1/2} K M^{-1/2}} M^{1/2}.$$

Matrica C je oblika

$$C = v_1 C_1 + \dots + v_r C_r,$$

gdje C_i ovise o geometriji prigušivača, a v_i su odgovarajuće viskoznosti, $i = 1, \dots, r$.



Slika 2.1: Oscilator s n masa i 2 prigušivača

Ilustrativni primjer takvog sustava je linearni harmonijski oscilator prikazan na Slici 2.1 s n masa, $n + 1$ opruga i dva prigušivača. Odgovarajuće matrice mase i krutosti dane su s

$$M = \text{diag}(m_1, \dots, m_n),$$

i

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ & & & -k_n & k_n + k_{n+1} \end{bmatrix}$$

gdje su $m_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ mase, a $k_i > 0$, $i = 1, \dots, n + 1$ konstante opruga.

Na pozicijama 1 i 3 nalaze se prigušivači viskoznosti v_1 i v_2 . To znači da je $D = C_u + v_1 e_1 e_1^T + v_2 e_3 e_3^T$, gdje je e_i i -ti kanonski vektor, a matrica C_u definirana je s (2.10).

Linearizacija sustava diferencijalnih jednadžbi (2.9) može se napraviti pomoću matrice Φ koja istovremeno dijagonalizira matrice M i K (vidi Teorem 1.3.3 c) u nastavku), odnosno

$$\Phi^T K \Phi = \Omega^2 \quad \text{i} \quad \Phi^T M \Phi = I,$$

³Kritično prigušenje je najmanje prigušenje pri kojem slobodno gibanje sustava, nastalo zbog početnog pomaka i/ili početne brzine, nema oscilirajući karakter.

gdje je $\Omega = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_n)$, pri čemu su $0 < \omega_1 \leq \dots \leq \omega_n$ takozvane neprigušene vlastite frekvencije sustava, odnosno svojstvene vrijednosti neprigušenog sustava $M\ddot{x} + Kx = 0$.

Uz supstituciju $x = \Phi x_\Phi$, jednadžba (2.9) ekvivalentna je jednadžbi

$$\ddot{x}_\Phi + \Phi^T D \Phi \dot{x}_\Phi + \Omega^2 x_\Phi = 0.$$

Definiramo li $y_1 = \Omega x_\Phi$ i $y_2 = \dot{x}_\Phi$, tada je

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \Omega y_2, \\ \dot{y}_2 &= \ddot{x}_\Phi = -\Phi^T D \Phi \dot{x}_\Phi - \Omega \Omega x_\Phi = -\Phi^T D \Phi y_2 - \Omega y_1. \end{aligned}$$

Sada se početna jednadžba (2.9) može zapisati u takozvanom faznom prostoru u obliku

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & -\Phi^T D \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

odnosno kao diferencijalna jednadžba prvoga reda

$$\dot{y} = Ay, \quad (2.12)$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & -\Phi^T D \Phi \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Rješenje jednadžbe (2.12) dano je s

$$y = e^{At} y_0, \quad \text{gdje } y_0 \text{ sadrži početne podatke.}$$

Vrlo važan problem koji se javlja pri proučavanju vibracijskih sustava je problem optimalnog prigušenja. Problem optimalnog prigušenja mehaničkog sustava opisanog jednadžbom (2.9) glasi: za danu matricu mase M i matricu krutosti K treba odrediti optimalnu matricu prigušenja D dozvoljenog oblika tako da je osigurano optimalno (s obzirom na neki dani kriterij) iščezavanje vibracija sustava, tj. optimalno iščezavanje u vremenu komponenti rješenja y (tj. x).

Čest optimizacijski kriterij koji se koristi za navedeni optimizacijski problem je kriterij minimalne spektralne apscise (vidi [26, 69]) tj.

$$\max_{\lambda \in \sigma(A)} \text{Re}(\lambda) \rightarrow \min$$

gdje je $\sigma(A) = \{z \in \mathbb{C} : \det(\lambda I - A) = 0\}$ spektar matrice A . Drugi korišteni kriterij vezan za spektar matrice A je

$$\max_{\lambda \in \sigma(A)} \frac{\operatorname{Re}(\lambda)}{|\lambda|} \rightarrow \min.$$

Nedostatak navedena dva kriterija je u nediferencijabilnosti funkcija koje je potrebno minimizirati.

Kriterij korišten primjerice u [11, 70, 46, 19, 63, 64, 65, 67] prevazilazi problem nediferencijabilnosti, a odnosi se na minimizaciju ukupne energije sustava, odnosno

$$\int_0^\infty E(t) dt \rightarrow \min, \quad (2.14)$$

pri čemu je ukupna energija sustava dana s

$$E(t; y_0) = \frac{1}{2} \dot{x}(t)^T M \dot{x}(t) + \frac{1}{2} \dot{x}(t)^T K \dot{x}(t) = \frac{1}{2} y(t)^T y(t).$$

Lako se vidi da kriterij (2.14) ovisi o početnim podacima y_0 . Da bi se prevladao taj nedostatak, obično se promatra usrednjenje jedinične ukupne energije po svim početnim položajima. Može se pokazati (vidi primjerice [46]) da je tako prilagođen kriterij ekvivalentan minimizaciji traga

$$\operatorname{tr}(X) \rightarrow \min \quad (2.15)$$

rješenja sustavu pripadne Ljapunovljeve jednadžbe

$$AX + XA^T = -Z, \quad (2.16)$$

gdje je A dana s (2.13), a matrica Z određuje koji dio neprigušenih svojstvenih frekvencija treba biti prigušen. Slučaj $Z = GG^T$ gdje je

$$G = \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

odgovara slučaju kada samo prvih s , ($s < n$) svojstvenih frekvencija neprigušenog sustava treba biti prigušeno. Specijalno, ako je $G = I$, tada se prigušuje sve svojstvene frekvencije (za više detalja o konstrukciji matrice Z pogledati [46]).

Prednost kriterija minimalnog traga u usporedbi s kriterijima iz prve skupine je u glatkoći funkcije trag. To omogućava minimizaciju koristeći standardne optimizacijske metode za diferencijabilne funkcije. Prednost algoritama za optimizaciju diferencijabilnih

funkcija u usporedbi s algoritmima za optimizaciju nediferencijabilnih funkcija je u manjem broju iteracija potrebnih za konvergenciju. U ovom slučaju to daje manji broj potrebnih rješavanja Sylvesterovih jednadžbi tijekom optimizacijskog procesa.

Problem optimalnog prigušenja harmonijskog oscilatora možemo rastaviti na dva optimizacijska problema: problem optimalnih viskoznosti prigušivača i problem optimalnih pozicija prigušivača.

Problem određivanja optimalne viskoznosti r prigušivača iste viskoznosti v , s obzirom na kriterij optimalnosti (2.15), svodi se na problem optimizacije rješenja parametarski ovisne Ljapunovljeve jednadžbe oblika

$$(A_0 - vC_1C_1^T)X(v) + X(v)(A_0 - vC_1C_1^T) = E,$$

gdje su

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & -\alpha\Omega \end{bmatrix}$$

i

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ C_0 \end{bmatrix}, \quad \text{gdje je } C_0 = \Phi^T[e_{i_1}, \dots, e_{i_r}]$$

i e_{i_k} je i_k -ti vektor kanonske baze.

Optimizacija se vrši s obzirom na parametar $v \in \mathbb{R}, v > 0$.

Problem određivanja optimalnih pozicija r prigušivača s obzirom na kriterij optimalnosti (2.15) također se svodi na problem optimizacije parametarski ovisne Ljapunovljeve jednadžbe oblika

$$(A_0 - vC_1(p)C_1(p)^T)X(p) + X(p)(A_0 - vC_1(p)C_1(p)^T)^T = E$$

pri čemu je $p \in \mathbb{R}^r$ vektor indeksa koji određuju pozicije prigušivača. Budući da je obično prigušivača mnogo manje nego pozicija, tj. $r \ll n$, matrica C_1 obično je matrica malog ranga.

Problem u kojemu se rješava mnogo Sylvesterovih jednadžbi od kojih se svaka može reprezentirati kao rezultat ažuriranja prethodne javlja se prilikom rješavanja algebarske Riccatijeve jednadžbe Newtonovom metodom.

2.3.3 Problem rješavanja algebarske Riccatijeve jednadžbe Newtonovom metodom

Nesimetrična algebarska Riccatijeva jednadžba je matrična jednadžba oblika

$$XCX - XD - AX + B = 0, \quad (2.17)$$

gdje su A, B, C, D realne matrice redom dimenzija $m \times m$, $m \times n$, $n \times m$ i $n \times n$. Specijalan slučaj kad je $D = A^T$ naziva se simetrična algebarska Riccatijeva jednadžba. Nužan i dovoljan uvjet da bi X bilo rješenje jednadžbe (2.17) glasi: X je rješenje jednadžbe (2.17) ako i samo ako vrijedi

$$\begin{bmatrix} D & -C \\ B & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} (D - CX),$$

odnosno ako i samo ako stupci od $\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$ razapinju invarijantan potprostor matrice

$$\begin{bmatrix} D & -C \\ B & -A \end{bmatrix} \quad (\text{vidi [25], Teorem 3.3}).$$

Jedna od osnovnih metoda za rješavanje algebarske Riccatijeve jednadžbe je Newtonova metoda. Neka je s $\mathcal{R}(X) = XCX - XD - AX + B$ dan standardni Riccatijev operator. Fréchetova derivacija od $\mathcal{R}$ u X dana je s

$$\mathcal{R}'_X(Z) = -((A - XC)Z + Z(D - CX)).$$

Newtonova metoda primjenjena na (2.17) generira niz matrica $(X^{(k)})$ definiran s $X^{(k+1)} = X^{(k)} - (\mathcal{R}'_{X^{(k)}})^{-1} \mathcal{R}(X^{(k)})$, odnosno rješenjem Sylvesterove jednadžbe

$$(A - X^{(k)}C)(X^{(k+1)} - X^{(k)}) + (X^{(k+1)} - X^{(k)})(D - CX^{(k)}) = \mathcal{R}(X^{(k)}),$$

ili jednostavnije

$$(A - X^{(k)}C)X^{(k+1)} + X^{(k+1)}(D - CX^{(k)}) = B - X^{(k)}CX^{(k)}.$$

Važnu specijalnu klasu Riccatijevih jednadžbi čine jednadžbe kod kojih je matrica

$$M = \begin{bmatrix} D & -C \\ -B & A \end{bmatrix}$$

regularna M -matrica ili singularna ireducibilna M -matrica.⁴ Takva jednadžba ima primjenu u teoriji transporta (eng. *transport theory*) i Markovljevim modelima (eng. *Markov models*), a rješenje od interesa je najmanje (po elementima) nenegativno rješenje (vidi [29, 9]). Egzistencija najmanjeg nenegativnog rješenja za ovu klasu dokazana je u [29]. Nadalje za ovu klasu Riccatijevih jednadžbi može se dokazati (vidi [29], Teorem 2.3) da niz matrica dobiven Newtonovom metodom s početnom aproksimacijom $X^{(0)} = 0$ konvergira ka minimalnom pozitivnom rješenju.

U prethodnom pregledu dane su samo neke od primjena Sylvesterove, odnosno Ljapunovljeve jednadžbe koje će biti detaljnije promatrane u disertaciji, osobito u numeričkim primjerima.

⁴Realna kvadratna matrica A naziva se Z -matrica ako su svi nedijagonalni elementi od A manji ili jednaki nula. Svaka Z -matrica A može se zapisati u obliku $sI - B$, gdje je B matrica s nenegativnim elementima. Z -matrica se naziva M -matrica ako je $s \geq \rho(B)$. Ako je $s = \rho(B)$, onda je M -matrica singularna, a ako je $s > \rho(B)$, onda je regularna.

Poglavlje 3

Sherman-Morrison-Woodbury-eva formula za Sylvesterovu jednadžbu

U ovom poglavlju izvedena je takozvana Sherman-Morrison-Woodbury-eva formula za rješenje Sylvesterove jednadžbe, kao i efikasna metoda za rješavanje Sylvesterove jednadžbe koristeći dobivenu formulu. Neka svojstva dobivenog algoritma ilustrirana su na numeričkim primjerima vezanim za problem rješavanja nesimetrične algebarske Riccati-jeve jednadžbe.

3.1 Sherman-Morrison-Woodbury-eva formula za Sylvesterovu jednadžbu

Promatramo Sylvesterovu jednadžbu oblika

$$(A_0 + U_1 C_1 V_1)X + X(B_0 + U_2 C_2 V_2) = E, \quad (3.1)$$

gdje su $A_0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $U_1, V_1^T \in \mathbb{R}^{m \times r_1}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{r_1 \times r_1}$, $B_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U_2, V_2^T \in \mathbb{R}^{n \times r_2}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{r_2 \times r_2}$ matrice, te $X, E \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

U ovom poglavlju bit će dana takozvana Sherman-Morrison-Woodbury-eva formula za Sylvesterovu jednadžbu (3.1). U tu svrhu neka su s

$$\mathcal{L}_0(X) = A_0 X + X B_0, \quad (3.2)$$

$$\mathcal{L}_{UCV}(X) = U_1 C_1 V_1 X + X U_2 C_2 V_2 \quad (3.3)$$

definirani standardni Sylvesterovi operatori. Lako se vidi da je Sylvesterova jednadžba (3.1) ekvivalentna jednadžbi

$$(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{UCV})(X) = E. \quad (3.4)$$

Stoga, ako $\mathcal{L}_0(X)$ definiran s (3.2) ima dani inverz ili se može lako invertirati i ako $\mathcal{L}_{UCV}$ iz (3.3) ima mali rang, onda bi bilo korisno za Sylvesterovu jednadžbu (3.1), odnosno (3.4) imati formulu tipa standardne Sherman-Morrison-Woodbury-jeve formule (vidi poglavlje 1.3).

Neka je $\mathcal{U}: \mathbb{R}^{r_1 \times n} \times \mathbb{R}^{m \times r_2} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ linearan operator definiran s

$$\mathcal{U}(X_1, X_2) = U_1 X_1 + X_2 V_2,$$

$\mathcal{C}: \mathbb{R}^{r_1 \times n} \times \mathbb{R}^{m \times r_2} \rightarrow \mathbb{R}^{r_1 \times n} \times \mathbb{R}^{m \times r_2}$ linearan operator definiran s

$$\mathcal{C}(X_1, X_2) = (C_1 X_1, X_2 C_2),$$

i neka je $\mathcal{V}: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{r_1 \times n} \times \mathbb{R}^{m \times r_2}$ linearan operator definiran s

$$\mathcal{V}(X) = (V_1 X, X U_2),$$

gdje su U_1, U_2, V_1, V_2 i C_1, C_2 matrice iz (3.1).

Lako se vidi da se Sylvesterov operator $\mathcal{L}_{UCV}(X)$ iz (3.3) može zapisati kao

$$\mathcal{L}_{UCV}(X) = (\mathcal{UCV})(X). \quad (3.5)$$

Sada koristeći (3.5), iz (3.4) slijedi da se početna Sylvesterova jednadžba (u operatorskom obliku) može zapisati kao

$$(\mathcal{L}_0 + \mathcal{UCV})(X) = E. \quad (3.6)$$

Primjenimo li na (3.6) standardnu Sherman-Morrison-Woodbury-jevu formulu (vidi Teorem 1.3.2), dobivamo

$$X = (\mathcal{L}_0^{-1} - \mathcal{L}_0^{-1} \mathcal{U} (\mathcal{C}^{-1} + \mathcal{V} \mathcal{L}_0^{-1} \mathcal{U})^{-1} \mathcal{V} \mathcal{L}_0^{-1})(E). \quad (3.7)$$

U sljedećem teoremu dan je matrični oblik jednakosti (3.7).

Teorem 3.1.1. *Neka su $\mathbb{L}_0, \mathbb{U}, \mathbb{C}$ i $\mathbb{V}$ definirane matrice*

$$\mathbb{L}_0 = I_n \otimes A_0 + B_0^T \otimes I_m \in \mathbb{R}^{mn \times mn}, \quad (3.8)$$

$$\mathbb{U} = \begin{bmatrix} I_n \otimes U_1 & V_2^T \otimes I_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn \times (r_1 n + r_2 m)}, \quad (3.9)$$

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} I_n \otimes C_1 & 0 \\ 0 & C_2^T \otimes I_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(r_1 n + r_2 m) \times (r_1 n + r_2 m)}, \quad (3.10)$$

$$\mathbb{V} = \begin{bmatrix} I_n \otimes V_1 \\ U_2^T \otimes I_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(r_1 n + r_2 m) \times mn}, \quad (3.11)$$

gdje su A_0, B_0 i $U_1, U_2, C_1, C_2, V_1, V_2$ matrice iz (3.1). Ako su matrice $\mathbb{C}, \mathbb{L}_0$ i $\mathbb{L}_0 + \mathbb{UCV}$ regularne, tada za rješenje jednadžbe (3.1) vrijedi

$$\text{vec}(X) = (\mathbb{L}_0^{-1} - \mathbb{L}_0^{-1} \mathbb{U} (\mathbb{C}^{-1} + \mathbb{V} \mathbb{L}_0^{-1} \mathbb{U})^{-1} \mathbb{V} \mathbb{L}_0^{-1}) \text{vec}(E). \quad (3.12)$$

Dokaz.

Koristeći Kroneckerov produkt i operator vektorizacije sa svojstvima (1.8) i (1.9), jednadžba (3.1) može se zapisati kao $mn \times mn$ linearna matična jednadžba

$$(I_n \otimes (A_0 + U_1 C_1 V_1) + (B_0 + U_2 C_2 V_2)^T \otimes I_m) \text{vec}(X) = \text{vec}(E).$$

Iz gornje jednadžbe se lako vidi da jednadžba (3.1) ima sljedeći matični prikaz:

$$(\mathbb{L}_0 + \mathbb{UCV}) \text{vec}(X) = \text{vec}(E),$$

što ujedno i predstavlja matični zapis jednakosti (3.4). Nakon primjene Sherman-Morrison-Woodbury-jeve formule (vidi Teorem 1.3.2) na matricu prethodnog sustava, dobivamo

$$\begin{aligned} \text{vec}(X) &= (\mathbb{L}_0 + \mathbb{UCV})^{-1} \text{vec}(E) \\ &= (\mathbb{L}_0^{-1} - \mathbb{L}_0^{-1} \mathbb{U} (\mathbb{C}^{-1} + \mathbb{V} \mathbb{L}_0^{-1} \mathbb{U})^{-1} \mathbb{V} \mathbb{L}_0^{-1}) \text{vec}(E). \end{aligned}$$

□

Primjetimo da su $\mathbb{L}_0, \mathbb{U}, \mathbb{C}$ i $\mathbb{V}$ upravo matrice operatora $\mathcal{L}_0, \mathcal{U}, \mathcal{C}$ i $\mathcal{V}$ u standardnoj bazi, te da je jednakost (3.12) matična verzija jednakosti (3.7).

Primjedba 3.1.2. *Kada ne bismo imali pretpostavku da je matrica $\mathbb{C}$ iz (3.10) regularna ili kada $\mathbb{C}$ ne bi čak niti bila kvadratna matrica, slično razmatranje kao u prethodnom teoremu bismo mogli provesti koristeći formule (1.13)-(1.18). Preciznije, promatramo Sylvesterovu jednadžbu $(A_0 + U_1 C_1 V_1)X + X(B_0 + U_2 C_2 V_2) = E$, pri čemu su C_1 i C_2 redom dimenzija $r_1 \times s_1$ i $r_2 \times s_2$, odnosno matrica $\mathbb{C}$ iz (3.10) je pravokutna matrica*

dimenzije $(nr_1 + ms_2) \times (ns_1 + mr_2)$. U tom slučaju analogone formule (3.12) dobivamo iz formula (1.13)-(1.18):

$$\begin{aligned} \text{vec}(X) &= (\mathbb{L}_0^{-1} - (I + \mathbb{L}_0^{-1}UCV)^{-1}\mathbb{L}_0^{-1}UCV\mathbb{L}_0^{-1}) \text{vec}(E) \\ \text{vec}(X) &= (\mathbb{L}_0^{-1} - \mathbb{L}_0^{-1}(I + UC\mathbb{V}\mathbb{L}_0^{-1})^{-1}UC\mathbb{V}\mathbb{L}_0^{-1}) \text{vec}(E) \\ \text{vec}(X) &= (\mathbb{L}_0^{-1} - \mathbb{L}_0^{-1}U(I + C\mathbb{V}\mathbb{L}_0^{-1}U)^{-1}C\mathbb{V}\mathbb{L}_0^{-1}) \text{vec}(E) \\ \text{vec}(X) &= (\mathbb{L}_0^{-1} - \mathbb{L}_0^{-1}UC(I + \mathbb{V}\mathbb{L}_0^{-1}UC)^{-1}\mathbb{V}\mathbb{L}_0^{-1}) \text{vec}(E) \\ \text{vec}(X) &= (\mathbb{L}_0^{-1} - \mathbb{L}_0^{-1}UCV(I + \mathbb{L}_0^{-1}UCV)^{-1}\mathbb{L}_0^{-1}) \text{vec}(E) \\ \text{vec}(X) &= (\mathbb{L}_0^{-1} - \mathbb{L}_0^{-1}UC\mathbb{V}\mathbb{L}_0^{-1}(I + UC\mathbb{V}\mathbb{L}_0^{-1})^{-1}) \text{vec}(E). \end{aligned}$$

3.2 Algoritam za rješavanje Sylvesterove jednadžbe koristeći S-M-W formulu

Izravno računanje rješenja Sylvesterove jednadžbe (3.1) koristeći formulu (3.12) je složenosti $\mathcal{O}(m^3n^3)$ operacija. Kako su matrice u jednakosti (3.12) specijalno strukturirane, iskorištavanjem strukture moguće je postići vrlo efikasno računanje matrice X .

U Algoritmu 3 dana je osnovna procedura za računanje rješenja Sylvesterove jednadžbe (3.1) koristeći formulu (3.12).

Algoritam 3 Osnovna procedura za računanje rješenja Sylvesterove jednadžbe (3.1) koristeći Sherman-Morrison-Woodbury-jevu formulu (3.12)

Ulaz: $A_0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $U_1, V_1^T \in \mathbb{R}^{m \times r_1}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{r_1 \times r_1}$, $B_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U_2, V_2^T \in \mathbb{R}^{n \times r_2}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{r_2 \times r_2}$, $E \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Izlaz: Rješenje $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ jednadžbe (3.1)

- 1: Riješiti sustav $\mathbb{L}_0 x_1 = \text{vec}(E)$
 - 2: Izračunati $x_2 = \mathbb{V}x_1$
 - 3: Riješiti $(\mathbb{C}^{-1} + \mathbb{V}\mathbb{L}_0^{-1}U)x_3 = x_2$
 - 4: Izračunati $x_4 = Ux_3$
 - 5: Riješiti $\mathbb{L}_0 x_5 = x_4$
 - 6: $\text{vec}(X) = x_1 - x_5$
-

Osnovni dijelovi koji se trebaju izračunati u Algoritmu 3 su produkti matrica $\mathbb{L}_0^{-1}$, U , $\mathbb{V}$ i $(\mathbb{C}^{-1} + \mathbb{V}\mathbb{L}_0^{-1}U)^{-1}$ s vektorima. Stoga efikasnost cijelog algoritma uvelike ovisi o efikasnosti procedura za navedene produkte.

Izgradimo sada procedure za računanje pojedinih koraka u Algoritmu 3.

Ako $\mathbb{L}_0^{-1}$ nije unaprijed dano, tada je za korake 1 i 5 potrebna procedura za efikasno računanje $x = \mathbb{L}_0^{-1}y$, odnosno rješavanje sustava $\mathbb{L}_0 x = y$ s $\mathbb{L}_0$ iz (3.8). Koristeći svojstva (1.8) i (1.9) operatora vektorizacije, lako se vidi da je rješavanje sustava $\mathbb{L}_0 x = y$

ekvivalentno rješavanju Sylvesterove jednadžbe

$$A_0 \hat{X} + \hat{X} B_0 = \hat{Y}, \quad (3.13)$$

gdje je $\text{vec}(\hat{X}) = x$ i $\text{vec}(\hat{Y}) = y$. Složenost rješavanje te jednadžbe s algoritmima baziranim na Schurovoj dekompoziciji (kao primjerice Bartels-Stewartov algoritam) bez pretpostavljene strukture matrica A_0 i B_0 je $\mathcal{O}(n^3 + m^3)$. Ako A_0 i B_0 ipak imaju neku pogodnu strukturu, broj operacija potreban za rješavanje jednadžbe (3.13) može biti značajno reduciran. Primjerice, ako su A_0 i B_0 blok dijagonalne matrice s malim blokovima na dijagonali, složenost je $\mathcal{O}(m^2)$ ili $\mathcal{O}(n^2)$ operacija.

U ilustrativnim primjerima koristit ćemo Sylvesterovu jednadžbu s blok dijagonalnim matricama s 2×2 blokovima na dijagonali, te ćemo iz tog razloga jednu standardnu metodu za rješavanje Sylvesterove jednadžbe prilagoditi za efikasno rješavanje tako strukturirane jednadžbe.

Algoritam 4 modifikacija je *2-solve scheme* za opću Sylvestervu jednadžbu (vidi [59]) koja je prilagođena za slučaj blok dijagonalnih matrica s 2×2 blokovima i ima složenost $8mn$ elementarnih operacija.

Algoritam 4 *2-solve scheme* za Sylvesterovu jednadžbu $A_0 \hat{X} + \hat{X} B_0 = \hat{Y}$, gdje su A_0, B_0 blok dijagonalne matrice s 2×2 blokovima na glavnoj dijagonali.

Ulaz: $A_0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ blok dijagonalne s 2×2 blokovima na glavnoj dijagonali, $\hat{Y} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Izlaz: Rješenje $\hat{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ jednadžbe (3.13)

while $j < n + 1$ **do**

(a) $r_{11} = B_0(j, j)$, $r_{12} = B_0(j, j + 1)$,
 $r_{21} = B_0(j + 1, j)$, $r_{22} = B_0(j + 1, j + 1)$,
 $y = \hat{Y}(:, j : j + 1)$

(b) Riješiti linearne jednadžbe
 $(A_0^2 + (r_{11} + r_{22})A_0 + (r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21})I)x = y$
 Postaviti $\hat{X}(:, j + 1) = x$

(c) Postaviti $j = j + 2$

end while

Množenje matrica $\mathbb{U}$ i $\mathbb{V}$ vektorima $x \in \mathbb{R}^{r_1 n + r_2 m}$ i $y \in \mathbb{R}^{mn}$ u koracima 2 i 4 može se izvršiti na sljedeći način:

$$\mathbb{U}x = \begin{bmatrix} I_n \otimes U_1 & V_2^T \otimes I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{vec}(\hat{X}_1) \\ \text{vec}(\hat{X}_2) \end{bmatrix} = \text{vec}(U_1 \hat{X}_1 + \hat{X}_2 V_2), \quad (3.14)$$

gdje je $\hat{X}_1 \in \mathbb{R}^{r_1 \times n}$, $\text{vec}(\hat{X}_1) = x(1 : r_1 n)$ i $\hat{X}_2 \in \mathbb{R}^{m \times r_2}$, $\text{vec}(\hat{X}_2) = x(r_1 n + 1 : r_1 n + r_2 m)$, te

$$\begin{aligned} \mathbb{V}y &= \begin{bmatrix} I_n \otimes V_1 \\ U_2^T \otimes I_m \end{bmatrix} \text{vec}(\hat{Y}) \\ &= \begin{bmatrix} (I_n \otimes V_1) \text{vec}(\hat{Y}) \\ (U_2^T \otimes I_m) \text{vec}(\hat{Y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{vec}(V_1 \hat{Y}) \\ \text{vec}(\hat{Y} U_2) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

gdje je $\hat{Y} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{vec}(\hat{Y}) = y$.

Lako se može vidjeti da je broj računskih operacija koji je potreban za računanje produkta $\mathbb{U}x$ i $\mathbb{V}y$ jednak $2mn(r_1 + r_2)$ za svaki.

Za korak 3 općenito je potrebno formirati matricu $\Delta := \mathbb{V}\mathbb{L}_0^{-1}\mathbb{U}$. Matrice $\mathbb{U}, \mathbb{V}$ imaju $mn(r_1 n + r_2 m)$ elemenata, a matrica $\mathbb{L}_0$ ima $m^2 n^2$ elemenata. To znači da ih za veće m i n ne možemo pomnožiti izravno, nego trebamo proceduru za formiranje matrice Δ bez formiranja matrica $\mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{L}_0^{-1}$ i njihovog direktnog množenja.

Svaki stupac produkta $\mathbb{L}_0^{-1}\mathbb{U}$, odnosno vektor $\text{vec}(\hat{X}_i) := \mathbb{L}_0^{-1}\mathbb{U}(:, i)$ prema (3.13) može se dobiti kao rješenje jednadžbe

$$A_0 \hat{X}_i + \hat{X}_i B_0 = \hat{U}_i, \quad (3.16)$$

gdje je $\text{vec}(\hat{U}_i) = \mathbb{U}(:, i)$, $i = 1, \dots, r_1 n + r_2 m$.

Nadalje, množenje matricom $\mathbb{V}$ može se izvršiti na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \Delta &= \mathbb{V} \begin{bmatrix} \text{vec}(\hat{X}_1) & \text{vec}(\hat{X}_2) & \cdots & \text{vec}(\hat{X}_{r_1 n + r_2 m}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \text{vec}(V_1 \hat{X}_1) & \text{vec}(V_1 \hat{X}_2) & \cdots & \text{vec}(V_1 \hat{X}_{r_1 n + r_2 m}) \\ \text{vec}(\hat{X}_1 U_2) & \text{vec}(\hat{X}_2 U_2) & \cdots & \text{vec}(\hat{X}_{r_1 n + r_2 m} U_2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ako s N označimo broj operacija potrebnih za rješavanje jednadžbe (3.16), onda je ukupan broj operacija potrebnih za formiranje matrice Δ jednak $(2mn(r_1 + r_2) + N)(r_1 n + r_2 m)$ (radi jednostavnosti, ako je $m = n$ i $r_1 = r_2 =: r$ onda je broj operacija jednak $8m^3 r^2 + 2rmN$). Ako su A_0 i B_0 specijalne blok strukture s 2×2 blokovima na dijagonali, onda se svaki $\hat{X}_i$ može izračunati u $8mn$ operacija, pa je broj operacija potrebnih da se formira matrica Δ jednak $2mn(r_1 n + r_2 m)(4 + r_1 + r_2)$ (odnosno za $m = n$ i $r_1 = r_2 = r$ broj potrebnih operacija je $8m^3 r(r + 2)$).

Algoritam 3 moguće je izvršiti i bez formiranja matrice Δ . Ako se sustav s matricom $(\mathbb{C}^{-1} + \Delta)$ rješava metodama baziranim na Krylovljevim potprostorima, dovoljna je samo procedura koja daje produkt matrice sustava s vektorom. Takav primjer bit će promatran u Poglavlju 4.

Primjedba 3.2.1. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je u jednadžbi (3.1) $C_1 = I_{r_1}$ i $C_2 = I_{r_2}$. Ako nije, definiramo $V'_1 := C_1 V_1$ i $V'_2 := C_2 V_2$ i promatramo ekvivalentnu jednadžbu $(A_0 + U_1 V'_1)X + X(B_0 + U_2 V'_2) = E$. Pripadna matrica $\mathbb{C}$ iz 3.10 tada je jedinična matrica.

3.3 Primjena

U ovom poglavlju opisani su ilustrativni problemi u kojima jednakost (3.12) može značajno utjecati na složenost algoritama za rješavanje tih problema. Formula (3.12) za rješavanje jednadžbe (3.1) primjenjiva je u problemima u kojima se jednadžba (3.1) rješava više puta s različitim matricama ažuriranja $U_1, C_1, V_1, U_2, C_2, V_2$ pri čemu je, da bi algoritam bio učinkovit, potrebno da neki dio matrica ažuriranja bude konstantan kroz iteracije i/ili da su izrazito jednostavnog oblika.

Jedan takav tip problema javlja se pri računanju i optimizaciji rješenja parametarski ovisne Sylvesterove jednadžbe

$$(A_0 - vU_1V_1)X(v) + X(v)(B_0 - vU_2V_2) = E.$$

Parametarski ovisna Sylvesterova jednadžba može se pojaviti u bilo kojem problemu u kojemu se javlja Sylvesterova jednadžba, Primjerice, kao što smo već spomenuli, Sylvesterova jednadžba javlja se pri računanju unakrsnog gramijana sustava

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

Unakrsni gramijan X kvadratnog sustava dan je s

$$X = \int_0^\infty e^{At} B C e^{At} dt, \quad (3.18)$$

ili ekvivalentno kao rješenje Sylvesterove jednadžbe

$$AX + XA = -BC. \quad (3.19)$$

Ako pretpostavimo da je A oblika $A \equiv A_0 - vC_1C_2^T$, gdje je $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{n \times r}$, tada je jednadžba (3.19) parametarski ovisna Sylvesterova jednadžba pogodnog oblika za primjenu Algoritma 3.

Nadalje, problem rješavanja parametarski ovisne Ljapunovljeve jednadžbe vezan je za računanje energije mehaničkog sustava s obzirom na različite vrijednosti viskoznosti prigušivača. Navedeni problem opširnije će se razmatrati u Poglavlju 4.

Drugi tip problema u kojemu se prave mnoga ažuriranja Sylvesterove jednadžbe koji su malog ranga je generalizacija problema rješavanja jedne specijalne nesimetrične Riccatijeve jednadžbe koja dolazi iz teorije transporta, a koja je promatrana u [9, 43].¹

Preciznije, promatramo problem rješavanja nesimetrične algebarske Riccatijeve jednadžbe

$$XCX - XE - AX + B = 0, \quad (3.20)$$

gdje su A, B, C, E realne matrice reda n oblika

$$A = A_0 - \tilde{e}q^T, \quad B = \tilde{e}e^T, \quad C = \tilde{q}q^T, \quad E = B_0 - \tilde{q}e^T, \quad (3.21)$$

gdje su A_0 i B_0 matrice jednostavnog oblika. U radovima [43, 9] promatran je prethodni problem s dijagonalnim matricama A_0, B_0 , te nenegativnim vektorima $q, \tilde{q}, e, \tilde{e}$. Značenje elemenata u matricama i vektorima u navedenom problemu može se vidjeti u [36]. Rješenje od interesa je minimalno pozitivno rješenje navedene jednadžbe. U radu [43] dana je eksplicitna formula za minimalno pozitivno rješenje, dok je u [9] dan algoritam baziran na Newtonovoj metodi za Riccatijevu jednadžbu.

Newtonova metoda primjenjena na (3.20) generira niz matrica $(X^{(k+1)})$ definiran rješenjem Sylvesterove jednadžbe

$$(X^{(k+1)} - X^{(k)})(E - CX^{(k)}) + (A - X^{(k)}C)(X^{(k+1)} - X^{(k)}) = \mathcal{R}(X^{(k)}), \quad (3.22)$$

gdje je $\mathcal{R}(X) = XCX - XE - AX + B$ standardni Riccatijev operator. Uvjet pod kojim tako dobiveni niz matrica s početnom aproksimacijom $X^{(0)} = 0$ konvergira ka minimalnom pozitivnom rješenju je da je matrica

$$M = \begin{bmatrix} E & -C \\ -B & A \end{bmatrix}$$

regularna M -matrica ili ireducibilna singularna M -matrica (vidi Poglavlje 2.3.3).

Koristeći rezultate iz prethodnog poglavlja, jednadžba (3.22) s matricama oblika (3.21) može se zapisati u obliku

$$(\mathbb{L}_0 - \mathbb{U}^{(k)}\mathbb{V}) \operatorname{vec}(X^{(k+1)} - X^{(k)}) = \operatorname{vec}(\mathcal{R}(X^{(k)}))$$

¹Zahvaljujem se Federicu Poloniju koji mi je tijekom Summer School on Numerical Linear Algebra for Dynamical and High-Dimensional Problems, Trogir, 2011 ukazao na ovaj zanimljivi problem.

gdje je

$$\mathbb{L}_0 = I_n \otimes A_0 + B_0^T \otimes I_n, \quad (3.23)$$

$$\mathbb{U}^{(k)} = \begin{bmatrix} I_n \otimes (\tilde{e} + X^{(k)} \tilde{q}) & (e^T - q^T X^{(k)})^T \otimes I_n \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

$$\mathbb{V} = \begin{bmatrix} I_n \otimes q^T \\ \tilde{q}^T \otimes I_n \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Sada koristeći Sherman-Morrison-Woodbury-jevu formulu slijedi da je

$$\text{vec}(X^{(k+1)} - X^{(k)}) = (\mathbb{L}_0^{-1} + \mathbb{L}_0^{-1} \mathbb{U}^{(k)} (I_{2n} + \mathbb{V} \mathbb{L}_0^{-1} \mathbb{U}^{(k)})^{-1} \mathbb{V} \mathbb{L}_0^{-1}) \text{vec}(\mathcal{R}(X^{(k)})). \quad (3.26)$$

Za dijagonalne matrice A_0, B_0 u [9] predložena je procedura za računanje $X^{(k+1)}$ koja koristi brze Gaussove eliminacije prilagođene za sustav s matricama $(I_{2n} + \mathbb{V} \mathbb{L}_0^{-1} \mathbb{U}^{(k)})$ i ima složenost $\mathcal{O}(n^2)$ elementarnih operacija (vidi [9]) po iteraciji Newtonovog procesa.

Koristeći FOM metodu, efikasnija metoda može se postići i za nedijagonalne A_0, B_0 (primjerice blok dijagonalne s malim blokovima na dijagonali). Također je moguće sličnu efikasnost postići i ako umjesto vektora $q, \tilde{q}, e, \tilde{e}$ promatramo matrice s malo stupaca.

Primjer 1. U ovom primjeru bit će ilustrirana svojstva Newtonove metode za rješavanje (3.20) implementirane na dva različita načina. Prvi pristup, označen sa **standard**, koristi standardnu Bartels-Stewart-ovu metodu za rješavanje jednadžbe (3.22). Drugi pristup, označen s **SMW**, za rješavanje Sylvesterove jednadžbe (3.22) koristi formulu (3.26). U drugom pristupu sustav s matricom $(I_{2n} - \mathbb{V} \mathbb{L}_0^{-1} \mathbb{U}^{(k)})$ bit će rješavan standardnim Gaussovim eliminacijama (oznaka **SMW-exact**) i FOM metodom (oznaka **SMW-approx**). Na ilustrativnom primjeru usporedit ćemo točnost i složenost opisanih procedura.

Promatramo jednadžbu (3.20), pri čemu su A_0, B_0 dijagonalne matrice s 2×2 blokovima na dijagonali definiranim s

$$A_0(2i-1:2i, 2i-1:2i) = i \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n/2$$

$$B_0(2i-1:2i, 2i-1:2i) = 2^{\frac{-i}{5}} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n/2$$

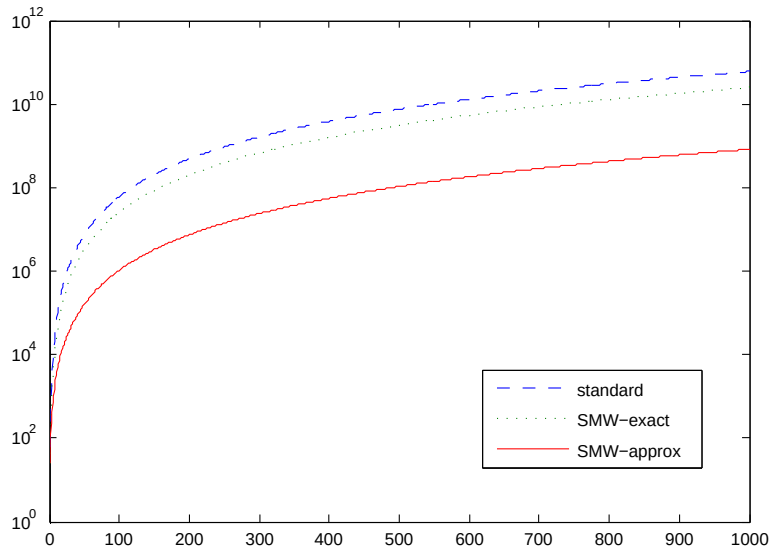
i $q^T = 1:n$, $\tilde{q} = -\text{rand}(n, 1)$, $e = \text{ones}(n, 1)$, $\tilde{e} = \text{rand}(n, 1)$.

Reziduali r_S, r_E, r_A , odnosno $\|XCX - XE - AX + B\|$ gdje je X dobiven metodama **standard**, **SMW-exact** i **SMW-approx**, dani su u Tablici 3.1. U stupcu **SMW-approx**, k označava dimenziju Krylovljevog potprostora u FOM-u. U svim pristupima reziduali su računati nakon deset koraka Newtonove metode.

Dimenzija	Rezidual u standard	Rezidual u SMW-exact	Rezidual u SMW-approx
$n = 100$	$r_S = 3 \cdot 10^{-13}$	$r_E = 2.2 \cdot 10^{-14}$	$k = 8, r_A = 1.7 \cdot 10^{-14}$ $k = 5, r_A = 1.1 \cdot 10^{-11}$
$n = 200$	$r_S = 4.6 \cdot 10^{-13}$	$r_E = 6.2 \cdot 10^{-14}$	$k = 10, r_A = 5.9 \cdot 10^{-14}$ $k = 5, r_A = 2.9 \cdot 10^{-10}$
$n = 400$	$r_S = 1.5 \cdot 10^{-12}$	$r_E = 9.1 \cdot 10^{-14}$	$k = 12, r_A = 8.3 \cdot 10^{-14}$ $k = 6, r_A = 7.2 \cdot 10^{-12}$

Tablica 3.1: Rezultati usporedbe točnosti za pristupe **standard**, **SMW-exact** i **SMW-approx**

Na Slici 3.1 prikazan je rast broja elementarnih operacija ovisno o dimenziji problema za jedan korak Newtonove metode s **standard**, **SMW-exact** i **SMW-approx** pristupima (pri čemu je za k uzeto $n/10$).



Slika 3.1: Rast broja elementarnih operacija za pristupe **standard**, **SMW-exact** i **SMW-approx**

Poglavlje 4

Optimizacija rješenja parametarski ovisne Sylvesterove jednadžbe

4.1 Uvod

U ovom poglavlju bit će prikazan novi algoritam za optimizaciju rješenja parametarski ovisne Sylvesterove jednadžbe

$$(A_0 - vU_1V_1)X(v) + X(v)(B_0 - vU_2V_2) = E,$$

gdje je $v \in \mathbb{R}$, a $A_0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U_1, V_1^T \in \mathbb{R}^{m \times r_1}$, $U_2, V_2^T \in \mathbb{R}^{n \times r_2}$ matrice, te nepoznata matrica X i desna strana E su $X, E \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Optimizacija će se vršiti po parametru $v \in S$, $S \subseteq \mathbb{R}$ s obzirom na dva različita kriterija: kriterij minimalnog traga od $X(v)$ i kriterij minimalne Frobeniusove norme od $X(v)$. Kriterij minimalnog traga može se primjeniti samo u slučaju $m = n$, dok je kriterij minimalne Frobeniusove norme primjenjiv i u slučaju $m \neq n$.

Novi algoritam koji će biti predstavljen počinje je i poboljšanje algoritma iz [63], gdje je promatran problem optimizacije traga rješenja parametarski ovisne Ljapunovljeve jednadžbe. Rezultati iz [63] poboljšani su s tri aspekta. Prvo, umjesto Ljapunovljeve jednadžbe, novi algoritam rješava Sylvesterovu jednadžbu. Također, dodana je i procedura za optimizaciju s obzirom na Frobeniusovu normu. Treće poboljšanje odnosi se na vrlo značajnu uštedu u broju operacija, te uspješno prevladavanje poteškoća algoritma iz [63] koje su uzrokovale neupotrebljivost tog algoritma u slučaju problema većih dimenzija.

Novi algoritam može se koristiti primjerice pri problemu optimizacije viskoznosti prigušivača mehaničkih sustava, kao i u svim problemima koji zahtijevaju rješavanje parametarski ovisne Sylvesterove jednadžbe navedenog oblika.

4.2 Algoritam za računanje rješenja parametarski ovisne Sylvesterove jednadžbe

Promatramo parametarski ovisnu Sylvesterovu jednadžbu

$$(A_0 - vU_1V_1)X + X(B_0 - vU_2V_2) = E, \quad (4.1)$$

gdje su $v \in S \subseteq \mathbb{R}$, $A_0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U_1, V_1^T \in \mathbb{R}^{m \times r_1}$, $U_2, V_2^T \in \mathbb{R}^{n \times r_2}$ matrice, te nepoznata matrica X i desna strana E su $X, E \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Nadalje pretpostavljamo da jednadžba (4.1) ima jedinstveno rješenje za svaki $v \in S \subseteq \mathbb{R}$, odnosno da za svaki $v \in S$ vrijedi da matrice $A(v) \equiv A_0 - vU_1V_1$ i $-B(v) \equiv -(B_0 - vU_2V_2)$ nemaju zajedničkih svojstvenih vrijednosti (vidi Teorem 2.1.2).

Primjedba 4.2.1. *Primjerice, jedan od slučajeva kada $A(v) \equiv A_0 - vU_1V_1$ i $-B(v) \equiv -(B_0 - vU_2V_2)$ zadovoljavaju uvjet da nemaju zajedničkih svojstvenih vrijednosti je u slučaju kad su A_0 i B_0 stabilne matrice, $U_1 = V_1$, $U_2 = V_2$ i $v \in \mathbb{R}_+$.*

Koristeći rezultate iz prethodnog poglavlja i Teorem 3.1.1, dobivamo da je rješenje jednadžbe (4.1) dano s

$$\text{vec}(X(v)) = (\mathbb{L}_0^{-1} + v\mathbb{L}_0^{-1}\mathbb{U}(I - v\Delta)^{-1}\mathbb{V}\mathbb{L}_0^{-1}) \text{vec}(E), \quad (4.2)$$

gdje je

$$\mathbb{L}_0 = I_n \otimes A_0 + B_0^T \otimes I_m \in \mathbb{R}^{nm \times nm}, \quad (4.3)$$

$$\mathbb{U} = \begin{bmatrix} I_n \otimes U_1 & V_2^T \otimes I_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nm \times (r_1n + r_2m)}, \quad (4.4)$$

$$\mathbb{V}^T = \begin{bmatrix} I_n \otimes V_1^T & U_2 \otimes I_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nm \times (r_1n + r_2m)},$$

te

$$\Delta = \mathbb{V}\mathbb{L}_0^{-1}\mathbb{U}. \quad (4.5)$$

Primjedba 4.2.2. *Primjetimo da je jednadžba (4.1) ekvivalentna jednadžbi*

$$(\mathbb{L}_0 - v\mathbb{U}\mathbb{V}) \text{vec}(X) = \text{vec}(E).$$

To znači da pretpostavka da (4.1) ima jedinstveno rješenje za svaki $v \in S$ povlači da je matrica $(\mathbb{L}_0 - v\mathbb{U}\mathbb{V})$ regularna za svaki $v \in S$. Specijalno, ako je $0 \in S$, slučaj $v = 0$

implicira da je $i \mathbb{L}_0$ regularna matrica. Nadalje, iz regularnosti matrica $\mathbb{L}_0$ i $\mathbb{L}_0 - v\mathbb{U}\mathbb{V}$, izravno slijedi i regularnost matrice $I - v\Delta$ za svaki $v \in \mathbb{R}$, te u konačnici svi inverzi koji se pojavljuju u (4.2) postoje.

4.2.1 Efikasno računanje $\text{vec}(X(v))$

Da bismo efikasno izračunali $X(v)$, potrebno je imati efikasne procedure za računanje produkta matrica $\mathbb{U}$ i $\mathbb{V}$ s vektorom, te za rješavanje sustava s matricama $\mathbb{L}_0$ i $(I - v\Delta)$. Množenje matrica $\mathbb{U}$ i $\mathbb{V}$ vektorima može se provesti kao u (3.14) i (3.15), tj.

$$\begin{aligned} \mathbb{U}x &= \text{vec}(U_1\hat{X}_1 + \hat{X}_2V_2), \\ \mathbb{V}y &= \begin{bmatrix} \text{vec}(V_1\hat{Y}) \\ \text{vec}(\hat{Y}U_2) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

gdje je $\hat{X}_1 \in \mathbb{R}^{r_1 \times n}$, $\text{vec}(\hat{X}_1) = x(1 : r_1n)$ i $\hat{X}_2 \in \mathbb{R}^{m \times r_2}$, $\text{vec}(\hat{X}_2) = x(r_1n+1 : r_1n+r_2m)$, te $\hat{Y} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{vec}(\hat{Y}) = y$.

Rješavanje linearnog sustava $\mathbb{L}_0x = y$ može se izvršiti korištenjem formule (3.13), odnosno rješavanjem Sylvesterove jednadžbe

$$A_0\hat{X} + \hat{X}B_0 = \hat{Y}, \quad (4.6)$$

gdje su $\hat{X}, \hat{Y} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ takve da je $\text{vec}(X) = x$ i $\text{vec}(Y) = y$.

Primjetimo da koristeći prethodno opisane procedure možemo i $(r_1n+r_2m) \times (r_1n+r_2m)$ matricu $\Delta = \mathbb{V}\mathbb{L}_0^{-1}\mathbb{U}$ pomnožiti s vektorom bez da formiramo matricu Δ s tri uzastopna matrica-vektor produkta u $4(r_1+r_2)mn+N$ operacija, gdje je N broj operacija potrebnih za rješavanje Sylvesterove jednadžbe (4.6).

Posljednji dio koji još ostaje za izračunati u (4.2) je produkt matrice $(I - v\Delta)^{-1}$ s vektorom y , odnosno potrebna je procedura za rješavanje linearnog sustava $(I - v\Delta)x = y$.

Rješavanje sustava s matricom sustava $(I - v\Delta)$

Matrica Δ je matrica dimenzije $(r_1n + r_2m) \times (r_1n + r_2m)$, što znači da za velike m, n, r_1, r_2 može postati značajno veća u odnosu na dimenziju polaznog problema. Kako se u primjeni (npr. prilikom optimizacijskog procesa) vrijednost $\text{vec}(X(v))$ računa mnogo puta za različite vrijednosti parametra v , pri čemu se svaki puta rješava sustav oblika $(I - v\Delta)x = y$ ovisan o vrijednosti parametra v , trebat ćemo efikasnu metodu za rješavanje navedenog linearnog sustava.

Direktni način za efikasno rješavanje sustava $(I - v\Delta)x = y$ mnogo puta za različite vrijednosti parametra v i različite desne strane koji je predložen u [63] je da se matrica Δ ortogonalnom sličnošću reducira na Hessenbergovu formu

$$U\Delta U^T = H,$$

gdje je H gornja Hessenbergova matrica. Tada sustav $(I - v\Delta)x = y$ prelazi u sustav $(I - vH)Ux = Uy$ u kojemu je matrica sustava $(I - vH)$ Hessenbergova matrica. Takav sustav lako se rješava u $\mathcal{O}((r_1n + r_2m)^2)$ operacija. Osnovni nedostatak ovog pristupa je u nužnosti eksplicitne konstrukcije matrice $\Delta \in \mathbb{R}^{(r_1n+r_2m) \times (r_1n+r_2m)}$, te onda i velikoj vremenskoj i prostornoj složenosti računanja Hessenbergove forme tako velike matrice (složenost redukcije matrice Δ na Hessenbergovu formu je $\frac{14}{3}(r_1n + r_2m)^3$).

Kao što smo rekli u poglavlju 2, sličan ali efikasniji pristup je približno rješavanje sustava $(I - v\Delta)x = y$ koristeći metode Krylovljevih potprostora, kao što su *Full Orthogonalization Method* (FOM) i *Generalized Minimal Residual Method* (GMRES).

FOM metoda bazira se na k -step Arnoldi faktorizaciji matrice. k -step Arnoldi factorizacija matrice Δ (vidi Algoritam 1) stvara gornje trokutastu matricu H_k dimenzije $k \times k$ i $(r_1n + r_2m) \times k$ matricu U_k čiji stupci tvore ortonormiranu bazu za Krylovljev potprostor $\mathcal{K}_k = \text{span}\{y, \Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^{k-1} y\} = \text{span}\{y, (I - v\Delta)y, (I - v\Delta)^2 y, \dots, (I - v\Delta)^{k-1} y\}$ tako da je

$$U_k^T \Delta U_k = H_k, \quad U_k^T U_k = I_k. \quad (4.7)$$

Za proceduru k -step Arnoldi, tj. za Algoritam 1 primjenjen na matricu Δ broj potrebnih operacija je sljedeći: u j -tom koraku potrebno je pomnožiti Δ s vektorom, što je $4(r_1 + r_2)mn + N$ operacija i potrebno je napraviti reortogonalizaciju što je dodatnih $(r_1n + r_2m)(4j + 5)$ operacija. Za svih k koraka potrebno je $4(r_1 + r_2)mnk + kN + (r_1n + r_2m)k(2k + 7)$ operacija. Pri tome matricu Δ nije potrebno eksplicitno konstruirati nego je dovoljno imati proceduru za množenje matrice Δ s vektorom.

Sada sustav $(I - v\Delta)x = y$ aproksimiramo s $k \times k$ Hessenbergovim sustavom

$$(I - vH_k)U_k^T x = U_k^T y.$$

Složenost rješavanja novodobivenog sustava je $4k(r_1n + r_2m) + \mathcal{O}(k^2)$.

Sada su opisane sve procedure potrebne za efikasno računanje $X(v)$. U Algoritmu 5 dana je detaljna procedura za rješavanje parametarski ovisne Sylvesterove jednadžbe (4.1).

Nadalje promatramo broj elementarnih operacija potrebnih za računanje rješenja parametarski ovisne Sylvesterove jednadžbe koristeći Algoritam 5.

Algoritam 5 Algoritam za računanje rješenja parametarski ovisne Sylvesterove jednadžbe (4.1)

Ulaz: $v \in \mathbb{R}$, $A_0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U_1, V_1^T \in \mathbb{R}^{m \times r_1}$, $U_2, V_2^T \in \mathbb{R}^{n \times r_2}$, te $E \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Izlaz: Rješenje $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ jednadžbe (4.1)

- 1: Koristeći Algoritam 1 formirati matrice H_k i U_k
 - 2: Riješiti Sylvesterovu jednadžbu $A_0 \hat{X} + \hat{X} B_0 = E$ i postaviti $x_1 := \text{vec}(\hat{X})$
 - 3: Postaviti $\hat{Y} = \text{reshape}(x_1, m, n)$. Izračunati $x_2(1 : r_1 n) = \text{vec}(V_1 \hat{Y})$, $x_2(r_1 n + 1 : r_1 n + r_2 m) = \text{vec}(\hat{Y} U_2)$
 - 4: Riješiti Hessenbergov sustav $(I - v H_k)x = U_k^T x_2$. Postaviti $x_3 = U_k x$
 - 5: Postaviti $\hat{X}_1 = \text{reshape}(x_3(1 : r_1 n), r_1, n)$, $\hat{X}_2 = \text{reshape}(x_3(r_1 n + 1 : r_1 n + r_2 m), m, r_2)$. Izračunati $x_4 = \text{vec}(U_1 \hat{X}_1 + \hat{X}_2 V_2)$
 - 6: Postaviti $\hat{E} = \text{reshape}(x_4, m, n)$. Riješiti Sylvesterovu jednadžbu $A_0 Y + Y B_0 = E$ i postaviti $x_5 = \text{vec}(Y)$
 - 7: Postaviti $x = x_1 - x_5$; $X = \text{reshape}(x, m, n)$
-

Složenost procedure za računanje $\text{vec}(X(v))$

Da bismo pokazali efikasnost Algoritma 5 za rješavanja parametarski ovisne Sylvesterove jednadžbe (4.1), promotrimo problem složenosti tog algoritma, odnosno izbrojimo broj potrebnih elementarnih operacija za pojedini korak algoritma.

Kao što je rečeno u prethodnom poglavlju, za 1. korak, Arnoldijevu proceduru na matrici Δ , potrebno je $4(r_1 + r_2)mnk + Nk + (r_1 n + r_2 m)k(2k + 7)$ operacija. Za rješavanje svake od Sylvesterovih jednadžbi iz koraka 2 i 6 potrebno je N operacija. Nadalje, koraci 3-5 redom se izvode u $2mn(r_1 + r_2)$, $2k(r_1 n + r_2 m) + \mathcal{O}(k^2)$, te $2mn(r_1 + r_2)$ elementarnih operacija.

U nastavku zbog preglednosti pretpostavimo da je $r_1 = r_2 =: r$ i $m = n$. Također pretpostavimo da su A_0 i B_0 blok dijagonalne matrice s 2×2 blokovima na glavnoj dijagonali, što znači da je $N = 8mn$. U Tablici 4.1 prikazan je broj elementarnih operacija potreban za svaki korak Algoritma 5.

Korak	Izraz	Broj operacija
1:	$\Delta = U_k H_k U_k^T$	$8(r + 1)m^2 k + 2rmk(2k + 7)$
2:	$x_1 = \mathbb{L}_0^{-1} \text{vec}(E)$	$8m^2 + \mathcal{O}(m)$
3:	$x_2 = \mathbb{V} x_1$	$4rm^2$
4:	$x_3 = (I - v H_k)^{-1} U_k^T x_2$	$4rmk + \mathcal{O}(k^2)$
5:	$x_4 = \mathbb{U} U_k x_3$	$4rm^2 + 4rmk$
6:	$x_5 = \mathbb{L}_0^{-1} x_4$	$8m^2 + \mathcal{O}(m)$

Tablica 4.1: Distribucija broja elementarnih operacija potreban za računanje $\text{vec}(X(v))$

Sada slijedi da je broj operacija potreban za računanje $\text{vec}(X(v))$ za prvu vrijednost parametra v jednak $8(rk + r + k + 2)m^2 + \mathcal{O}(rmk)$. Za svaku dodatnu evaluaciju $\text{vec}(X(v))$

potrebno je provesti samo korake 4 – 6, a to se može izvesti u $(4r + 8)m^2 + \mathcal{O}(rmk)$ operacija.

Ocjena pogreške za Algoritam 5

Da bismo točno izračunali pogrešku nastalu pri rješavanju sustava s matricom $(I - v\Delta)$ FOM metodom, potrebno je poznavati Hessenbergovu formu od Δ . Preciznije, vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 4.2.3. (*Teorem 4.3, [44]*) *Neka je aproksimacija rješenja sustava $Ax = b$ metodom FOM dana s x_k , pri čemu je $x = x_k + \delta x_k$. Neka je*

$$H = \begin{bmatrix} H_k & W_k \\ Y_k^T & \tilde{H}_k \end{bmatrix}$$

gornja Hessenbergova forma od A , pri čemu je $H_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $k < n$. Neka je nadalje $w_k = W_k \tilde{H}_k^{-1} e_1$ i

$$\gamma_k = \frac{h_{k+1,k} e_k^T H_k^{-1} e_1}{1 - h_{k+1,k} e_k^T H_k^{-1} w_k}.$$

Tada je

$$\|\delta x_k\|^2 = \|r_0\|^2 \gamma_k^2 (\|\tilde{H}_k^{-1} e_1\|^2 + \|H_k^{-1} w_k\|^2),$$

gdje je r_0 početni rezidualni vektor.

Prethodni teorem daje pogrešku pri rješavanju sustava FOM metodom, no budući da je za njezin izračun potrebna cijela Hessenbergova forma matrice, prethodni rezultat može se koristiti samo u teorijske svrhe. U članku [44] ideja iz prethodnog teorema iskorištena je za procjenu pogreške pri rješavanju sustava FOM metodom. Navedena procjena pogreške izračunava se s pomakom, odnosno u koraku k FOM metode može se procijeniti pogreška iz koraka $k - d$, $d > 0$.

Neka je

$$H_k = \begin{bmatrix} H_{k-d} & W_{k-d} \\ Y_{k-d}^T & \tilde{H}_{k-d} \end{bmatrix}$$

pri čemu je $H_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ dobivena nakon k koraka Arnoldijeve metode, $H_{k-d} \in \mathbb{R}^{k-d \times k-d}$, $\tilde{H}_{k-d} \in \mathbb{R}^{d \times d}$, gdje je $d \ll k$. Neka je

$$\chi_{k-d}^2 = \|r_0\|^2 \left(h_{k-d+1,k-d}^2 (e_{k-d}^T H_{k-d}^{-1} e_1 + \gamma_{k-d} e_{k-d}^T H_{k-d}^{-1} w_{k-d})^2 \|\tilde{H}_{k-d}^{-1} e_1\|^2 + \gamma_{k-d}^2 \|H_{k-d}^2 w_{k-d}\|^2 \right), \quad (4.8)$$

gdje je $w_{k-d} = W_{k-d} \tilde{H}_{k-d}^{-1} e_1$ i

$$\gamma_{k-d} = \frac{h_{k-d+1,k-d} e_{k-d}^T H_{k-d}^{-1} e_1}{1 - h_{k-d+1,k-d} e_{k-d}^T H_{k-d}^{-1} w_{k-d}}.$$

Tada je prema [44], nakon što FOM počne konvergirati, χ_{k-d} dobra aproksimacija norme pogreške u koraku $k - d$, tj. dobra aproksimacija od $\|\delta x_{k-d}\|$.

Primjenom navedenih rezultata odredit ćemo ocjenu pogreške u tragu rješenja Sylvesterove jednadžbe koja proizlazi iz pogreške FOM metode. Neka je

$$\text{vec}(X) = (\mathbb{L}_0^{-1} + \mathbb{L}_0^{-1}\mathbb{U}(I - v\Delta)^{-1}\mathbb{V}\mathbb{L}_0^{-1}) \text{vec}(E). \quad (4.9)$$

Nadalje želimo ocijeniti $\|\text{vec}(X) - \text{vec}(\tilde{X})\|$, gdje je X dobiven iz (4.9) egzaktnim rješavanjem sustava

$$(I - v\Delta)z = \mathbb{V}\mathbb{L}_0^{-1} \text{vec}(E), \quad (4.10)$$

dok je $\tilde{X}$ dobiven iz (4.9) pri čemu je prethodni sustav riješen aproksimacijskom metodom FOM i za dobiveno rješenje z_k vrijedi $z = z_k + \delta z_k$. Tada je

$$\begin{aligned} \text{vec}(X) - \text{vec}(\tilde{X}) &= (\mathbb{L}_0^{-1} \text{vec}(E) - \mathbb{L}_0^{-1}\mathbb{U}z) - (\mathbb{L}_0^{-1} \text{vec}(E) - \mathbb{L}_0^{-1}\mathbb{U}(z - \delta z_k)) \\ &= -\mathbb{L}_0^{-1}\mathbb{U}\delta z_k. \end{aligned}$$

Aproksimaciju pogreške u tragu od X za dovoljno veliki k dobivamo kao

$$\begin{aligned} |\text{tr}(X) - \text{tr}(\tilde{X})| &= |\text{vec}(I)^T \text{vec}(X) - \text{vec}(I)^T \text{vec}(\tilde{X})| \\ &= |\text{vec}(I)^T \mathbb{L}_0^{-1}\mathbb{U}\delta z_k| \\ &\leq \|\text{vec}(I)^T \mathbb{L}_0^{-1}\mathbb{U}\| \|\delta z_k\| \\ &\approx \|\text{vec}(I)^T \mathbb{L}_0^{-1}\mathbb{U}\| \chi_k \end{aligned}$$

pri čemu je χ_k definiran s (4.8).

Općenito je primjećeno (vidi [44]) da je ocjena pogreške u trenutku kada FOM metoda počne konvergirati vrlo bliska stvarnoj pogrešci, da bi nadalje počela znatno padati. Slično ponašanje možemo vidjeti i poglavlju 4.4.1, gdje je ilustrirano ponašanje stvarne i procijenjene pogreške pri rješavanju sustava, kao i u konačnom rješenju Sylvesterove jednadžbe.

4.3 Optimizacija rješenja parametarski ovisne Sylvesterove jednadžbe

Pristup za računanje $\text{vec}(X(v))$ dan u prethodnom poglavlju omogućava također i efikasno računanje derivacija od $\text{vec}(X(v))$ uz vrlo malo dodatnih operacija. Prva i druga derivacija od $\text{vec}(X(v))$ dane su s

$$\begin{aligned} \text{vec}(X'(v)) &= (\mathbb{L}_0^{-1}\mathbb{U}(I - v\Delta)^{-1}\mathbb{V}\mathbb{L}_0^{-1} + \\ &\quad + v\mathbb{L}_0^{-1}\mathbb{U}(I - v\Delta)^{-1}\Delta(I - v\Delta)^{-1}\mathbb{V}\mathbb{L}_0^{-1}) \text{vec}(E) \end{aligned} \quad (4.11)$$

i

$$\begin{aligned} \text{vec}(X''(v)) &= 2(\mathbb{L}_0^{-1}\mathbb{U}(I - v\Delta)^{-1}\Delta(I - v\Delta)^{-1}\mathbb{V}\mathbb{L}_0^{-1} + \\ &\quad + v\mathbb{L}_0^{-1}\mathbb{U}((I - v\Delta)^{-1}\Delta)^2(I - v\Delta)^{-1}\mathbb{V}\mathbb{L}_0^{-1}) \text{vec}(E). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Sada se lako može vidjeti da nakon što se izračuna $X(v)$, broj dodatnih operacija potreban da bi se izračunalo $X'(v)$ i $X''(v)$ za svaku je jednak $(4r + 8)m^2 + \mathcal{O}(rmk)$. Jednostavnost računanja derivacija implicira efikasnost korištenja Algoritma 5 također i za optimizaciju rješenja jednadžbe (4.1) s obzirom na parametar $v \in S \subseteq \mathbb{R}$.

Nadalje ćemo konstruirati algoritam za minimizaciju rješenja $X(v)$ Sylvesterove jednadžbe (4.1) s obzirom na kriterij minimalnog traga (ovaj kriterij primjenjiv je samo u slučaju $m = n$) i s obzirom na kriterij minimalne Frobeniusove norme.

4.3.1 Optimizacija s obzirom na kriterij $\text{tr}(X(v)) \rightarrow \min$

Cilj u ovom poglavlju je sagraditi algoritam za minimizaciju funkcije $v \mapsto \text{tr}(X(v))$, gdje je $X(v)$ rješenja jednadžbe (4.1), uz pretpostavku $m = n$. Kako postoje prva i druga derivacija funkcije $\text{tr}(X(v))$ i mogu se izračunati u malo operacija, optimizacijski proces se može provesti koristeći neku od metoda za minimizaciju derivabilnih funkcija kao što je primjerice Newtonova metoda.

Lako se vidi da je

$$\text{tr}(X(v)) = \text{vec}(I)^T \text{vec}(X). \quad (4.13)$$

pa se $\text{tr}(X(v))$ može izračunati koristeći Algoritam 5 u $8(rk + r + k + 2)m^2 + \mathcal{O}(rmk)$ operacija, a svaka dodatna evaluacija od $\text{tr}(X(v))$ može se učiniti u $(4r + 8)m^2 + \mathcal{O}(rmk)$ operacija.

Dodatne evaluacije mogu se izvršiti još efikasnije. U tu svrhu uvodimo dodatnu notaciju. Koristeći formulu za $\text{vec}(X)$ danu u (4.2), jednadžba (4.13) može se zapisati kao

$$\text{tr}(X(v)) = x_0 + v a_L^T (I - v \Delta)^{-1} a_R, \quad (4.14)$$

gdje je

$$\begin{aligned} x_0 &= \text{vec}(I)^T \mathbb{L}_0^{-1} \text{vec}(E) \in \mathbb{R}, \\ a_L &= \mathbb{U}^T \mathbb{L}_0^{-T} \text{vec}(I) \in \mathbb{R}^{r_1 n + r_2 m}, \\ a_R &= \mathbb{V} \mathbb{L}_0^{-1} \text{vec}(E) \in \mathbb{R}^{r_1 n + r_2 m}. \end{aligned}$$

Sada se lako vidi da za svaku dodatnu evaluaciju od $\text{tr}(X(v))$ treba riješiti sustav $(I - v H_k) U_k^T x = U_k^T a_R$ i rezultat pomnožiti vektorom a_L , pa je broj operacija potreban za svaku dodatnu evaluaciju jednak $4(2k + 1)rm + \mathcal{O}(k^2)$.

Nadalje pogledajmo kako se mogu još efikasnije (za veliki broj različitih vrijednosti parametra v) izračunati prva i druga derivacija od $\text{tr}(X(v))$. Za funkciju $v \mapsto \text{tr}(X(v))$ vrijedi

$$\frac{d}{dv} \text{tr}(X(v)) = \text{tr}\left(\frac{d}{dv} X(v)\right),$$

pa se prva i druga derivacija funkcije $F(v) := \text{tr}(X(v))$ dane s

$$F'(v) = \text{vec}(I)^T \text{vec}(X'(v)), \quad F''(v) = \text{vec}(I)^T \text{vec}(X''(v)),$$

pri čemu su $\text{vec}(X'(v))$ i $\text{vec}(X''(v))$ dani s (4.11) i (4.12).

Računanje derivacija moguće je učiniti još efikasnijim korištenjem formule (4.14). Koristeći jednakost (4.14), za prvu i drugu derivaciju funkcije $F(v)$ dobivamo

$$\begin{aligned} F'(v) &= a_L^T (I - v \Delta)^{-1} a_R + v a_L^T (I - v \Delta)^{-1} \Delta (I - v \Delta)^{-1} a_R, \\ F''(v) &= 2a_L^T (I - v \Delta)^{-1} \Delta (I - v \Delta)^{-1} a_R + 2v a_L^T ((I - v \Delta)^{-1} \Delta)^2 (I - v \Delta)^{-1} a_R, \end{aligned}$$

te se one mogu izračunati u dodatnih $20rmk + \mathcal{O}(k^2)$ operacija.

Sada kada imamo efikasne metode za računanje derivacija od $\text{tr}(X(v))$, optimizacija vrijednosti od $\text{tr}(X(v))$ može se provesti koristeći primjerice Newtonov minimizacijski proces.

4.3.2 Optimizacija s obzirom na kriterij $\|X(v)\|_F \rightarrow \min$

U prethodnom poglavlju predstavljen je algoritam za optimizaciju s obzirom na kriterij $\text{tr}(X(v)) \rightarrow \min$. Taj kriterij ima smisla samo za $m = n$. U slučaju $m \neq n$, kada trag

od $X(v)$ nije definiran, može se promatrati primjerice optimizacija s obzirom na kriterij minimalne Frobeniusove norme rješenja jednadžbe (4.1). Kako je $\|X\|_F^2 = \text{tr}(X^T X)$, to znači da je optimizacije Frobeniusove norme zapravo minimizacija od $\text{tr}(X^T X)$.

Označimo $F(v) := \|X(v)\|_F^2$. Lako se vidi da je

$$F(v) = \text{vec}(X(v))^T \text{vec}(X(v)),$$

pa je broj potrebnih operacija za računanje $\|X(v)\|_F$ jednak je broju potrebnih operacija za računanje $\text{vec}(X(v))$ uvećanom za $2mn$.

Vrijedi $F \in C^\infty$ i lako je dobiti prvu i drugu derivaciju funkcije F kao

$$\begin{aligned} F'(v) &= \text{vec}(X'(v))^T \text{vec}(X(v)) + \text{vec}(X(v))^T \text{vec}(X'(v)) \\ &= 2 \text{vec}(X(v))^T \text{vec}(X'(v)); \\ F''(v) &= 2 \text{vec}(X'(v))^T \text{vec}(X'(v)) + 2 \text{vec}(X(v))^T \text{vec}(X''(v)) \\ &= 2\|X'(v)\|_F^2 + 2 \text{vec}(X(v))^T \text{vec}(X''(v)), \end{aligned}$$

gdje su $\text{vec}(X'(v))$ i $\text{vec}(X''(v))$ dani s (4.11) i (4.12).

Broj potrebnih operacija za računanje $\|X(v)\|'_F$ i $\|X(v)\|''_F$ jednak je broju potrebnih operacija za računanje $\text{vec}(X'(v))$ i $\text{vec}(X''(v))$ uvećanom broj operacija potrebnih za skalarne produkte, odnosno za $2mn$ kod prve derivacije i $4mn$ kod druge derivacije.

Za određivanje optimalne vrijednosti od $\|X(v)\|_F$ također možemo koristiti Newtonov minimizacijski proces.

Primjedba 4.3.1. *Primjetimo da derivacija Frobeniusove norme od $X(v)$ nije jednaka Frobeniusovoj normi od derivacije od $X(v)$. Neka je primjerice*

$$X(v) = \begin{bmatrix} a(v) & b(v) \\ c(v) & d(v) \end{bmatrix},$$

pri čemu su $a(v), b(v), c(v), d(v)$ derivabilne funkcije. Tada je

$$X'(v) = \begin{bmatrix} a'(v) & b'(v) \\ c'(v) & d'(v) \end{bmatrix}$$

i vrijedi

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dv} X(v) \right\|_F &= \sqrt{a'(v)^2 + b'(v)^2 + c'(v)^2 + d'(v)^2}, \\ \frac{d}{dv} \|X(v)\|_F &= \frac{2a(v)a'(v) + 2b(v)b'(v) + 2c(v)c'(v)}{\sqrt{a(v)^2 + b(v)^2 + c(v)^2 + d(v)^2}}. \end{aligned}$$

Nasuprot tome, kao što smo i koristili u prethodnom poglavlju, $\text{tr}(\frac{d}{dv}X(v)) = a'(v) + d'(v) = \frac{d}{dv} \text{tr}(X(v))$.

4.4 Primjena - problem optimalne viskoznosti prigušivača mehaničkih sustava

Vrlo važan problem koji se javlja pri proučavanju prigušenih sustava opisanih jednadžbom (2.9) je problem optimalne viskoznosti prigušivača, pri čemu se optimalnost odnosi na osiguravanje (u nekom smislu) najboljeg iščezavanja titranja. Kao što je rečeno u poglavlju 2.3.2, kriterij minimalne prosječne ukupne energije sustava ekvivalentan je kriteriju minimalnog traga rješenja sustavu pripadne Ljapunovljeve jednadžbe

$$AX + XA^T = -Z, \quad (4.15)$$

gdje je A matrica dimenzije $2n \times 2n$ dobivena linearizacijom sustava (2.9), a matrica Z određuje koji dio vlastitih frekvencija treba biti prigušen.

U slučaju sustava s r prigušivača iste viskoznosti v , matrica matrica A iz (4.15) je oblika

$$A(v) = \begin{bmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & -\Phi^T D(v) \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & -\alpha \Omega \end{bmatrix} - v \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi^T C \Phi \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

gdje matrica C ovisi o poziciji prigušivača i oblika je $C = e_{i_1} e_{i_1}^T + e_{i_2} e_{i_2}^T + \dots + e_{i_r} e_{i_r}^T$. Očigledno je matrica A oblika $A = A_0 - vUU^T$, gdje je

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & -\alpha \Omega \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad U = \begin{bmatrix} 0 \\ U_0 \end{bmatrix}$$

gdje je $U_0 = \Phi^T [e_{i_1}, \dots, e_{i_r}]$. To znači da ovaj problem po strukturi odgovara tipu problema koji se mogu učinkovito riješiti koristeći Algoritam 5, što će biti i pokazano u sljedećim numeričkim primjerima.

Kako je matrica A stabilna matrica (vidjeti npr. [62]) i $v > 0$, jednadžba $(A_0 - vUU^T)X + X(A_0 - vUU^T)^T = -Z$ ima jedinstveno rješenje za svaki $v > 0$ (vidjeti Primjedbu 4.2.1).

4.4.1 Numerički primjeri

U ovom poglavlju ćemo na numeričkim primjerima ilustrirati učinkovitost Algoritma 5 pri rješavanju problema optimalne viskoznosti prigušivača mehaničkih sustava.

Newtonova procedura bazirana na Algoritmu 5 (nadalje označen s **SMW-approx**) složenosti $8(rk + r + k + 2)m^2 + \mathcal{O}(rmk)$ (vidi Tablicu 4.1) bit će na primjeru optimizacije viskoznosti prigušivača uspoređena sa sljedeća dva algoritma:

1. Standardna rutina koja za optimizaciju koristi Newtonovu proceduru i bazira se na Bartels – Stewartovoj metodi za rješavanje Ljapunovljevih jednadžbi (nadalje označena s **BS**). Ova procedura treba u svakoj iteraciji riješiti tri Ljapunovljeve jednadžbe s različitim desnim stranama

$$\begin{aligned} (A_0 - v_k U U^T) X(v_k) + X(v_k) (A_0 - v_k U U^T) &= E, \\ (A_0 - v_k U U^T) X'(v_k) + X'(v_k) (A_0 - v_k U U^T) &= U U^T X(v_k) + X(v_k) U U^T, \\ (A_0 - v_k U U^T) X''(v_k) + X''(v_k) (A_0 - v_k U U^T) &= 2(U U^T X'(v_k) + X'(v_k) U U^T). \end{aligned}$$

Složenost rješavanja te tri jednadžbe Bartels-Stewartovim algoritmom je $(26 + 6 \cdot 3)m^3 + \mathcal{O}(m^2) = 44m^3 + \mathcal{O}(m^2)$ (vidi [22]). Da bi se postigao minimum, potrebno je obično 10-20 iteracija Newtonovog procesa oblika

$$v_{k+1} = v_k - \frac{\text{tr}(X'(v_k))}{\text{tr}(X''(v_k))}.$$

2. Algoritam iz članka [63] (nadalje označen s **SMW-exact**) složenosti $37.33r^3m^3 + \mathcal{O}(r^2m^2)$ za cijeli optimizacijski proces. Nedostatak ovog algoritma je u lošem korištenju računalne memorije što ga čini neupotrebljivim za velike dimenzije m . Također, algoritam **SMW-exact** prikladan je za korištenje samo za male vrijednosti od r (u [63] je predloženo $r \leq 4$).

Za ilustraciju, pokazat ćemo rezultate dobivene pri rješavanju problema optimalne viskoznosti za sustav opisan s:

$$\begin{aligned} M &= I_n, \quad k_1 = k_2 = \dots = k_{n+1} = 1, \quad Z = I_m, \\ r &= 2, \quad C = v(e_{n/10} e_{n/10}^T + e_{n/5} e_{n/5}^T) \end{aligned}$$

Promatrat ćemo probleme dimenzija $n = 200$ ($m = 400$), $n = 500$ ($m = 1000$), $n = 1000$ ($m = 2000$) i $n = 1500$ ($m = 3000$). Dobiveni rezultati dani su u Tablici 4.2. gdje su v_{BS}^* i Tr_{BS}^* , v_E^* i Tr_E^* , v_A^* i Tr_A^* optimalne viskoznosti i optimalni tragovi dobiveni redom algoritmima **BS**, **SMW-exact** i **SMW-approx**. Nadalje, $RErr_E = \frac{|Tr_{BS}^* - Tr_E^*|}{Tr_{BS}^*}$ je relativna pogreška u optimalnom tragu između **BS** i **SMW-exact**, dok je $RErr_A = \frac{|Tr_{BS}^* - Tr_A^*|}{Tr_{BS}^*}$ relativna pogreška u optimalnom tragu između **BS** i **SMW-approx** algoritama.

Za $n = 200$ ($m = 400$), minimalni trag rješenja Ljapunovljeve jednadžbe (4.15) za sva tri algoritma postiže se za $v = 1.3633$. Za algoritam **SMW-exact** da bi relativna pogreška bila manja od 10^{-6} , potrebno je $k \gtrsim 9\%n$.

Dimenzija	BS and SMW-exact	SMW-approx
$n = 200$ ($m = 400$)	$v_{BS}^* = 1.3633$ $Tr_{BS}^* = 9711.4087$ $v_E^* = 1.3633$ $Tr_E^* = 9711.4087$ $RErr_E = 1.1 \cdot 10^{-14}$	$k = n/5, v_A^* = 1.3633$ $Tr_A^* = 9711.4087$ $RErr_A = 2.8 \cdot 10^{-11}$ $k = n/10, v_A^* = 1.3634$ $Tr_A^* = 9711.3939$ $RErr_A = 1.5 \cdot 10^{-6}$ $k = n/20, v_A^* = 1.3688$ $Tr_A^* = 9710.2734$ $RErr_A = 1.2 \cdot 10^{-4}$
$n = 500$ ($m = 1000$)	$v_{BS}^* = 1.3893$ $Tr_{BS}^* = 29909.3555$ $v_E^* = 1.3893$ $Tr_E^* = 29909.3555$ $RErr_E = 4.5 \cdot 10^{-14}$	$k = n/5, v_A^* = 1.3893$ $Tr_A^* = 29909.3555$ $RErr_A = 4.4 \cdot 10^{-14}$ $k = n/20, v_A^* = 1.3893$ $Tr_A^* = 29909.3534$ $RErr_A = 7.2 \cdot 10^{-8}$ $k = n/50, v_A^* = 1.3957,$ $Tr_A^* = 29905.9589$ $RErr_A = 1.14 \cdot 10^{-4}$
$n = 1000$ ($m = 2000$)	$v_{BS}^* = 1.3996$ $Tr_{BS}^* = 68495.2881$ $v_E^* = 1.3996$ $Tr_E^* = 68495.2881$ $RErr_E = 3.6 \cdot 10^{-14}$	$k = n/20, v_A^* = 1.3996$ $Tr_A^* = 68495.2881$ $RErr_A = 4.2 \cdot 10^{-16}$ $k = n/50, v_A^* = 1.3999$ $Tr_A^* = 68495.1769$ $RErr_A = 1.7 \cdot 10^{-6}$ $k = n/100, v_A^* = 1.4068,$ $Tr_A^* = 68487.5736$ $RErr_A = 1.13 \cdot 10^{-4}$
$n = 1500$ ($m = 3000$)	$v_{BS}^* = 1.4033$ $Tr_{BS}^* = 110409.5415$ SMW-exact: out of memory	$k = n/50, v_A^* = 1.4033$ $Tr_A^* = 110409.5428$ $RErr_A = 1.1 \cdot 10^{-8}$ $k = n/100, v_A^* = 1.4045$ $Tr_A^* = 110407.9622$ $RErr_A = 1.4 \cdot 10^{-5}$ $k = n/150, v_A^* = 1.4108$ $Tr_A^* = 110397.4021$ $RErr_A = 1.1 \cdot 10^{-4}$

Tablica 4.2: Rezultati usporedbe algoritama BS, SMW-exact i SMW-approx

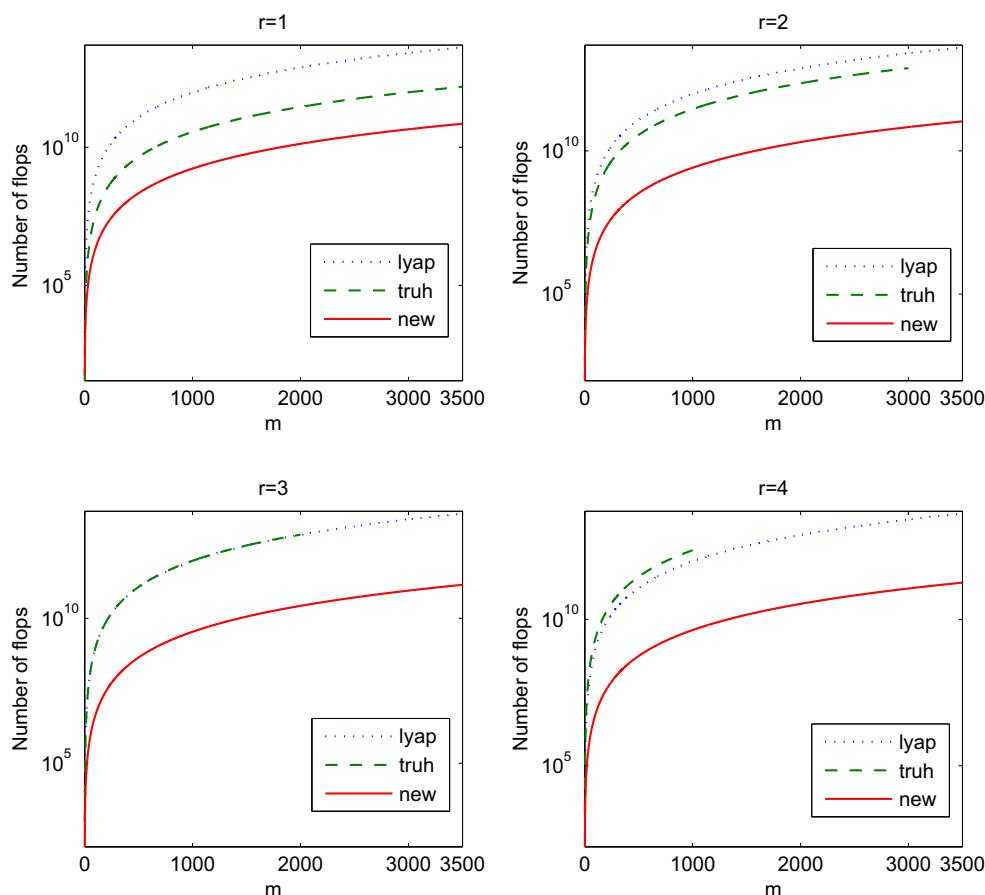
Za $n = 500$ ($m = 1000$), minimalni trag rješenja Ljapunovljeve jednadžbe (4.15) za sva tri algoritma podtiže se za $v = 1.3893$. Za algoritam **SMW-exact** da bi relativna pogreška bila manja od 10^{-6} , potrebno je $k \gtrsim 5\%n$.

Za $n = 1000$ ($m = 2000$), minimalni trag rješenja Ljapunovljeve jednadžbe (4.15) za sva tri algoritma podtiže se za $v = 1.3996$. Za algoritam **SMW-exact** da bi relativna pogreška bila manja od 10^{-6} , potrebno je $k \gtrsim 2\%n$.

Za $n = 1500$ ($m = 3000$), minimalni trag rješenja Ljapunovljeve jednadžbe (4.15) algoritmi BS i SMW-approx postižu za $v = 1.4033$. Za algoritam **SMW-approx** da bi relativna

pogreška bila manja od 10^{-6} , potrebno je $k \gtrsim 1.5\%n$. Algoritam **SMW-exact** zbog nedostatka memorije nije došao do rješenja.¹

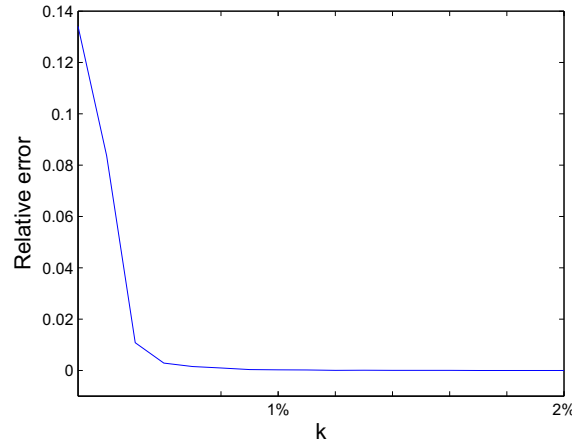
Na Slici 4.1 dan je grafički prikaz rasta broja računskih operacija za sva tri algoritma za slučaj jednog, dva, tri i četiri prigušivača. Očigledno je da je algoritam **SMW-approx** efikasniji od preostala dva promatrana algoritma. Također, algoritam **SMW-approx** (za razliku od algoritma **SMW-exact**) vrlo dobro koristi memorijske resurse što omogućava primjenu za probleme veće dimenzije.



Slika 4.1: Rast broja računskih operacija za sve tri metode i različite vrijednosti od r (ordinata je u logaritamskom omjeru)

¹Svi numerički primjeri rađeni su na osobnom računalu s dvojezgrenim Pentium T4200 procesorom 2.30 GHz s 2GB RAM-a.

Pogledajmo još problem odabira dimenzije k Krylovljevog potprostora. Red veličine od k ovisi o redu veličine polaznog problema: za male sustave veličine $\mathcal{O}(100)$, k se ne bi trebao uzeti manji od 10% dimenzije polaznog problema, dok je za veće probleme dimenzije $\mathcal{O}(1000)$ za k dovoljno da bude oko 1%-3% dimenzije početnog problema. Na primjer, na Slici 4.2 prikazana je relativna pogreška optimalne vrijednosti od $\text{tr}(X)$ za Ljapunovljevu jednadžbu (4.15) s $n = m = 1000$ u ovisnosti o dimenziji k . U tom primjeru da bi se postigla relativna pogreška manja od 10^{-6} , dovoljno je da k bude oko 1.5% od m .



Slika 4.2: Ovisnost relativne pogreške optimalne vrijednosti od $\text{tr}(X)$ i dimenzije k

Naposlijetku, promotrimo još stvarnu (δz_k) i procijenjenu ($\tilde{\delta z}_k$) pogrešku nastalu pri rješavanju sustava $(I - v\Delta)x = y$ FOM metodom, kao i stvarnu ($\delta \text{tr}(X)$) te procijenjenu ($\tilde{\delta \text{tr}(X)}$) pogrešku u tragu rješenja sustavu pripadne Ljapunovljeve jednadžbe. U tablici 4.3 dani su rezultati za promatrani problem različitih dimenzija n i k . Procjena pogreške FOM metode računata je pomoću formule 4.8, pri čemu je uzeto $d = 2$.

Dimenzija	Pogreška pri rješavanju sustava	Pogreška u tragu
$n = 100$ (Δ reda 400) $k = 100$	$\delta z_k = 1.6 \cdot 10^{-14}$ $\tilde{\delta} z_k = 9.5 \cdot 10^{-27}$	$\delta \text{tr}(X) = 7.5 \cdot 10^{-11}$ $\tilde{\delta} \text{tr}(X) = 8.7 \cdot 10^{-25}$
$n = 100$ $k = 50$	$\delta z_k = 9.9 \cdot 10^{-12}$ $\tilde{\delta} z_k = 3.3 \cdot 10^{-11}$	$\delta \text{tr}(X) = 1.1 \cdot 10^{-10}$ $\tilde{\delta} \text{tr}(X) = 3.0 \cdot 10^{-9}$
$n = 100$ $k = 30$	$\delta z_k = 1.7 \cdot 10^{-6}$ $\tilde{\delta} z_k = 1.9 \cdot 10^{-6}$	$\delta \text{tr}(X) = 3.2 \cdot 10^{-5}$ $\tilde{\delta} \text{tr}(X) = 1.8 \cdot 10^{-4}$
$n = 100$ $k = 10$	$\delta z_k = 0.07$ $\tilde{\delta} z_k = 0.12$	$\delta \text{tr}(X) = 0.54$ $\tilde{\delta} \text{tr}(X) = 10.85$
$n = 300$ (Δ reda 1200) $k = 200$	$\delta z_k = 3.8 \cdot 10^{-14}$ $\tilde{\delta} z_k = 5.7 \cdot 10^{-61}$	$\delta \text{tr}(X) = 4.9 \cdot 10^{-10}$ $\tilde{\delta} \text{tr}(X) = 9.1 \cdot 10^{-59}$
$n = 300$ $k = 100$	$\delta z_k = 3.7 \cdot 10^{-14}$ $\tilde{\delta} z_k = 2.8 \cdot 10^{-27}$	$\delta \text{tr}(X) = 4.9 \cdot 10^{-10}$ $\tilde{\delta} \text{tr}(X) = 4.5 \cdot 10^{-25}$
$n = 300$ $k = 50$	$\delta z_k = 6.3 \cdot 10^{-12}$ $\tilde{\delta} z_k = 2.2 \cdot 10^{-11}$	$\delta \text{tr}(X) = 5.8 \cdot 10^{-10}$ $\tilde{\delta} \text{tr}(X) = 3.6 \cdot 10^{-9}$
$n = 300$ $k = 10$	$\delta z_k = 0.07$ $\tilde{\delta} z_k = 0.14$	$\delta \text{tr}(X) = 1.15$ $\tilde{\delta} \text{tr}(X) = 22.22$

Tablica 4.3: Usporedba egzaktnih i aproksimiranih vrijednosti pogreški

Poglavlje 5

Sherman-Morrison-Woodbury-eva formula za T -Sylvesterovu jednadžbu

Slično kao u slučaju Sylvesterove jednadžbe, Sherman-Morrisonovu formulu moguće je primjeniti i na takozvanu T -Sylvesterovu jednadžbu. Dobivena formula omogućava konstrukciju efikasnog algoritma za rješavanje T -Sylvesterove jednadžbe, kao i rješavanje i optimizaciju rješenja parametarski ovisne T -Sylvesterove jednadžbe.

5.1 T -Sylvesterova jednadžba

Sylvesterova jednadžba za $\star$ -kongruenciju ili skraćeno $\star$ -Sylvesterova jednadžba¹ (vidi [12, 61, 73, 24]) jednadžba je oblika

$$AX + X^\star B = E, \quad (5.1)$$

gdje su $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $E \in \mathbb{C}^{m \times m}$ i nepoznata matrica $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$, a operator $\star$ označava operator adjungiranja ($\star = *$) ili transponiranja ($\star = T$).

$\star$ -Sylvesterova jednadžba javlja se primjerice pri anti-dijagonalizaciji kongruencijom anti-blok-trokutaste matrice oblika

$$\begin{bmatrix} -E & A \\ B & 0 \end{bmatrix}.$$

¹eng. *Sylvester equation for $\star$ -congruence*, $\star$ -Sylvester equation

Naime, iz jednakosti

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} -E & A \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX + X^*B - E & A \\ B & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

slijedi da je problem anti-blok-dijagonalizacije kongruencijom anti-blok-trokutaste matrice ekvivalentan problemu rješavanja $\star$ -Sylvesterove jednadžbe $AX + X^*B = E$. Problem anti-blok-dijagonalizacije anti-blok-trokutaste matrice javlja se primjerice pri rješavanju linearnog palindromskog problema svojstvenih vrijednosti² $(Z + \lambda Z^*)x = 0$.

Egzistencija rješenja $\star$ -Sylvesterove jednadžbe analizirana je u radu [73] i predstavlja svojevrstan analogon Rothovom teoremu za egzistenciju rješenja Sylvesterove jednadžbe.

Teorem 5.1.1. (*vidi [73], Teorem 2*) $\star$ -Sylvesterova jednadžba (5.1) ima rješenje ako i samo ako su matrice

$$S_1 = \begin{bmatrix} -E & A \\ B & 0 \end{bmatrix} \quad i \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$$

$\star$ -kongruentne, tj. postoji regularna matrica P takva da je $P^*S_1P = S_2$.

U nastavku ovog poglavlja promatra se slučaj $A, B, E \in \mathbb{R}$ i $(\star = T)$, odnosno jednadžba

$$AX + X^T B = E, \quad (5.3)$$

koju ćemo zvati T -Sylvesterova jednadžba. U slučaju kad su A i B pravokutne matrice, odnosno kada je $m \neq n$, jednadžba (5.3) nikad nema jedinstveno rješenje za svaku desnu stranu (vidi [61], Teorem 2.3), odnosno operator $X \mapsto AX + X^T B$ nikada nije invertibilan. Nadalje ćemo pretpostaviti da je $m = n$. Sljedeći teorem govori o jedinstvenosti rješenja T -Sylvesterove jednadžbe s kvadratnim matricama.

Teorem 5.1.2. (*vidi [15], Lema 5.10.*) T -Sylvesterova jednadžba (5.3) ima jedinstveno rješenje za svaku desnu stranu E ako i samo ako za svojstvene vrijednosti para (A, B^T) vrijedi:

- i) Ako je λ u spektru od (A, B^T) , onda $1/\lambda$ nije u spektru od (A, B^T) ;
- ii) Ako je 1 u spektru od (A, B^T) , onda je algebarske kratnosti 1 .

U sljedećem odjeljku bit će predstavljen algoritam za rješavanje T -Sylvesterove jednadžbe koji je predložen u [61].

²eng. *linear palindromic eigenproblem*

5.1.1 Algoritam za rješavanje T -Sylvesterove jednadžbe

Neka su A i B matrice reda n koje zadovoljavaju uvjete Teorema 5.1.2, odnosno takve da jednadžba $AX + X^T B = E$ ima jedinstveno rješenje. U radu [61] predložen je algoritam za računanje jedinstvenog rješenja T -Sylvesterove jednadžbe u $\mathcal{O}(n^3)$ operacija, a koji se bazira na generaliziranoj Schurovoj dekompoziciji para (A, B^T) .

Neka je generalizirana Schurova forma para (A, B^T) dana s

$$A = Q_1 R_1 Q_2^T, \quad B^T = Q_1 R_2 Q_2^T,$$

gdje su Q_1, Q_2 ortogonalne matrice, R_2 gornje trokutasta matrica, a R_1 kvazi-gornje trokutasta matrica, odnosno blok-gornje trokutasta matrica s 1×1 ili 2×2 blokovima na glavnoj dijagonali. Tada množenjem T -Sylvesterove jednadžbe (5.3) slijeva s Q_1^T i zdesna s Q_1 , te uz supstituciju $\bar{X} := Q_2^T X Q_1$, dobivamo transformiranu jednadžbu

$$R_1 \bar{X} + \bar{X}^T R_2^T = \bar{E}, \quad (5.4)$$

gdje je $\bar{E} = Q_1^T E Q_1$. U svrhu rješavanja transformirane jednadžbe, neka su R_1 i R_2 particionirane na sljedeći način

$$R_1 = \begin{bmatrix} R_{11}^{(1)} & R_{12}^{(1)} & \cdots & R_{1p}^{(1)} \\ & R_{22}^{(1)} & \cdots & R_{2p}^{(1)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & R_{pp}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} R_{11}^{(2)} & R_{12}^{(2)} & \cdots & R_{1p}^{(2)} \\ & R_{22}^{(2)} & \cdots & R_{2p}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & R_{pp}^{(2)} \end{bmatrix}$$

gdje su $R_{ij}^{(1)}, R_{ij}^{(2)} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$, $1 \leq i, j \leq p$, gdje je $n_k, k = 1, \dots, p$ jednak 1 ili 2. Dijagonalni blokovi matrice R_2 su gornjetrokutaste matrice. Na odgovarajući način particionirajmo i matrice $\bar{X}$ i $\bar{E}$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{X}_{11} & \bar{X}_{12} & \cdots & \bar{X}_{1p} \\ \bar{X}_{21} & \bar{X}_{22} & \cdots & \bar{X}_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{X}_{p1} & \bar{X}_{p2} & \cdots & \bar{X}_{pp} \end{bmatrix}, \quad \bar{E} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} & \cdots & \bar{E}_{1p} \\ \bar{E}_{21} & \bar{E}_{22} & \cdots & \bar{E}_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{E}_{p1} & \bar{E}_{p2} & \cdots & \bar{E}_{pp} \end{bmatrix}.$$

Sada se jednadžba (5.4) može riješiti supstitucijama unatrag na način kao što je navedeno u Algoritmu 6.

Ukupna složenost Algoritma 6 je $76n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ (vidi [61]).

Algoritam 6 Algoritam za rješavanje T -Sylvesterove jednadžbe $AX + X^T B = E$

Ulaz: $A, B, E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **Izlaz:** Jedinstveno rješenje $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jednadžbe $AX + X^T B = E$ Izračunati generaliziranu Schurovu dekompoziciju para (A, B^T) : $A = Q_1 R_1 Q_2^T$, $B^T = Q_1 R_2 Q_2^T$ Uvesti supstituciju $\bar{E} = Q_1^T E Q_1$ **for** $j = p : -1 : 1$ **do**Rješiti $R_{jj}^{(1)} \bar{X}_{jj} + \bar{X}_{jj}^T (R_{jj}^{(2)})^T = \bar{E}_{jj}$ **for** $i = j - 1 : -1 : 1$ **do**

Rješiti sustav

$$\begin{aligned} R_{ii}^{(1)} \bar{X}_{ij} + \bar{X}_{ji}^T (R_{jj}^{(2)})^T &= \bar{E}_{ji} - \sum_{k=i+1}^j R_{ik}^{(1)} \bar{X}_{kj} \\ R_{ii}^{(2)} \bar{X}_{ij} + \bar{X}_{ji}^T (R_{jj}^{(1)})^T &= \bar{E}_{ij} - \sum_{k=i+1}^j R_{ik}^{(2)} \bar{X}_{kj} \end{aligned}$$

end for

$$E(1 : j - 1, 1 : j - 1) = E(1 : j - 1, 1 : j - 1) - R_1(1 : j - 1, j) \bar{X}(j, 1 : j - 1) - (R_2(1 : j - 1, 1) \bar{X}(j, 1 : j - 1))^T$$

end for

$$X = Q_2 \bar{X} Q_1^T$$

5.2 Sherman-Morrison-Woodbury-eva formula za T -Sylvesterovu jednadžbu

U ovom poglavlju bit će dana takozvana Sherman-Morrison-Woodbury-eva formula za T -Sylvesterovu jednadžbu oblika

$$(A_0 + U_1 C_1 V_1) X + X^T (B_0 + U_2 C_2 V_2) = E, \quad (5.5)$$

gdje su $A_0, B_0, E, X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U_1 \in \mathbb{R}^{n \times r_1}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{r_1 \times r_1}$, $V_1 \in \mathbb{R}^{r_1 \times n}$ i $U_2 \in \mathbb{R}^{n \times r_2}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{r_2 \times r_2}$, $V_2 \in \mathbb{R}^{r_2 \times n}$ matrice.

Slično kao i u Poglavlju 3.1, definirajmo operatore

$$\hat{\mathcal{L}}_0(X) = A_0 X + X^T B_0, \quad (5.6)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{UCV}(X) = U_1 C_1 V_1 X + X^T U_2 C_2 V_2. \quad (5.7)$$

Očigledno je T -Sylvesterova jednadžba (5.5) ekvivalentna jednakosti

$$(\hat{\mathcal{L}}_0 + \hat{\mathcal{L}}_{UCV})(X) = E.$$

Neka je nadalje $\hat{\mathcal{U}}: \mathbb{R}^{r_1 \times n} \times \mathbb{R}^{r_2 \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ linearan operator definiran s

$$\hat{\mathcal{U}}(X_1, X_2) = U_1 X_1 + X_2^T V_2,$$

$\mathcal{C}: \mathbb{R}^{r_1 \times n} \times \mathbb{R}^{n \times r_2} \rightarrow \mathbb{R}^{r_1 \times n} \times \mathbb{R}^{n \times r_2}$ linearan operator definiran s

$$\hat{\mathcal{C}}(X_1, X_2) = (C_1 X_1, X_2 C_2),$$

i $\hat{\mathcal{V}}: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{r_1 \times n} \times \mathbb{R}^{r_2 \times n}$ linearan operator definiran s

$$\hat{\mathcal{V}}(Y) = (V_1 Y, Y^T U_2),$$

gdje su $U_1, U_2, C_1, C_2, V_1, V_2$ matrice definirane u (5.5).

Lako se vidi da se operator $\hat{\mathcal{L}}_{UCV}(X)$ iz (5.7) može zapisati kao

$$\hat{\mathcal{L}}_{UCV}(X) = (\hat{\mathcal{U}}\hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{V}})(X),$$

odnosno, početna T -Sylvesterova jednadžba u operatorskom obliku može se zapisati kao

$$(\hat{\mathcal{L}}_0 + \hat{\mathcal{U}}\hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{V}})(X) = E.$$

Primjenimo li na lijevu stranu standardnu Sherman-Morrison-Woodbury-evu formulu, dobivamo da se rješenje jednadžbe (5.5) može dobiti kao:

$$X = (\hat{\mathcal{L}}_0^{-1} - \hat{\mathcal{L}}_0^{-1}\hat{\mathcal{U}}(\hat{\mathcal{C}}^{-1} + \hat{\mathcal{V}}\hat{\mathcal{L}}_0^{-1}\hat{\mathcal{U}})^{-1}\hat{\mathcal{V}}\hat{\mathcal{L}}_0^{-1})(E). \quad (5.8)$$

U sljedećem teoremu dan je matrični oblik prethodne nejednakosti, takozvana Sherman-Morrison-Woodbury-eva formula za T -Sylvesterovu jednadžbu.

Teorem 5.2.1. *Neka su s $\hat{\mathbb{L}}_0$, $\hat{\mathbb{U}}$, $\hat{\mathbb{C}}$ i $\hat{\mathbb{V}}$ definirane matrice*

$$\hat{\mathbb{L}}_0 = I_n \otimes A_0 + (B_0^T \otimes I_n)\Pi \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}, \quad (5.9)$$

$$\hat{\mathbb{U}} = \begin{bmatrix} I_n \otimes U_1 & V_2^T \otimes I_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2 \times (r_1+r_2)n}, \quad (5.10)$$

$$\hat{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} I_n \otimes C_1 & 0 \\ 0 & C_2^T \otimes I_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(r_1+r_2)n \times (r_1+r_2)n}, \quad (5.11)$$

$$\hat{\mathbb{V}} = \begin{bmatrix} I_n \otimes V_1 \\ (U_2^T \otimes I_n)\Pi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(r_1+r_2)n \times n^2}, \quad (5.12)$$

gdje su $A_0, B_0, U_1, U_2, C_1, C_2, V_1, V_2$ matrice iz (5.5) i Π permutacijska matrica takva da je $\Pi \text{vec}(X) = \text{vec}(X^T)$. Ako su matrice $\hat{\mathbb{C}}$, $\hat{\mathbb{L}}_0$ i $\hat{\mathbb{L}}_0 + \hat{\mathbb{U}}\hat{\mathbb{C}}\hat{\mathbb{V}}$ regularne, tada za rješenje jednadžbe (5.5) vrijedi

$$\text{vec}(X) = (\hat{\mathbb{L}}_0^{-1} - \hat{\mathbb{L}}_0^{-1}\hat{\mathbb{U}}(\hat{\mathbb{C}}^{-1} + \hat{\mathbb{V}}\hat{\mathbb{L}}_0^{-1}\hat{\mathbb{U}})^{-1}\hat{\mathbb{V}}\hat{\mathbb{L}}_0^{-1}) \text{vec}(E). \quad (5.13)$$

Dokaz. Koristeći Kroneckerov produkt i operator vektorizacije, jednadžba (5.5) može se zapisati kao $n^2 \times n^2$ linearna matrična jednadžba

$$(I_n \otimes (A_0 + U_1 C_1 V_1) + ((B_0 + U_2 C_2 V_2)^T \otimes I_n) \Pi) \text{vec}(X) = \text{vec}(E)$$

gdje je Π permutacijska matrica takva da je $\Pi \text{vec}(X) = \text{vec}(X^T)$. Sada se lako vidi da jednadžba (5.5) ima sljedeći matrični prikaz:

$$(\hat{\mathbb{L}}_0 + \hat{\mathbb{U}}\hat{\mathbb{C}}\hat{\mathbb{V}}) \text{vec}(X) = \text{vec}(E).$$

Nakon primjene Sherman-Morrison-Woodbury-jeve formule (vidi Teorem 1.3.2) na maticu prethodnog sustava, dobivamo

$$\begin{aligned} \text{vec}(X) &= (\hat{\mathbb{L}}_0 + \hat{\mathbb{U}}\hat{\mathbb{C}}\hat{\mathbb{V}})^{-1} \text{vec}(E) \\ &= (\hat{\mathbb{L}}_0^{-1} - \hat{\mathbb{L}}_0^{-1} \hat{\mathbb{U}}(\hat{\mathbb{C}}^{-1} + \hat{\mathbb{V}}\hat{\mathbb{L}}_0^{-1} \hat{\mathbb{U}})^{-1} \hat{\mathbb{V}}\hat{\mathbb{L}}_0^{-1}) \text{vec}(E). \end{aligned}$$

□

Primjetimo da su $\hat{\mathbb{L}}_0$, $\hat{\mathbb{U}}$, $\hat{\mathbb{C}}$ i $\hat{\mathbb{V}}$ upravo matrice operatora $\hat{\mathcal{L}}_0$, $\hat{\mathcal{U}}$, $\hat{\mathcal{C}}$ i $\hat{\mathcal{V}}$ u standardnoj bazi, te da je jednakost (3.12) matrična verzija jednakosti (5.8).

Primjedba 5.2.2. *Lako se može provjeriti da je matrica permutacija Π koja se koristi u Teoremu 5.2.1 za koju vrijedi $\Pi \text{vec}(X) = \text{vec}(X^T)$ oblika*

$$\Pi = \sum_{1 \leq i, j \leq n} e_i e_j^T \otimes e_j e_i^T.$$

Primjedba 5.2.3. *Primjetimo da (slično kao u Primjedbi 3.1.2), kada ne bismo pretpostavili da je matrica $\hat{\mathbb{C}}$ regularna, jednakosti analogne formuli (5.13) dobili bismo koristeći formule (1.13)-(1.18):*

$$\begin{aligned} \text{vec}(X) &= (\hat{\mathbb{L}}_0^{-1} - (I + \hat{\mathbb{L}}_0^{-1} \hat{\mathbb{U}}\hat{\mathbb{C}}\hat{\mathbb{V}})^{-1} \hat{\mathbb{L}}_0^{-1} \hat{\mathbb{U}}\hat{\mathbb{C}}\hat{\mathbb{V}}\hat{\mathbb{L}}_0^{-1}) \text{vec}(E), \\ \text{vec}(X) &= (\hat{\mathbb{L}}_0^{-1} - \hat{\mathbb{L}}_0^{-1} (I + \hat{\mathbb{U}}\hat{\mathbb{C}}\hat{\mathbb{V}}\hat{\mathbb{L}}_0^{-1})^{-1} \hat{\mathbb{U}}\hat{\mathbb{C}}\hat{\mathbb{V}}\hat{\mathbb{L}}_0^{-1}) \text{vec}(E), \\ \text{vec}(X) &= (\hat{\mathbb{L}}_0^{-1} - \hat{\mathbb{L}}_0^{-1} \hat{\mathbb{U}}(I + \hat{\mathbb{C}}\hat{\mathbb{V}}\hat{\mathbb{L}}_0^{-1} \hat{\mathbb{U}})^{-1} \hat{\mathbb{C}}\hat{\mathbb{V}}\hat{\mathbb{L}}_0^{-1}) \text{vec}(E), \\ \text{vec}(X) &= (\hat{\mathbb{L}}_0^{-1} - \hat{\mathbb{L}}_0^{-1} \hat{\mathbb{U}}\hat{\mathbb{C}}(I + \hat{\mathbb{V}}\hat{\mathbb{L}}_0^{-1} \hat{\mathbb{U}}\hat{\mathbb{C}})^{-1} \hat{\mathbb{V}}\hat{\mathbb{L}}_0^{-1}) \text{vec}(E), \\ \text{vec}(X) &= (\hat{\mathbb{L}}_0^{-1} - \hat{\mathbb{L}}_0^{-1} \hat{\mathbb{U}}\hat{\mathbb{C}}\hat{\mathbb{V}}(I + \hat{\mathbb{L}}_0^{-1} \hat{\mathbb{U}}\hat{\mathbb{C}}\hat{\mathbb{V}})^{-1} \hat{\mathbb{L}}_0^{-1}) \text{vec}(E), \\ \text{vec}(X) &= (\hat{\mathbb{L}}_0^{-1} - \hat{\mathbb{L}}_0^{-1} \hat{\mathbb{U}}\hat{\mathbb{C}}\hat{\mathbb{V}}\hat{\mathbb{L}}_0^{-1} (I + \hat{\mathbb{U}}\hat{\mathbb{C}}\hat{\mathbb{V}}\hat{\mathbb{L}}_0^{-1})^{-1}) \text{vec}(E). \end{aligned}$$

Nadalje pretpostavljamo da su C_1 i C_2 regularne kvadratne matrice. Tada bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su $C_1 = I_{r_1}$ i $C_2 = I_{r_2}$, odnosno da je $\hat{\mathbb{C}}$ jedinična matrica.

5.2.1 Algoritam za rješavanje T -Sylvesterove jednadžbe koristeći S-M-W formulu

Računanje rješenja T -Sylvesterove jednadžbe (5.5) koristeći formulu (5.13) standardnim metodama za rješavanje linearnih sustava je složenosti $\mathcal{O}(n^6)$ operacija, no matrice u jednakosti (5.13) su specijalno strukturirane, što omogućava vrlo efikasno računanje matrice X .

U Algoritmu 7 dana je procedura za računanje rješenja T -Sylvesterove jednadžbe (5.5) koristeći formulu (5.13) pri čemu je uvažena struktura matrica. Procedura je vrlo slična kao i u slučaju Sylvesterove jednadžbe. Dijelovi u formuli koji se trebaju pažljivo izračunati koristeći strukturu su produkti matrica $\hat{\mathbb{L}}_0^{-1}$, $\hat{\mathbb{U}}$, $\hat{\mathbb{V}}$ i $(I + \hat{\mathbb{V}}\hat{\mathbb{L}}_0^{-1}\hat{\mathbb{U}})^{-1}$ s vektorima.

Algoritam 7 Osnovna procedura za računanje rješenja jednadžbe (5.5) koristeći Sherman-Morrison-Woodbury-jevu formulu (5.13)

Ulaz: $A_0, B_0, E \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U_1, V_1^T \in \mathbb{R}^{n \times r_1}$, $U_2, V_2^T \in \mathbb{R}^{n \times r_2}$

Izlaz: $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- 1: Riješiti sustav $\hat{\mathbb{L}}_0 x_1 = \text{vec}(E)$
 - 2: Izračunati $x_2 = \hat{\mathbb{V}} x_1$
 - 3: Riješiti $(I + \hat{\mathbb{V}}\hat{\mathbb{L}}_0^{-1}\hat{\mathbb{U}})x_3 = x_2$
 - 4: Izračunati $x_4 = \hat{\mathbb{U}} x_3$
 - 5: Riješiti sustav $\hat{\mathbb{L}}_0 x_5 = x_4$
 - 6: $\text{vec}(X) = x_1 - x_5$
-

Izgradimo sada procedure za računanje pojedinih koraka u Algoritmu 7.

Ako $\hat{\mathbb{L}}_0^{-1}$ nije unaprijed dano, tada računanje $x = \hat{\mathbb{L}}_0^{-1}y$, odnosno rješavanje sustava $\hat{\mathbb{L}}_0 x = y$ zbog specijalne strukture od $\hat{\mathbb{L}}_0$ dane u (5.9) ekvivalentno je rješavanju T -Sylvesterove jednadžbe

$$A_0 \hat{X} + \hat{X}^T B_0 = \hat{Y}, \quad (5.14)$$

gdje je $\text{vec}(\hat{X}) = x$ i $\text{vec}(\hat{Y}) = y$. Složenost rješavanja te jednadžbe s algoritmom opisanim u poglavlju 5.1.1 je $76n^3$. Ako A_0 i B_0 imaju neku pogodnu strukturu, broj operacija može biti značajno reduciran. Primjerice, ako su A_0 i B_0 blok dijagonalne matrice s malim blokovima na dijagonali, složenost je $\mathcal{O}(n^2)$ operacija. Za dijagonalne matrice A_0 i B_0 potreban broj elementarnih operacija je $16/3n^2$.

Množenje matrica $\mathbb{U}$ i $\mathbb{V}$ vektorima $x \in \mathbb{R}^{(r_1+r_2)n}$ i $y \in \mathbb{R}^{n^2}$ u koracima 2 i 4 može se izvršiti na sljedeći način:

$$\hat{\mathbb{U}}x = \begin{bmatrix} I_n \otimes U_1 & V_2^T \otimes I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{vec}(\hat{X}_1) \\ \text{vec}(\hat{X}_2) \end{bmatrix} = \text{vec}(U_1 \hat{X}_1 + \hat{X}_2 V_2), \quad (5.15)$$

gdje je $\hat{X}_1 \in \mathbb{R}^{r_1 \times n}$, $\text{vec}(\hat{X}_1) = x(1 : r_1 n)$ i $\hat{X}_2 \in \mathbb{R}^{n \times r_2}$, $\text{vec}(\hat{X}_2) = x(r_1 n + 1 : (r_1 + r_2)n)$, te

$$\hat{V}y = \begin{bmatrix} I_n \otimes V_1 \\ (U_2^T \otimes I_n)\Pi \end{bmatrix} \text{vec}(\hat{Y}) = \begin{bmatrix} (I_n \otimes V_1) \text{vec}(\hat{Y}) \\ (U_2^T \otimes I_n)\Pi \text{vec}(\hat{Y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{vec}(V_1 \hat{Y}) \\ \text{vec}(\hat{Y}^T U_2) \end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

gdje je $\hat{Y} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{vec}(\hat{Y}) = y$.

Lako se može vidjeti da je broj računskih operacija koji je potreban za računanje svakog od produkata $\mathbb{U}x$ i $\mathbb{V}y$ jednak $2n^2(r_1 + r_2)$.

Za korak 3 općenito je najprije potrebno formirati matricu $\hat{\Delta} := \hat{\mathbb{V}}\hat{\mathbb{L}}_0^{-1}\hat{\mathbb{U}}$. Budući da su matrice $\hat{\mathbb{U}}$, $\hat{\mathbb{V}}$ i $\hat{\mathbb{L}}_0$ matrice velikih dimenzija u odnosu na n , za veće dimenzije ne možemo ih pomnožiti direktno nego trebamo proceduru za formiranje matrice $\hat{\Delta}$ bez formiranja matrica $\hat{\mathbb{U}}$, $\hat{\mathbb{V}}$, $\hat{\mathbb{L}}_0^{-1}$ i njihovog direktnog množenja. Svaki stupac produkta $\hat{\mathbb{L}}_0^{-1}\hat{\mathbb{U}}$, odnosno vektor $\text{vec}(\hat{X}_i) := \hat{\mathbb{L}}_0^{-1}\hat{\mathbb{U}}(:, i)$ može se dobiti kao rješenje T -Sylvesterove jednadžbe

$$A_0 \hat{X}_i + (\hat{X}_i)^T B_0 = \hat{\mathbb{U}}_i,$$

gdje je $\text{vec}(\hat{\mathbb{U}}_i) = \hat{\mathbb{U}}(:, i)$, $i = 1, \dots, (r_1 + r_2)n$. Nadalje, množenje matricom $\hat{\mathbb{V}}$ može se izvršiti na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \hat{\Delta} &= \hat{V} \begin{bmatrix} \text{vec}(\hat{X}_1) & \text{vec}(\hat{X}_2) & \cdots & \text{vec}(\hat{X}_{(r_1+r_2)n}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \text{vec}(V_1 \hat{X}_1) & \text{vec}(V_1 \hat{X}_2) & \cdots & \text{vec}(V_1 \hat{X}_{(r_1+r_2)n}) \\ \text{vec}(\hat{X}_1^T U_2) & \text{vec}(\hat{X}_2^T U_2) & \cdots & \text{vec}(\hat{X}_{(r_1+r_2)n}^T U_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Ako s N označimo broj operacija potrebnih za rješavanje T -Sylvesterove jednadžbe (5.14), onda je ukupan broj operacija potrebnih za formiranje matrice $\hat{\Delta}$ jednak $(2n^2(r_1 + r_2) + N)n(r_1 + r_2)$. Radi jednostavnosti, ako je $r_1 = r_2 =: r$ onda je broj potrebnih operacija jednak $8n^3r^2 + 2rnN$. Primjerice, ako su A_0 i B_0 dijagonalne matrice, onda se svaki $\hat{X}_i$ može izračunati u $\frac{16}{3}n^2$ operacija, pa je broj operacija potrebnih da se formira matrica Δ jednak $8n^3r(r + \frac{4}{3})$.

5.3 Algoritam za računanje rješenja parametarski ovisne T -Sylvesterove jednadžbe

Jedan od slučajeva kada je korisno imati Sherman-Morrison-Woodbury-jevu formulu je slučaj višestrukog računanja i/ili optimizacije rješenja parametarski ovisne T -Sylvesterove jednadžbe

$$(A_0 - vU_1V_1)X(v) + X(v)^T(B_0 - vU_2V_2) = E, \quad (5.18)$$

gdje su $v \in \mathbb{R}$, $A_0, B_0, E \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U_1, V_1^T \in \mathbb{R}^{n \times r_1}$, $U_2, V_2^T \in \mathbb{R}^{n \times r_2}$. Nadalje pretpostavljamo da jednadžba (5.18) ima jedinstveno rješenje za svaki $v \in \mathbb{R}$ (odnosno na skupu vrijednosti od v koji promatramo).

U prethodnom poglavlju koristeći Sherman-Morrison-Woodbury-jevu formulu dokazano je da je rješenje jednadžbe (5.18) dano s

$$\text{vec}(X) = (\hat{\mathbb{L}}_0^{-1} + v\hat{\mathbb{L}}_0^{-1}\hat{\mathbb{U}}(I - v\hat{\Delta})^{-1}\hat{\mathbb{V}}\hat{\mathbb{L}}_0^{-1}) \text{vec}(E). \quad (5.19)$$

gdje je $\hat{\Delta} = \hat{\mathbb{V}}\hat{\mathbb{L}}_0^{-1}\hat{\mathbb{U}}$, a $\hat{\mathbb{L}}_0$, $\hat{\mathbb{U}}$ i $\hat{\mathbb{V}}$ su definirani formulama (5.9) – (5.12).

U svrhu efikasnog računanja ($\text{vec } X(v)$) koristeći formulu (5.19), računanje produkta matrica $\hat{\mathbb{U}}$ i $\hat{\mathbb{V}}$ s vektorom može se provesti kao u (5.15) i (5.16), tj.

$$\hat{\mathbb{U}}x = \text{vec}(U_1\hat{X}_1 + \hat{X}_2U_2), \quad \hat{\mathbb{V}}y = \begin{bmatrix} \text{vec}(V_1\hat{Y}) \\ \text{vec}(\hat{Y}^TU_2) \end{bmatrix}$$

gdje je $\hat{X}_1 \in \mathbb{R}^{r_1 \times n}$, $\text{vec}(\hat{X}_1) = x(1 : r_1n)$ i $\hat{X}_2 \in \mathbb{R}^{n \times r_2}$, $\text{vec}(\hat{X}_2) = x(r_1n + 1 : (r_1 + r_2)n)$, te $\hat{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\text{vec}(\hat{Y}) = y$. Rješavanje linearnog sustava $\hat{\mathbb{L}}_0x = y$ može se izvršiti koristeći formulu (5.14) kao

$$A_0\hat{X} + \hat{X}^TB_0 = \hat{Y},$$

gdje je $\text{vec } \hat{X} = x$ i $\text{vec } \hat{Y} = y$. Za rješavanje sustava s matricom $(I - v\hat{\Delta})$ može se koristiti redukcija matrice Δ na Hessenbergovu formu ili neka aproksimacijska metoda kao što je primjerice FOM metoda.

U Algoritmu 8 dana je cijela procedura za rješavanje parametarski ovisne T -Sylvesterove jednadžbe (5.18).

Složenost procedure za računanje $\text{vec}(X(v))$

Izbrojimo broj elementarnih operacija potreban za svaki korak Algoritma 8. U prvom koraku se provodi Arnoldijeva procedura koja ima složenost $4(r_1 + r_2)n^2k + Nk + (r_1 + r_2)nk(2k + 7)$. Nadalje, svaki od koraka 2 i 6 ima složenost N , dok je za korak 4 potrebno $2(r_1 + r_2)nk + \mathcal{O}(k^2)$ elementarnih operacija. Naposljetku, za korake 3 i 5

Algoritam 8 Algoritam za računanje rješenja parametarski ovisne T -Sylvesterove jednadžbe (5.18)

Ulaz: $v \in \mathbb{R}$, $A_0, B_0, E \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U_1, V_1^T \in \mathbb{R}^{n \times r_1}$, $U_2, V_2^T \in \mathbb{R}^{n \times r_2}$.

Izlaz: Rješenje $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jednadžbe (5.18)

- 1: Koristeći Algoritam 1 formirati matrice H_k i U_k
 - 2: Riješiti T -Sylvesterovu jednadžbu $A_0 \hat{X} + \hat{X}^T B_0 = E$ i postaviti $x_1 := \text{vec}(\hat{X})$
 - 3: Postaviti $\hat{Y} = \text{reshape}(x_1, n, n)$. Izračunati $x_2(1 : r_1 n) = \text{vec}(V_1 \hat{Y})$, $x_2(r_1 n + 1 : (r_1 + r_2)n) = \text{vec}(\hat{Y}^T U_2)$
 - 4: Riješiti Hessenbergov sustav $(I - v H_k)x = U_k^T x_2$. Postaviti $x_3 = U_k x$.
 - 5: Postaviti $\hat{X}_1 = \text{reshape}(x_3(1 : r_1 n), r_1, n)$, $\hat{X}_2 = \text{reshape}(x_3(r_1 n + 1 : (r_1 + r_2)n), n, r_2)$. Izračunati $x_4 = \text{vec}(U_1 \hat{X}_1 + \hat{X}_2 V_2)$
 - 6: Postaviti $\hat{E} = \text{reshape}(x_4, n, n)$. Riješiti T -Sylvesterovu jednadžbu $A_0 Y + Y^T B_0 = \hat{E}$ i postaviti $x_5 = \text{vec}(Y)$
 - 7: Postaviti $x = x_1 - v \cdot x_5$; $X = \text{reshape}(x, n, n)$
-

redom je potrebno $2(r_1 + r_2)n^2$ i $2(r_1 + r_2)n(n + k)$. Zbog jednostavnosti ilustracije, pretpostavimo da je $r_1 = r_2 =: r$ i da su A_0 i B_0 blok dijagonalne matrice s malim blokovima na dijagonali tako da se jednadžba $A_0 \hat{X} + \hat{X}^T B_0 = \hat{Y}$, može riješiti u tn^2 operacija. U Tablici 5.1 sažeto je prikazan je broj operacija potreban za svaki korak procedure.

Korak	Izraz	Broj operacija
1:	$\hat{\Delta} = U_k H_k U_k^T$	$(8r + t)n^2 k + 2rnk(2k + 7)$
2:	$x_1 = \hat{\mathbb{L}}_0^{-1} \text{vec}(E)$	tn^2
3:	$x_2 = \hat{\mathbb{V}} x_1$	$4rn^2$
4:	$x_3 = (I - v H_k)^{-1} U_k^T x_2$	$4rnk + \mathcal{O}(k^2)$
5:	$x_4 = \hat{\mathbb{U}} U_k x_3$	$4rn^2 + 4rnk$
6:	$x_5 = \hat{\mathbb{L}}_0^{-1} x_4$	tn^2

Tablica 5.1: Distribucija broja operacija potrebnih za računanje $\text{vec}(X(v))$

Sada slijedi da je broj operacija potreban za računanje $\text{vec}(X(v))$ za prvu vrijednost parametra v jednak $2(4rk + 4r + 4k + t)n^2 + \mathcal{O}(rnk)$. Za svaku dodatnu evaluaciju od $\text{vec}(X(v))$ potrebno je izračunati samo izraze 4 – 6, a to se može izvesti u $(4r + t)n^2 + \mathcal{O}(rnk)$ operacija.

Potpuno analogno algoritmu za problem optimizacije parametarski ovisne Sylvesterove jednadžbe (Poglavlje 4), može se izgraditi i algoritam za optimizaciju parametarski ovisne T -Sylvesterove jednadžbe.

5.4 Optimizacija rješenja parametarski ovisne T -Sylvesterove jednadžbe

Pristupom sličnim kao u slučaju Sylvesterove jednadžbe, za parametarski ovisnu T -Sylvesterovu jednadžbu (5.18) moguće je napraviti efikasnu proceduru za optimizaciju rješenja $X(v)$ s obzirom na parametar $v \in \mathbb{R}$.

Koristeći formulu (5.19), prva i druga derivacija od $\text{vec}(X(v))$ dane su s

$$\begin{aligned} \text{vec}(X'(v)) &= (\hat{\mathbb{L}}_0^{-1} \hat{\mathbb{U}} (I - v \hat{\Delta})^{-1} \hat{\mathbb{V}} \hat{\mathbb{L}}_0^{-1} + \\ &\quad + v \hat{\mathbb{L}}_0^{-1} \hat{\mathbb{U}} (I - v \hat{\Delta})^{-1} \hat{\Delta} (I - v \hat{\Delta})^{-1} \hat{\mathbb{V}} \hat{\mathbb{L}}_0^{-1}) \text{vec}(E) \end{aligned} \quad (5.20)$$

i

$$\begin{aligned} \text{vec}(X''(v)) &= 2(\hat{\mathbb{L}}_0^{-1} \hat{\mathbb{U}} (I - v \hat{\Delta})^{-1} \hat{\Delta} (I - v \hat{\Delta})^{-1} \hat{\mathbb{V}} \hat{\mathbb{L}}_0^{-1} + \\ &\quad + v \hat{\mathbb{L}}_0^{-1} \hat{\mathbb{U}} ((I - v \hat{\Delta})^{-1} \hat{\Delta})^2 (I - v \hat{\Delta})^{-1} \hat{\mathbb{V}} \hat{\mathbb{L}}_0^{-1}) \text{vec}(E). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Sada se lako može vidjeti da nakon što se koristeći formulu (5.13) izračuna $X(v)$, broj dodatnih operacija potreban da bi se izračunalo $X'(v)$ i $X''(v)$ za svaku je jednak $\mathcal{O}(rn^2)$. Jednostavnost računanja derivacija implicira efikasnost korištenja Algoritma 8 također i pri optimizaciji rješenja jednadžbe (5.18) s obzirom na parametar $v \in \mathbb{R}$ primjenom neke od metoda za optimizaciju diferencijabilnih funkcija.

Kriterij koji ćemo koristiti za optimizaciju bit će minimalni trag rješenja $X(v)$, odnosno želimo napraviti algoritam za minimizaciju funkcije $v \mapsto \text{tr}(X(v))$, gdje je $X(v)$ rješenje jednadžbe (5.18). Primjetimo da zbog pretpostavke $m = n$, trag od $X(v)$ uvijek postoji.

Kako je $\frac{d}{dv} \text{tr}(X(v)) = \text{tr}(\frac{d}{dv} X(v))$, slijedi da prva i druga derivacija od $\text{tr}(X(v))$ mogu izračunati iz formula (5.20) i (5.21) u malo operacija, te se optimizacijski proces može provesti koristeći neku od metoda za minimizaciju derivabilnih funkcija kao što je primjerice Newtonova metoda.

$\text{tr}(X(v))$ može se izračunati koristeći Algoritam 8 u $8(rk + r + k)n^2 + 2N + \mathcal{O}(rnk)$ operacija, a svaka dodatna evaluacija od $\text{tr}(X(v))$ može se dobiti u $4rn^2 + N + \mathcal{O}(rnk)$ operacija.

Dodatne evaluacije mogu se izvršiti još efikasnije. Naime, jednakost

$$\text{tr}(X(v)) = \text{vec}(I)^T \text{vec}(X)$$

može se zapisati u obliku

$$\text{tr}(X(v)) = x_0 + v a_L^T (I - v \hat{\Delta})^{-1} a_R, \quad (5.22)$$

gdje je

$$\begin{aligned} x_0 &= \text{vec}(I)^T \widehat{\mathbb{L}}_0^{-1} \text{vec}(E) \in \mathbb{R}, \\ a_L &= \widehat{\mathbb{U}}^T \widehat{\mathbb{L}}_0^{-T} \text{vec}(I) \in \mathbb{R}^{(r_1+r_2)n}, \\ a_R &= \widehat{\mathbb{V}} \widehat{\mathbb{L}}_0^{-1} \text{vec}(E) \in \mathbb{R}^{(r_1+r_2)n}. \end{aligned}$$

Sada se lako vidi da za svaku dodatnu evaluaciju od $\text{tr}(X(v))$ treba riješiti sustav $(I - vH_k)U_k^T x = U_k^T a_R$ i rezultat pomnožiti vektorom a_L , pa je broj operacija potreban za svaku dodatnu evaluaciju jednak $4(2k+1)rn + \mathcal{O}(k^2)$.

Prva i druga derivacija funkcije $F(v) := \text{tr}(X(v))$ dane s

$$\begin{aligned} F'(v) &= a_L^T (I - v\Delta)^{-1} a_R + v a_L^T (I - v\Delta)^{-1} \Delta (I - v\Delta)^{-1} a_R, \\ F''(v) &= 2a_L^T (I - v\Delta)^{-1} \Delta (I - v\Delta)^{-1} a_R + 2v a_L^T ((I - v\Delta)^{-1} \Delta)^2 (I - v\Delta)^{-1} a_R, \end{aligned}$$

te se one mogu izračunati u dodatnih $20rnk + \mathcal{O}(k^2)$ operacija.

Sada kada imamo efikasne metode za računanje derivacija od $\text{tr}(X(v))$, optimizacija vrijednosti od $\text{tr}(X(v))$ može se napraviti koristeći primjerice Newtonov minimizacijski proces.

5.5 Numerički primjeri

U ovom poglavlju usporedit ćemo standardni algoritam za rješavanje T -Sylvesterove jednadžbe - Algoritam 6 s Algoritmom 7 opisanim u Poglavljju 5.2.1 s obzirom na preciznost i broj elementarnih operacija.

Primjer 2. U ovom primjeru promatramo problem efikasnog rješavanja parametarski ovisne T -Sylvesterove jednadžbe

$$(A_0 + vU_1V_1)X + X^T(B_0 + vU_2V_2) = E. \quad (5.23)$$

Usporedit ćemo reziduale i broj računskih operacija za Algoritam 6 (koji je nadalje označen s **GSchur**) i i Algoritam 7 koji se zasniva na formuli (5.13). Linearni sustav $(I + \widehat{\Delta})x = y$ koji se javlja u koraku 3 Algoritma 7 bit će riješen koristeći redukciju matrice $\widehat{\Delta}$ na Hessenbergovu formu (oznaka **SMW-exact**) i FOM metodom (oznaka **SMW-approx**) kao u Algoritmu 8. Rješavat ćemo jednadžbu sa sljedećim matricama

$$\begin{aligned} A_0 &= \text{rand}(n), \quad B_0 = A_0 - 5I, \\ U_1 &= [\text{rand}(n, 1), e_2], \quad U_2 = [\text{rand}(n, 1), \text{rand}(n, 1)], \quad V_1 = V_2 = U_1^T. \end{aligned}$$

Dobiveni rezultati prikazani su u Tablici 5.2, pri čemu d označava red matrice $\hat{\Delta}$. Vrijednosti r_S, r_E, r_A su reziduali $\|(A_0 + vU_1V_1)X + X^T(B_0 + vU_2V_2) - E\|$, pri čemu je X dobiven redom metodom **GSchur**, **SMW-exact** i **SMW-approx**. U stupcu **SMW-approx**, k označava dimenziju Krylovljevog potprostora u FOM.

Dimension	GSchur	SMW-exact	SMW-approx
$n = 50$ ($d = 200$)	$r_S = 2.3 \cdot 10^{-14}$	$r_E = 3.1 \cdot 10^{-14}$	$k = 15, r_A = 1.1 \cdot 10^{-4}$ $k = 25, r_A = 4.6 \cdot 10^{-10}$
$n = 100$ ($d = 400$)	$r_S = 1.1 \cdot 10^{-13}$	$r_E = 2.1 \cdot 10^{-13}$	$k = 20, r_A = 1.1 \cdot 10^{-6}$ $k = 30, r_A = 2.9 \cdot 10^{-11}$
$n = 150$ ($d = 600$)	$r_S = 5.1 \cdot 10^{-13}$	$r_E = 1.6 \cdot 10^{-12}$	$k = 20, r_A = 5.2 \cdot 10^{-5}$ $k = 30, r_A = 3.2 \cdot 10^{-11}$

Tablica 5.2: Usporedba točnosti metoda **GSchur**, **SMW-exact** i **SMW-approx**

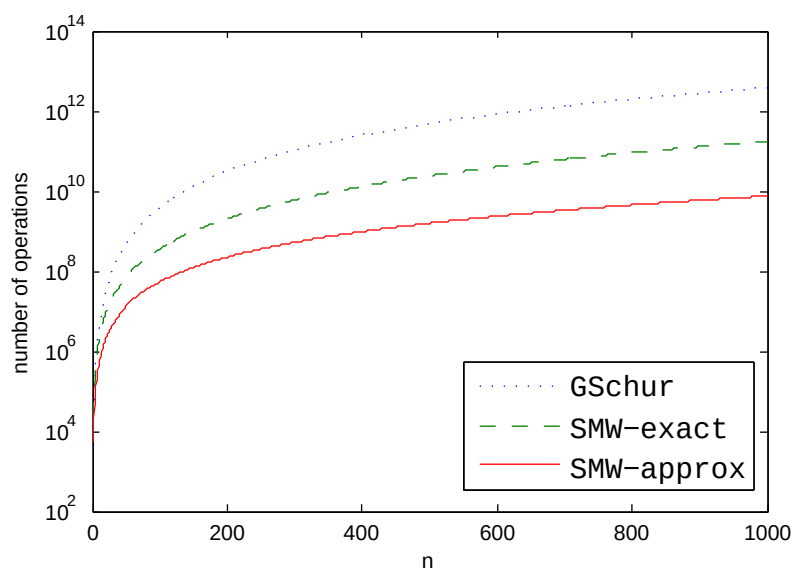
Nadalje, promotrimo broj elementarnih operacija potrebnih za rješavanje jednadžbe (5.23) više puta s različitim vrijednostima parametra $v \in \mathbb{R}$. Primjerice, takav problem se javlja pri optimizaciji rješenja $X(v)$ s obzirom na parametar $v \in \mathbb{R}$.

Metoda **GSchur** ima složenost $76n^3$ za svaku vrijednost od v .

Računanje rješenja jednadžbe (5.23) kada se sustav s matricom $(I + v\hat{\Delta})$ rješava redukcijom matrice $\hat{\Delta}$ na Hessenbergovu formu (**SMW-exact**) za prvu vrijednost od v ima složenost $\mathcal{O}(r^3n^3)$, a svako sljedeće rješavanje jednadžbe (5.23) s drugom vrijednošću v ima složenost $\mathcal{O}(r^2n^2)$.

Ako se sustav s matricom $(I + v\hat{\Delta})$ rješava FOM metodom kao u **SMW-approx**, tada je broj operacija potreban za prvo rješavanje jednadžbe (5.23) jednak $\mathcal{O}(rkn^2)$, a svako sljedeće rješavanje jednadžbe (5.23) s drugom vrijednošću od v ima složenost $\mathcal{O}(rn^2)$.

Na Slici 5.1 prikazan je rast broja elementarnih operacija za sve tri metode kada se jednadžba (5.23) rješava sto puta s različitim vrijednostima od v . Dimenzija k Krylovljevog potprostora u FOM method uzeta je $n/10$.



Slika 5.1: Rast broja elementarnih operacija za GSchur, SMW-exact i SMW-approx algoritme

Poglavlje 6

Optimizacija parametara pri modalnom prigušenju

Postoji veliki broj parametarski ovisnih matričnih jednadžbi koje opisuju razne fizikalne modele. Jedan od važnijih primjera takvih modela su linearni vibracijski sustavi kod kojih su parametri vezani za prigušenje.

U ovom poglavlju promatra se optimizacija rješenja parametarski ovisne Ljapunovljeve jednadžbe koja dolazi iz problema optimalnog prigušenja sustava kada pretpostavimo da je matrica prigušenja oblika $D = f(M, K; a)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Tada je problem optimalnog prigušenja s obzirom na kriterij minimalne prosječne ukupne energije ekvivalentan problemu određivanja optimalnog rješenja parametarski ovisne Ljapunovljeve jednadžbe

$$A(a)X(a) + X(a)A^T(a) = -Z$$

s obzirom na parametre $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tako da vrijedi $\text{tr}(X) \rightarrow \min$.

6.1 Identifikacija i optimizacija modalnog prigušenja

Kao što je već rečeno u poglavlju 2.3.2, pri proučavanju dinamičkih sustava opisanih jednadžbom

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = 0 \tag{6.1}$$

vrlo važan problem koji se javlja je analiza titranja sustava koje se javlja kao odgovor na pomak sustava iz položaja ravnoteže.

Sastavni dio tog problema je problem konstrukcije matrice prigušenja D .

U ovom poglavlju pretpostavljamo da sustav nema vanjskog prigušenja, odnosno da se matrica prigušenja D sastoji samo od komponente unutarnjeg prigušenja, $D = C_u$.

Problem konstrukcije matrice unutarnjeg prigušenja D u jednadžbi (6.1) sastoji se od dva dijela. Prvi dio odnosi se na problem odabira oblika matrice D kojime se prigušenje u promatranom problemu modeliranom jednadžbom (6.1) opisuje na najbolji mogući način. Općenito, matrica prigušenja je oblika

$$D = f(M, K; \alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad (6.2)$$

gdje je f neka dana funkcija. Za većinu praktičnih problema ovog tipa postoji uvriježen fizikalno opravdan oblik prigušenja koji se najčešće koristi. Opravdanost konkretnog odabira funkcije f za primjere koji će se promatrati u ovom poglavlju je izvan našeg interesa.

Sljedeći modeli prigušenja često se koriste u problemima različitog tipa:

- 1) prigušenje proporcionalno masi: $D = \alpha M$ (vidi primjerice [55, 52, 54]);
- 2) prigušenje proporcionalno krutosti: $D = \beta K$ (vidi primjerice [16, 72]);
- 3) Rayleigh-evo ili proporcionalno prigušenje: $D = \alpha M + \beta K$ (vidi primjerice [75, 42, 53, 51]);
- 4) Generalizirano proporcionalno prigušenje:

$$D = M f_1(M^{-1}K) + K f_2(K^{-1}M)$$

gdje su f_1 i f_2 analitičke funkcije u okolini svih svojstvenih vrijednosti matrica u argumentima (vidi [2]).

Svi navedeni modeli prigušenja imaju svojstvo da se pripadna matrica prigušenja može istovremeno dijagonalizirati kongruencijom kao i par (M, K) , tj. da postoji regularna matrica Φ takva da su $\Phi^T M \Phi$, $\Phi^T K \Phi$ i $\Phi^T D \Phi$ dijagonalne matrice. Takvi sustavi nazivaju se modalno prigušeni sustavi (vidi primjerice [19, 69, 68]). Nužan i dovoljan uvjet da bi se pozitivno definitne matrice M, D, K mogle istovremeno dijagonalizirati je da je (vidi [18, 69])

$$KM^{-1}C = CM^{-1}K.$$

Druga karakterizacija, dana u [2], je da se D može prikazati kao

$$D = M f_1(M^{-1}K) + K f_2(K^{-1}M), \quad (6.3)$$

gdje su f_1 i f_2 analitičke funkcije u okolini svih svojstvenih vrijednosti matrica koje su im argumenti, tj. f_1 u okolini ω_j^2 , $j = 1, \dots, n$, a f_2 u okolini $1/\omega_j^2$, $j = 1, \dots, n$, gdje su $\omega_1, \dots, \omega_n$ neprigušene vlastite frekvencije promatranog sustava.

Nakon što je odabran oblik prigušenja, tj. kada je odabrana funkcija f u (6.2) ili funkcije f_1 i f_2 u (6.3), sljedeći problem je problem određivanja parametara $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Taj problem se može promatrati na dvije razine. Želimo li modelirati ponašanje konkretnog objekta koji ima svoje (nama nepoznato) prigušenje, potrebno je identificirati parametre. Identifikacija se radi pomoću eksperimentalnih mjerenja veličina koje su potrebne za identifikacijsku metodu. Primjerice, u [1, 2] predložena je jednostavna metoda identifikacije za generalizirano proporcionalno prigušenje za koje je potrebno mjerenje prirodnih frekvencija i faktora prigušenja. Također, u [1] dan je popis i odgovarajuće reference za današnje *state of the art* metode identifikacije.

Druga mogućnost je da promatramo razna moguća prigušenja nekog modela objekta, odnosno razne prototipove. Primjerice, simuliramo ponašanje zgrade pri potresu mijenjajući materijal od kojega je napravljena. Prilikom takvih analiza dobro je znati što je najbolje moguće ponašanje, odnosno koje prigušenje je optimalno.

U tom slučaju problem određivanja parametara reducira se na problem određivanja optimalnih parametara $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ s obzirom na neki optimizacijski kriterij.

Mnogo je optimizacijskih kriterija za ovakav optimizacijski problem. Generalno, kriteriji se mogu podijeliti u dvije skupine.

Prvu skupinu čine kriteriji koji se odnose na spektar matrice A dobivene linearizacijom sustava (vidi (2.12)). U navedenu skupinu kriterija pripadaju kriterij minimalne spektralne apscise koji se odnosi na minimizaciju funkcije $\max_i \operatorname{Re}(\lambda_i)$, gdje su λ_i , $i = 1, \dots, 2n$ svojstvene vrijednosti matrice A (vidi primjerice [20, 26, 46]). Ovaj optimizacijski problem može se promatrati bez ograničenja ili uz dodatni zahtjev $|\max_i \operatorname{Im}(\lambda_i)| \leq a$, gdje je a neki pozitivan broj (vidi [11]). Drugi korišteni kriterij ovog tipa je kriterij koji zahtjeva minimizaciju funkcije $\max_i \frac{\operatorname{Re}(\lambda_i)}{|\lambda_i|}$ (vidi [45, 46]). Kriterijima vezanim za spektar matrice A može se pridružiti i kriterij minimizacije tzv. zaglađene spektralne apscise (vidi [66]) koji je pokušaj prevladavanja problema s nediferencijabilnošću funkcija u prethodno navedenim kriterijima.

Druga skupina kriterija odnosi se na matricu X koja je rješenje sustavu pripadne Ljapunovljeve jednadžbe (vidi primjerice [7, 20, 21, 46])

$$AX + XA^T = -Z,$$

gdje je A oblika (2.12). U ovoj kategoriji možemo promatrati tri kriterija optimalnosti:

- a) kriterij minimalnog $\operatorname{tr}(X)$;
- b) kriterij minimalne $\|X\|_2$;
- c) kriterij minimalne $\|X\|_F$.

Kriteriji a), b) i c) su kriteriji s diferencijabilnim konveksnim funkcijama koje se trebaju minimizirati, što je značajna prednost u usporedbi s kriterijima iz prve skupine.

U ovom poglavlju promatrat će se razni modeli proporcionalnog i generaliziranog proporcionalnog prigušenja i izvesti optimalni parametri s obzirom na optimizacijske kriterije a), b) i c). Također, usporedit će se neki specifični problemi s obzirom na procijenjene i optimalne parametre.

6.2 Modalno prigušenje i parametarski ovisna Ljapunovljeva jednadžba

Promatramo modalno prigušenje, odnosno pretpostavljamo da se matrica prigušenja

$$D = f(M, K; \alpha_1, \dots, \alpha_k),$$

može dijagonalizirati s istom matricom Φ kao i par (M, K) , odnosno da je oblika

$$D = M f_1(M^{-1}K) + K f_2(K^{-1}M),$$

kao u (6.3).

Želimo odrediti optimalne parametre $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ koji osiguravaju optimalno prigušenje oblika (6.3) s obzirom na kriterije a), b) i c) minimalnog traga, minimalne spektralne norme i minimalne Frobeniusove norme.

Za svaki od tih kriterija potrebno je odrediti rješenje pripadne Ljapunovljeve jednadžbe

$$AX + XA^T = -Z. \quad (6.4)$$

ovisno o izboru oblika matrice D definirane s (6.3).

U tu svrhu neka je Φ matrica koja istovremeno dijagonalizira matrice M i K , tj. takva da je $\Phi^T M \Phi = I$ i $\Phi^T K \Phi = \Omega^2$, gdje je $\Omega = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_n)$, pri čemu su $0 < \omega_1 \leq \dots \leq \omega_n$. Lako se vidi da je tada

$$\begin{aligned} \Phi^T D \Phi &= \Phi^T M f_1(M^{-1}K) \Phi + \Phi^T K f_2(K^{-1}M) \Phi \\ &= \Phi^T M \Phi \Phi^T f_1(M^{-1}K) \Phi + \Phi^T K \Phi \Phi^T f_2(K^{-1}M) \Phi \\ &= f_1(\Phi^T M^{-1} \Phi \Phi^T K \Phi) + \Omega^2 f_2(\Phi^T K^{-1} \Phi \Phi^T M \Phi) \\ &= f_1(\Omega^2) + \Omega^2 f_2(\Omega^{-2}), \end{aligned}$$

pa iz (2.13) slijedi da je matrica A u (6.4) oblika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & -(f_1(\Omega^2) + \Omega^2 f_2(\Omega^{-2})) \end{bmatrix}.$$

Kako bismo pojednostavili daljnji račun, na jednadžbu (6.4) primjenit ćemo tzv. *perfect shuffle*¹ permutacijsku matricu P , odnosno, jednakost (6.4) slijeva pomnožit ćemo s P^T a zdesna s P , te dobiti sljedeću parametarski ovisnu Ljapunovljevju jednadžbu

$$\hat{A}\hat{X}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) + \hat{X}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)\hat{A}^T = - \begin{bmatrix} I_{2s} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.5)$$

gdje je $\hat{A}$ blok dijagonalna matrica oblika

$$\hat{A} = P^T A P = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{A}_n \end{bmatrix},$$

pri čemu su blokovi $\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_n$ od $\hat{A}$ dani s

$$\hat{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & \omega_i \\ -\omega_i & -t_i \end{bmatrix}, \quad t_i = f_1(\omega_i^2) + \omega_i^2 f_2(\omega_i^{-2}), \quad i = 1, \dots, n \quad (6.6)$$

te $\hat{X} = P^T X P$.

Sada je lako izračunati i rješenje jednadžbe (6.5). Naime, particioniramo li $\hat{X}$ u skladu s blokovima od $\hat{A}$, jednadžba (6.5) prelazi u oblik

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{A}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_{11} & \dots & \hat{X}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{X}_{n1} & \dots & \hat{X}_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{X}_{11} & \dots & \hat{X}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{X}_{n1} & \dots & \hat{X}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_1^T & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{A}_n^T \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} I_{2s} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pri čemu je $\hat{X}$ hermitska matrica. Sada nadalje blokove od $\hat{X}$ možemo dobiti rješavanjem pripadnih 2×2 Ljapunovljevih jednadžbi. Odmah se lako vidi da su izvan-dijagonalni elementi od $\hat{X}$ nul-matrice, te da je samo prvih s dijagonalnih blokova od $\hat{X}$ netrivialno. Ostali dijagonalni blokovi dobivaju se rješavanjem Ljapunovljevih jednadžbi

$$\hat{A}_i \hat{X}_{ii} + \hat{X}_{ii} \hat{A}_i^T = -I, \quad i = 1, \dots, s.$$

¹ *Perfect shuffle* permutacija skupa $S = \{1, 2, \dots, 2n\}$ je funkcija $f: S \rightarrow S$ definirana s $f(k) = \begin{cases} 2k-1 & k \leq n \\ 2(k-n), & k > n \end{cases}$.

Uz oznaku

$$\hat{X}_{ii} = \begin{bmatrix} x_1^{(ii)} & x_2^{(ii)} \\ x_2^{(ii)} & x_3^{(ii)} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, s$$

pripadna 2×2 Ljapunovljeva jednadžba koja daje i -ti dijagonalni blok od $\hat{X}$ je oblika

$$\begin{bmatrix} 0 & \omega_i \\ -\omega_i & -t_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(ii)} & x_2^{(ii)} \\ x_2^{(ii)} & x_3^{(ii)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1^{(ii)} & x_2^{(ii)} \\ x_2^{(ii)} & x_3^{(ii)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_i \\ \omega_i & -t_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje prethodne jednadžbe je

$$\hat{X}_{ii} = \begin{bmatrix} \frac{2\omega_i^2 + t_i^2}{2\omega_i^2 t_i} & -\frac{1}{2\omega_i} \\ -\frac{1}{2\omega_i} & \frac{1}{t_i} \end{bmatrix},$$

te je u konačnici rješenje početne jednadžbe (6.5) dano s

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{X}_{nn} \end{bmatrix}, \quad \hat{X}_{ii} = \begin{bmatrix} \frac{2\omega_i^2 + t_i^2}{2\omega_i^2 t_i} & -\frac{1}{2\omega_i} \\ -\frac{1}{2\omega_i} & \frac{1}{t_i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, s, \quad (6.7)$$

$$\hat{X}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = s+1, \dots, n.$$

Iz formule (6.7) za rješenje Ljapunovljeve jednadžbe (6.5), koristeći invarijantnost traga i norme s obzirom na permutaciju, dobivamo eksplicitne formule za funkcije koje promatramo:

a) za trag:

$$\text{tr}(X) = \text{tr}(\hat{X}) = \sum_{i=1}^s \left(\frac{2}{t_i} + \frac{t_i}{2\omega_i^2} \right), \quad (6.8)$$

b) za spektralnu normu:

$$\|X\|_2 = \max_{\lambda \in \sigma(\hat{X})} \lambda(\hat{X}) = \max_{i=1, \dots, s} \frac{4\omega_i^2 + t_i^2 + t_i \sqrt{4\omega_i^2 + t_i^2}}{4\omega_i^2 t_i}, \quad (6.9)$$

c) za Frobeniusovu formu:

$$\|X\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^s \left(\frac{2}{t_i^2} + \frac{t_i^2}{4\omega_i^4} + \frac{3}{2\omega_i^2} \right)}, \quad (6.10)$$

pri čemu je $t_i = f_1(\omega_i^2) + \omega_i^2 f_2(\omega_i^{-2})$. Primjetimo da izraz t_i ovisi o parametrima, odnosno t_i je zapravo oblika $t_i(\omega_i; \alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $i = 1, \dots, n$.

U sljedećem poglavlju promotrit ćemo optimalne parametre za neke konkretne oblike prigušenja, tj. za konkretne odabire funkcija f_1 i f_2 u (6.3).

6.3 Različiti oblici prigušenja

6.3.1 Prigušenje oblika $D = \alpha M$

Najjednostavniji oblici prigušenja su $D = \alpha M$ i $D = \beta K$. Model prigušenja $D = \alpha M$ vrlo je jednostavan i u smislu računanja optimalnih parametara, jer se mogu dobiti eksplicitne formule za optimalne parametre za svaki od tri promatrana minimizacijska kriterija a), b) i c).

Prigušenje $D = \alpha M$, $\alpha > 0$ je oblika (6.3) uz $f_1 := \alpha$, $f_2 := 0$. Tako definirano prigušenje D u faznom prostoru zadovoljava

$$\Phi^T D \Phi = \alpha \Phi^T M \Phi = \alpha I.$$

Kako je za ovu vrstu prigušenja $t_i = \alpha$, za sve $i = 1, \dots, n$, formule (6.8) i (6.10) mogu se reducirati na oblik

$$\text{tr}(X) = \frac{2s}{\alpha} + \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^s \frac{1}{\omega_i^2}, \quad (6.11)$$

$$\|X\|_F = \sqrt{\frac{2s}{\alpha^2} + \sum_{i=1}^s \left(\frac{\alpha^2}{4\omega_i^4} + \frac{3}{2\omega_i^2} \right)}. \quad (6.12)$$

Još je preostalo pogledati oblik na koji se reducira formula (6.9). U tu svrhu najprije pogledajmo na kojoj neprigušenoj svojstvenoj vrijednosti se postiže maksimum na desnoj strani izraza (6.9). Definirajmo funkciju $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ formulom

$$g(\omega; \alpha) := \frac{4\omega^2 + \alpha^2 + \alpha\sqrt{4\omega^2 + \alpha^2}}{4\omega^2\alpha}.$$

Vrijedi

$$\frac{dg(\omega; \alpha)}{d\omega} = \frac{\frac{2\omega^2}{\sqrt{4\omega^2 + \alpha^2}} - \sqrt{4\omega^2 + \alpha^2} - \alpha}{2\omega^3} < 0, \quad \forall \alpha > 0,$$

odnosno da je g padajuća funkcija varijable ω pa se maksimum na desnoj strani od (6.9) postiže na ω_1 . Sada je spektralna norma dana s

$$\|X\|_2 = \frac{4\omega_1^2 + \alpha^2 + \alpha\sqrt{4\omega_1^2 + \alpha^2}}{4\omega_1^2\alpha}. \quad (6.13)$$

Odredimo sada optimalan parametar $\alpha > 0$ za prigušenje proporcionalno masi, $D = \alpha M$, s obzirom na kriterij a), b) i c).

Za optimalni parametar s obzirom na kriterij a), odnosno kriterij $\text{tr}(X) \rightarrow \min_{\alpha > 0}$, odredimo derivaciju od (6.11) po α :

$$\frac{d \text{tr}(X)}{d\alpha} = -\frac{2s}{\alpha^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \frac{1}{\omega_i^2}. \quad (6.14)$$

Izjednačimo li (6.14) s nulom, dobivamo točku lokalnog minimuma

$$\alpha_{\text{tr}(X)}^* = 2 \sqrt{\frac{s}{\sum_{i=1}^s \frac{1}{\omega_i^2}}}.$$

Nadalje, u svrhu određivanja optimalnog parametra s obzirom na kriterij b), odnosno kriterij $\|X\|_2 \rightarrow \min_{\alpha > 0}$, odredimo derivaciju od (6.13) po α :

$$\frac{d\|X\|_2}{d\alpha} = \frac{\alpha^2 - 4\omega_1^2 + \frac{\alpha^3}{\sqrt{4\omega_1^2 + \alpha^2}}}{4\omega_1^2 \alpha^2}. \quad (6.15)$$

Nakon izjednačavanja izraza (6.14) s nulom, dobivamo točku lokalnog minimuma

$$\alpha_{\|X\|_2}^* = \omega_1 \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)}.$$

Naposlijetku, u svrhu određivanja optimalnog parametra s obzirom na kriterij c), odnosno kriterij $\|X\|_F \rightarrow \min_{\alpha > 0}$, odredimo derivaciju od (6.12) po α :

$$\frac{d\|X\|_F^2}{d\alpha} = -\frac{4s}{\alpha^3} + \frac{1}{2} \alpha \sum_{i=1}^s \frac{1}{\omega_i^4}. \quad (6.16)$$

Izjednačimo li (6.16) s nulom, dobivamo točku lokalnog minimuma

$$\alpha_{\|X\|_F}^* = \sqrt[4]{\frac{8s}{\sum_{i=1}^s \frac{1}{\omega_i^4}}}.$$

Kako su sve tri promatrane funkcije (6.11) – (6.13) strogo konveksne na $\langle 0, \infty \rangle$, slijedi da su lokalni minimumi ujedno i globalni, tj. optimalni parametri postoje i jedinstveni.

Sažeto, jedinstveni optimalni parametri za prigušenje oblika $D = \alpha M$, $\alpha > 0$ s obzirom na kriterije a), b) i c) dani su (redom) s

$$\alpha_{\text{tr}(X)}^* = 2\sqrt{\frac{s}{\sum_{i=1}^s \frac{1}{\omega_i^2}}}, \quad \alpha_{\|X\|_2}^* = \omega_1 \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)}, \quad \alpha_{\|X\|_F}^* = \sqrt[4]{\frac{8s}{\sum_{i=1}^s \frac{1}{\omega_i^4}}}. \quad (6.17)$$

Primjedba 6.3.1. *Primjetimo da optimalni parametar s obzirom na kriterij minimalne spektralne norme ne ovisi o s, odnosno ne ovisi o tome koji dio spektra želimo prigušiti.*

6.3.2 Prigušenje oblika $D = \beta K$

Sličan pristup onome iz prethodnog poglavlja može se koristiti i za određivanje optimalnih parametara za prigušenje proporcionalno krutosti, tj. prigušenje oblika $D = \beta K$, $\beta > 0$. To je također uz $f_1 := 0$, $f_2 = \beta$ prigušenje oblika (6.3). U ovom slučaju je

$$\Phi^T D \Phi = \beta \Phi^T K \Phi = \beta \Omega^2$$

i $t_i = \beta \omega_i^2$, $i = 1, \dots, n$.

Pogledajmo na koji oblik se u ovom slučaju reduciraju formule (6.8) – (6.10). Za trag i Frobeniusovu normu vrlo jednostavno iz (6.8) i (6.10) dobivamo formule

$$\text{tr}(X) = \frac{s\beta}{2} + \frac{2}{\beta} \sum_{i=1}^s \frac{1}{\omega_i^2}, \quad (6.18)$$

$$\|X\|_F^2 = \frac{\beta^2 s}{4} + \sum_{i=1}^s \left(\frac{2}{\beta^2 \omega_i^4} + \frac{3}{2\omega_i^2} \right). \quad (6.19)$$

Za određivanje formule za spektralnu normu, najprije trebamo ispitati monotonost funkcije

$$h(\omega; \beta) := \frac{4\omega^2 + (\beta\omega^2)^2 + (\beta\omega^2)\sqrt{4\omega^2 + (\beta\omega^2)^2}}{4\omega^2(\beta\omega^2)} = \frac{4 + \beta^2\omega^2 + \beta\omega\sqrt{4 + \beta^2\omega^2}}{4\omega^2\beta}.$$

Vrijedi

$$\frac{dh(\omega; \beta)}{d\omega} = \frac{\frac{\beta^3\omega^3}{\sqrt{4 + \beta^2\omega^2}} - \beta\omega\sqrt{4 + \beta^2\omega^2} - 8}{\beta\omega^3} < 0, \quad \forall \beta > 0,$$

odnosno h padajuća funkcija varijable ω pa se maksimum na desnoj strani od (6.9) postiže na ω_1 . Sada je spektralna norma dana s

$$\|X\|_2 = \frac{4 + \beta^2\omega_1^2 + \beta\omega_1\sqrt{4 + \beta^2\omega_1^2}}{4\beta\omega_1^2}. \quad (6.20)$$

Odredimo sada optimalni parametar $\beta > 0$ za prigušenje proporcionalno krutosti, $D = \beta K$, s obzirom na kriterij a), b) i c).

U svrhu određivanja optimalnog parametra s obzirom na kriterij a), odredimo derivaciju od (6.18) po β :

$$\frac{d \operatorname{tr}(X)}{d\beta} = \frac{s}{2} - \frac{2}{\beta^2} \sum_{i=1}^s \frac{1}{\omega_i^2}. \quad (6.21)$$

Izjednačimo li (6.21) s nulom, dobivamo točku lokalnog minimuma

$$\beta_{\operatorname{tr}(X)}^* = 2 \sqrt{\frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \frac{1}{\omega_i^2}}.$$

Nadalje, kako bi odredili optimalni parametar s obzirom na kriterij b), odredimo derivaciju od (6.20) po β :

$$\frac{d\|X\|_2}{d\beta} = \frac{\beta^2 \omega_1^2 + \frac{\beta^3 \omega_1^3}{\sqrt{4 + \beta^2 \omega_1^2}} - 4}{4\omega_1^2 \beta^2}. \quad (6.22)$$

Izjednačimo li (6.22) s nulom, dobivamo točku lokalnog minimuma

$$\beta_{\|X\|_2}^* = \frac{1}{\omega_1} \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)}.$$

Naposlijetku, odredimo još optimalni parametar s obzirom na kriterij c). Derivacija od (6.19) po β dana je s

$$\frac{d\|X\|_F^2}{d\beta} = \frac{\beta s}{2} - \frac{4}{\beta^3} \sum_{i=1}^s \frac{1}{\omega_i^4}. \quad (6.23)$$

Izjednačimo li (6.23) s nulom, dobivamo točku lokalnog minimuma

$$\beta_{\|X\|_F}^* = \sqrt[4]{\frac{8}{s} \sum_{i=1}^s \frac{1}{\omega_i^4}}.$$

Slično kao i kod prigušenja proporcionalnog masi, i ovdje su sve tri promatrane funkcije (6.18) – (6.20) strogo konveksne na $\langle 0, \infty \rangle$, iz čega slijedi da su lokalni minimumi ujedno i globalni, tj. optimalni parametri postoje i jedinstveni su.

Sažeto, jedinstveni optimalni parametri za prigušenje oblika $D = \beta K$, $\beta > 0$ s obzirom na kriterije a), b) i c) dani su (redom) s

$$\beta_{\operatorname{tr}(X)}^* = 2 \sqrt{\frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \frac{1}{\omega_i^2}}, \quad \beta_{\|X\|_F}^* = \sqrt[4]{\frac{8}{s} \sum_{i=1}^s \frac{1}{\omega_i^4}}, \quad \beta_{\|X\|_2}^* = \frac{1}{\omega_1} \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)}. \quad (6.24)$$

Primjedba 6.3.2. *Primjetimo da, kao i u slučaju $D = \alpha M$, i u slučaju $D = \beta K$ optimalni parametar $\beta_{\|X\|_2}^*$ ne ovisi o s , odnosno ne ovisi o tome koji dio spektra želimo prigušiti.*

Optimalni parametri za prigušenja oblika $D = \alpha M$ i $D = \beta K$ mogu se dovesti u vrlo blisku vezu. Iz izraza (6.17) i (6.24) lako se vidi da optimalni parametri zadovoljavaju

$$\alpha_{\text{tr}(X)}^* \beta_{\text{tr}(X)}^* = 4, \quad \alpha_{\|X\|_F}^* \beta_{\|X\|_F}^* = 2\sqrt[4]{4}, \quad \alpha_{\|X\|_2}^* \beta_{\|X\|_2}^* = 2(\sqrt{5} - 1),$$

što znači da rješenje problema optimalnih parametara za jedan od problema $D = \alpha M$ i $D = \beta K$ izravno daje i optimalne parametre za drugi problem.

6.3.3 Rayleigh-evo prigušenje $D = \alpha M + \beta K$

Proporcionalno prigušenje kod kojega je matrica prigušenja izražena kao linearna kombinacija matrica mase i krutosti,

$$D = \alpha M + \beta K, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta \neq 0,$$

naziva se Rayleigh-evo² prigušenje. U faznom prostoru Rayleigh-ovo prigušenje dano je s

$$\Phi^T(\alpha M + \beta K)\Phi = \alpha I + \beta \Omega^2.$$

U ovom modelu prigušenja optimalni parametri nisu dani eksplicitno kao u prethodnim modelima prigušenja. U slučajevima kad koristimo kriterije a) i c), optimalni parametri dani su implicitno kao jedinstvena rješenja sustava od dvije nelinearne jednačbe. Kriterij b) ne daje jedinstvene optimalne parametre (ali svi parovi optimalnih parametara leže na istom pravcu pa se mogu jedni pomoću drugih lako dobiti iz linearne jednačbe koju zadovoljavaju).

Najprije promatramo optimizaciju s obzirom na kriterij a). Kako je za ovaj oblik prigušenja $t_i = \alpha + \beta \omega_i^2$, slijedi da je trag od X dan s

$$\text{tr}(X) = \sum_{i=1}^s \left(\frac{2}{\alpha + \beta \omega_i^2} + \frac{\alpha + \beta \omega_i^2}{2\omega_i^2} \right). \quad (6.25)$$

Definirajmo funkciju $g_{\text{tr}(X)}: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ s $g_{\text{tr}(X)}(\alpha, \beta) = \text{tr}(X)$, pri čemu je desna strana dana formulom (6.25). Izjednačavajući parcijalne derivacije funkcije $g_{\text{tr}(X)}$ s nulom,

²Lord Rayleigh (1842.-1919.) - engleski matematičar i fizičar, dobitnik Nobelove nagrade za fiziku 1904. U svojoj knjizi *The theory of sound* objavljenoj 1877. godine koristi model prigušenja koji se danas naziva njegovim imenom.

dobivamo sljedeći sustav nelinearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \frac{-2}{(\alpha + \beta \omega_i^2)^2} + \sum_{i=1}^s \frac{1}{2\omega_i^2} &= 0, \\ \sum_{i=1}^s \frac{-2\omega_i^2}{(\alpha + \beta \omega_i^2)^2} + \frac{s}{2} &= 0. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Rješenja gornjeg sustava, ukoliko postoje, daju kandidate za optimalne parametre promatranog problema. Pripadni Hessijan je

$$H = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^s \frac{4}{t_i^3} & \sum_{i=1}^s \frac{4}{t_i^3} \omega_i^2 \\ \sum_{i=1}^s \frac{4}{t_i^3} \omega_i^2 & \sum_{i=1}^s \frac{4}{t_i^3} \omega_i^4 \end{bmatrix},$$

pri čemu $t_i = \alpha + \beta \omega_i^2$. Očigledno je $\sum_{i=1}^s \frac{4}{t_i^3}$ pozitivna, kao i

$$\begin{aligned} \det(H) &= \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \frac{16\omega_j^4}{t_i^3 t_j^3} - \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \frac{16\omega_i^2 \omega_j^2}{t_i^3 t_j^3} \\ &= \sum_{i=1}^s \sum_{j=i+1}^s \left(\frac{16\omega_i^4}{t_i^3 t_j^3} - 2 \frac{16\omega_i^2 \omega_j^2}{t_i^3 t_j^3} + \frac{16\omega_j^4}{t_i^3 t_j^3} \right) \\ &= \sum_{i=1}^s \sum_{j=i+1}^s \frac{16}{t_i^3 t_j^3} (\omega_i^2 - \omega_j^2)^2. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Sada uz pretpostavku da nisu svi ω_i , $i = 1, \dots, n$ jednaki (što je sa fizikalnog stajališta vrlo razumna pretpostavka), iz Sylvesterovog kriterija slijedi da je Hessijan H pozitivno definitan. To znači da ako optimalni parametri postoje, onda su jedinstveni.

Još je ostalo za provjeriti egzistenciju optimalnih parametara, odnosno egzistenciju minimuma funkcije $g_{\text{tr}(X)}$. Budući da se je $g_{\text{tr}(X)}$ strogo konveksna funkcija, ona sigurno postiže minimum na zatvaraču domene. To znači da ako dokažemo da se minimum ne postiže na rubu domene, onda se mora postizati u njenom interioru, te se onda dobiva rješavanjem sustava (6.26). Dokaz toga dan je u sljedećoj propoziciji ³.

Propozicija 6.3.3. *Ako su $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_s$ i $w_1 < w_s$, onda postoji točka $(\alpha^*, \beta^*) \in D'$, $D' = \langle 0, +\infty \rangle \times \langle 0, +\infty \rangle$ u kojoj funkcija $g: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ zadana*

$$g_{\text{tr}(X)}(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^s \left(\frac{2}{\alpha + \beta w_i^2} + \frac{\alpha + \beta w_i^2}{2w_i^2} \right)$$

postiže globalni minimum.

³Zahvaljujem se prof.dr.sc. Kristianu Sabi na vrlo korisnoj diskusiji vezanoj za egzistencijski problem razmatran u Propoziciji 6.3.3.

Dokaz. Funkcija $g_{\text{tr}(X)}$ je neprekidna i strogo konveksna funkcija na D . Stoga, da bismo dokazali $g_{\text{tr}(X)}$ postiže globalni minimum u interioru domene, dovoljno je dokazati da točke na rubu domene D , odnosno točke oblika $(0, \beta), \beta \in [0, \infty)$, $(\alpha, 0), \alpha \in [0, \infty)$ i $(\alpha, \beta), \|(\alpha, \beta)\| \rightarrow \infty$ nisu točke minimuma.

Za točke koje zadovoljavaju $\|(\alpha, \beta)\| \rightarrow \infty$ vrijedi $g_{\text{tr}(X)}(\alpha, \beta) \rightarrow \infty$, te se u njima ne postiže minimum. Za točke oblika $(0, \beta), \beta \in [0, \infty)$, iz nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine dobivamo

$$g_{\text{tr}(X)}(0, \beta) = \frac{2}{\beta} \sum_{i=1}^s \frac{1}{w_i^2} + \frac{\beta}{2}s \geq 2\sqrt{s \sum_{i=1}^s \frac{1}{w_i^2}} =: g_1,$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $\beta = 2\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^s \frac{1}{w_i^2}}{s}} =: \beta_1$. Pokažimo da možemo pronaći točku u D' u kojoj je vrijednost funkcije $g_{\text{tr}(X)}$ manja od g_1 . Lako se vidi da je

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} g_{\text{tr}(X)}(\alpha, \beta_1) = g_1,$$

i

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{dg_{\text{tr}(X)}(\alpha, \beta_1)}{\alpha} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^s \frac{-2}{(\alpha + \beta_1 w_i^2)^2} + \sum_{i=1}^s \frac{1}{2w_i^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\left(\sum_{i=1}^s \frac{1}{w_i^2}\right)^2 - s \sum_{i=1}^s \frac{1}{w_i^4}}{\sum_{i=1}^s \frac{1}{w_i^2}} < 0, \end{aligned}$$

pri čemu posljednja stroga nejednakost slijedi iz Čebiševljeve nejednakosti. To znači da je za dovoljno mali α funkcija $\alpha \mapsto g_{\text{tr}(X)}(\alpha, \beta_1)$ strogo monotono padajuća funkcija. Stoga, postoji interval $\langle 0, \alpha_0 \rangle$ takav da je

$$g_{\text{tr}(X)}(\alpha, \beta_1) < g_1,$$

za sve $\alpha \in \langle 0, \alpha_0 \rangle$. Nadalje, to znači da $g_{\text{tr}(X)}$ ne postiže minimum u točkama oblika $(0, \beta), \beta \in [0, \infty)$. Za točke $(\alpha, 0), \alpha \in [0, \infty)$ vrijedi

$$g_{\text{tr}(X)}(\alpha, 0) = \frac{2}{\alpha}s + \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^s \frac{1}{w_i^2} \geq 2\sqrt{s \sum_{i=1}^s \frac{1}{w_i^2}} = g_1,$$

pri čemu vrijedi jednakost ako i samo ako $\alpha = 2\sqrt{\frac{s}{\sum_{i=1}^s \frac{1}{w_i^2}}} =: \alpha_1$. Već smo pronašli točku u D' u kojoj je vrijednost od $g_{\text{tr}(X)}$ manja od g_1 , pa $g_{\text{tr}(X)}$ ne postiže minimum ni u točkama oblika $(\alpha, 0), \alpha \in [0, \infty)$.

Time je dokazano da $g_{\text{tr}(X)}$ mora postizati minimum u interioru svoje domene. $\square$

Slično kao za kriterij a), i kriterij c) minimalne Frobeniusove norme također daje implicitno definirane jedinstvene optimalne parametre. Frobeniusova norma za Rayleigh-ovo prigušenje definirana je s

$$\|X\|_F^2 = \sum_{i=1}^s \left(\frac{2}{(\alpha + \beta\omega_i^2)^2} + \frac{(\alpha + \beta\omega_i^2)^2}{4\omega_i^4} + \frac{3}{2\omega_i^2} \right), \quad (6.28)$$

Definirajmo funkciju $g_{\|X\|_F}: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ s $g_{\|X\|_F}(\alpha, \beta) = \|X\|_F^2$, pri čemu je desna strana dana formulom (6.28). Izjednačavajući parcijalne derivacije funkcije $g_{\|X\|_F}$ s nulom, dobivamo sljedeći sustav nelinearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \frac{-8}{(\alpha + \beta\omega_i^2)^3} + \sum_{i=1}^s \frac{\alpha + \beta\omega_i^2}{\omega_i^4} &= 0, \\ \sum_{i=1}^s \frac{-8\omega_i^2}{(\alpha + \beta\omega_i^2)^3} + \sum_{i=1}^s \frac{\alpha + \beta\omega_i^2}{\omega_i^2} &= 0. \end{aligned}$$

Slično kao u prethodnom slučaju, može se provjeriti da je uz pretpostavku da nisu svi ω_i , $i = 1, \dots, n$ međusobno jednaki, funkcija $g_{\|X\|_F}$ strogo konveksna i da postiže minimum na $\langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, \infty \rangle$. To znači da prethodni sustav ima jedinstveno rješenje, odnosno optimalni parametri postoje i jedinstveni.

Za razliku od kriterija a) i c), za kriterij b) optimalni parametri općenito nisu jedinstveni.

Slično kao i za (6.13) imamo da se maksimum na desnoj strani od (6.9) postiže na ω_1 pa je spektralna norma za Rayleigh-evo prigušenje dana s

$$\|X\|_2 = \frac{4\omega_1^2 + \alpha + \beta\omega_1^2 + (\alpha + \beta\omega_1^2)\sqrt{(4 + \beta)\omega_1^2 + \alpha}}{4\omega_1^2(\alpha + \beta\omega_1^2)}. \quad (6.29)$$

Definirajmo funkciju $g_{\|X\|_2}: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ s $g_{\|X\|_2}(\alpha, \beta) = \|X\|_2$, gdje je $\|X\|_2$ dano s (6.29). Može se vidjeti da je determinanta Hessijana funkcije $g_{\|X\|_2}$ jednaka nuli te je Hessijan pozitivno semidefinitan, što za posljedicu ima da optimalni parametri nisu jedinstveni. Egzistencija optimalnih parametara pokazuje se slično kao i za (6.25).

Nejedinstvenost optimalnih parametara u ovom slučaju mogla se uočiti i odmah na samom početku razmatranja. Izraz (6.29) odgovara spektralnoj normi rješenja 2×2 Ljapunovljeve jednadžbe s prvim blokom matrice A' definirane s (6.6). Preciznije, promatrana spektralna norma zadovoljava $\|X\|_2 = \|X_1\|_2$, gdje je X_1 rješenje Ljapunovljeve jednadžbe

$$A'_1 X'_1 + X'_1 (A'_1)^T = -I, \quad \text{gdje je} \quad A'_1 = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 \\ -\omega_1 & -(\alpha + \beta\omega_1^2) \end{bmatrix}.$$

Sada se vidi da ako je optimalno prigušenje jednako $-d_{opt}$ (odnosno ako je element (2,2) matrice A'_1 jednak $-d_{opt}$), tada za bilo koji parametar β možemo izračunati odgovarajući parametar α tako da je $\alpha + \beta\omega_1^2 = d_{opt}$. Stoga, skup optimalnih parametara jednak je

$$S = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 : \alpha + \beta\omega_1^2 = d_{opt}\}. \quad (6.30)$$

U slučaju Frobeniusove norme taj efekt se ne događa iz razloga što taj pristup uzima u obzir sve blokove od A' .

Naposlijetku, primjetimo da iz slučaja $D = \alpha M$ ili $D = \beta K$ možemo odrediti i d_{opt} . Znamo da je $(\alpha_{\|X\|_2}^*, 0) \in S$. Iz (6.17) i (6.30) vidimo da za odabir $(\alpha, \beta) = (\alpha_{\|X\|_2}^*, 0)$ slijedi da je $d_{opt} = \omega_1 \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)}$ (isti izraz dobiva se i iz (6.24) za odabir $(\alpha, \beta) = (0, \beta_{\|X\|_2}^*)$). Sada zaključujemo da je skup parametara za minimizacijski kriterij b) dan s

$$S = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 : \alpha + \beta\omega_1^2 = \omega_1 \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)}\}.$$

6.3.4 Prigušenje oblika $D = \alpha M + \beta M^{1/2} \sqrt{M^{-1/2} K M^{-1/2}} M^{1/2}$

U ovom poglavlju promatramo prigušenje oblika

$$D = \alpha M + \beta M^{1/2} \sqrt{M^{-1/2} K M^{-1/2}} M^{1/2}, \quad (6.31)$$

ili u faznom prostoru

$$\Phi^T D \Phi = \alpha I + \beta \Omega.$$

Ovaj slučaj modela prigušenja je vrlo zanimljiv u smislu računanja optimalnih parametara. Pokazat će se da su za optimizacijske kriterije a) i c) optimalni parametri dani eksplicitno i ne ovisi o dimenziji kao ni o matricama M , K .

Najprije ćemo promotriti optimizacijski kriterij a). Iz formule (6.8) s $t_i = \alpha + \beta\omega_i$ dobivamo da je u ovom slučaju trag matrice X dan s

$$\text{tr}(X) = \sum_{i=1}^s \left(\frac{2}{\alpha + \beta\omega_i} + \frac{\alpha + \beta\omega_i}{2\omega_i^2} \right). \quad (6.32)$$

Izjednačavajući parcijalne derivacije od (6.32) s nulom, dobivamo sljedeći sustav nelinearnih nejednadžbi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \frac{-2}{(\alpha + \beta\omega_i)^2} + \sum_{i=1}^s \frac{1}{2\omega_i^2} &= 0, \\ \sum_{i=1}^s \frac{-2\omega_i}{(\alpha + \beta\omega_i)^2} + \sum_{i=1}^s \frac{1}{2\omega_i} &= 0. \end{aligned}$$

Lako se provjeri, isto kao i u (6.27), da je uz Hessijan funkcije $h_{\text{tr}(X)}(\alpha, \beta) = \text{tr}(X)$ pozitivno definitan (uz uvjet da nisu svi ω_i , $i = 1, \dots, s$ isti). To znači da je $h_{\text{tr}(X)}(\alpha, \beta)$ strogo konveksna pa stoga ako promatrani sustav ima rješenje, ono je jedinstveno. Očigledno par $\alpha = 0$ i $\beta = 2$ rješava navedeni sustav, stoga je optimalno prigušenje oblika (6.31) s obzirom na kriterij a) dano s $\Phi^T D \Phi = 2\Omega$, odnosno

$$D = 2M^{1/2}\sqrt{M^{-1/2}KM^{-1/2}}M^{1/2}.$$

Ovaj rezultat je specijalan slučaj generalnog rezultata o optimalnom prigušenju koji je dan u [19], te još općenitije u [46].

Optimizacijski kriterij c) daje rezultat sličnog oblika.

Iz (6.10) uz $t_i = \alpha + \beta\omega_i$ dobivamo da je kvadrat Frobeniusove norme za slučaj prigušenja oblika (6.31) dan s

$$\|X\|_F^2 = \sum_{i=1}^s \left(\frac{2}{(\alpha + \beta\omega_i)^2} + \frac{\alpha^2}{4\omega_i^4} + \frac{\alpha\beta}{2\omega_i^3} + \frac{\beta^2 + 6}{4\omega_i^2} \right). \quad (6.33)$$

Opet se lako provjeri da je $h_{\|X\|_F}(\alpha, \beta) = \|X\|_F^2$ strogo konveksna funkcija. Izjednačavanjem parcijalnih derivacija te funkcije s nulom, dobivamo sustav nelinearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \frac{-4}{(\alpha + \beta\omega_i)^3} + \sum_{i=1}^s \frac{\alpha + \beta\omega_i}{2\omega_i^4} &= 0, \\ \sum_{i=1}^s \frac{-4\omega_i}{(\alpha + \beta\omega_i)^3} + \sum_{i=1}^s \frac{\alpha + \beta\omega_i}{2\omega_i^3} &= 0. \end{aligned}$$

Kako par $\alpha = 0$ i $\beta = 2^{\frac{3}{4}}$ rješava prethodni sustav, optimalno prigušenje oblika (6.31) s obzirom na kriterij c) dano je s $\Phi^T D \Phi = 2^{\frac{3}{4}}\Omega$, odnosno

$$D = 2^{\frac{3}{4}}M^{1/2}\sqrt{M^{-1/2}KM^{-1/2}}M^{1/2}.$$

Optimizacijskom kriterij b) koji koristi spektralnu normu možemo pristupiti na isti način kao i u prethodnom poglavlju. Optimalni parametri nisu jedinstveni i slijedi da je skup optimalnih parametara dan s $\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 : \alpha + \beta\omega_1 = \omega_1\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}, \alpha, \beta \geq 0\}$.

Primjerice, jedan par optimalnih parametara je $(0, \sqrt{2(\sqrt{5}-1)})$ i on ne ovisi o dimenziji, masama i krutostima. Odgovarajuće optimalno prigušenje oblika (6.31) s obzirom na

kriterij b) dano je s $\Phi^T D \Phi = \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)}\Omega$ ili

$$D = \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)}M^{1/2}\sqrt{M^{-1/2}KM^{-1/2}}M^{1/2}.$$

6.4 Numerički primjeri

U ovom poglavlju promotrit ćemo nekoliko numeričkih primjera u kojima će se moći uočiti neke zanimljivosti koje se javljaju pri proučavanju titranja s modelima prigušenja promatranim u prethodnom poglavlju, te s optimalnim parametrima s obzirom na prethodno uvedene optimizacijske kriterije.

U prvom primjeru međusobno ćemo usporediti titranja sustava s različitim modelima unutarnjeg prigušenja i s optimalnim parametrima izračunatim koristeći optimizacijske kriterije a), b) i c).

Kako je naš cilj odrediti optimalno prigušenje koje osigurava optimalno iščezavanje pomaka x , gdje je x rješenje jednadžbe (2.9), usporedba će biti napravljena s obzirom na maksimalnu amplitudu i brzinu iščezavanja pomaka.

Prisjetimo se da se x dobiva koristeći rješenje jednadžbe (2.11) koje je dano s

$$y = e^{At}y_0, \quad \text{gdje je} \quad y \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega\Phi^{-1}x \\ \Phi^{-1}\dot{x} \end{bmatrix}.$$

Sada slijedi da je

$$x(t) = \Phi\Omega^{-1}y_1(t),$$

gdje je $[y_1(t)^T, y_2(t)^T]^T = e^{At}y_0$.

U svrhu međusobne komparacije optimalnih parametara, prvo ćemo uvesti kriterij usporedbe: maksimalna amplituda pomaka x u danom vremenskom intervalu $[t_0, t_1]$. Maksimalna amplituda a_{max} računa se na sljedeći način

$$a_{max} = \max_{t_0 \leq t \leq t_1} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i(t)|. \quad (6.34)$$

Uz navedeni kriterij, također će se promatrati i kako brzo gibanje iščezava, odnosno vrijeme potrebno da se sustav umiri. U tu svrhu grafički ćemo prikazivati ponašanje pomaka u vremenu (povijest pomaka x).

Primjer 3. Promatrajmo harmonijski oscilator s n masa kao na Slici 6.1. Matrice M i K iz jednadžbe (2.9) dane su s

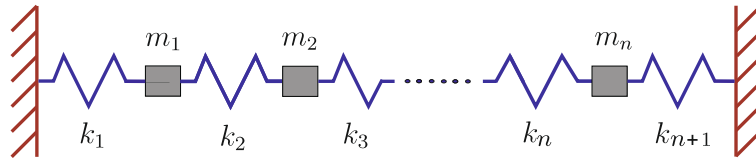
$$M = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_n),$$

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ & & & -k_n & k_n + k_{n+1} \end{pmatrix}.$$

U ovom primjeru promatrat će se sljedeća konfiguracija:

$$\begin{aligned} n &= 100, \\ m_i &= 1, \quad i = 1, \dots, n, \\ k_i &= 1, \quad i = 1, \dots, n+1. \end{aligned}$$

Nadalje, pretpostavit ćemo da se želi prigušiti najmanjih 10 neprigušenih svojstvenih frekvencija, odnosno da je $s = 10$.



Slika 6.1: Harmonijski oscilator s n masa

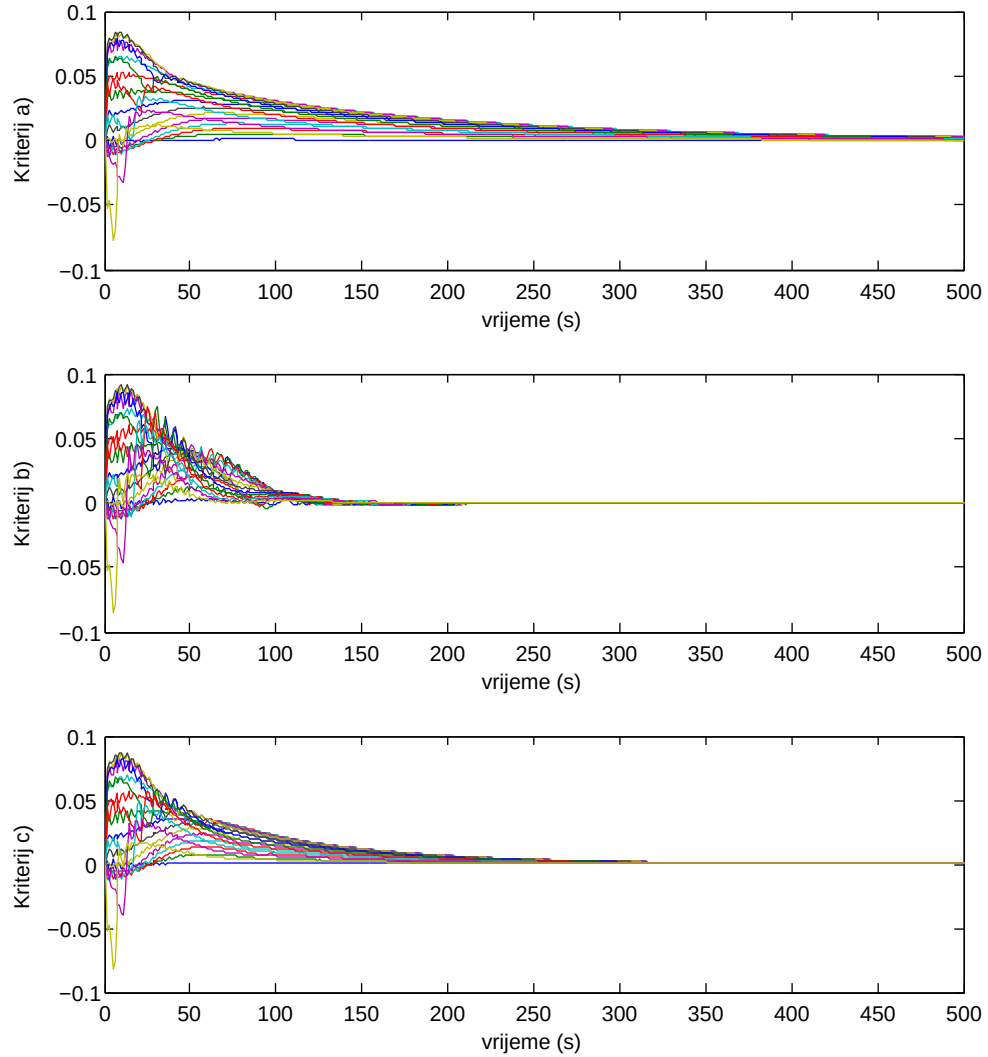
Prilikom usporedbe koristit će se sljedeće vrijednosti: $y_0 = 0.01 \cdot [1, 1, \dots, 1]^T$, $t_0 = 0$ i $t_1 = 500$.

Prigušenje oblika $D = \alpha M$. Najprije ćemo uporediti optimalne parametre za prigušenje $D = \alpha M$ s obzirom na kriterije a), b) i c). Optimalni parametri, vrijednosti funkcija koje minimiziramo i maksimalna amplituda a_{max} (definirane s (6.34)) dani su u Tablici 6.1.

	α	$\text{tr}(X)$	$\ X\ _2$	$\ X\ _F$	a_{max}
Kriterij a)	0.158	253.1908	91.0389	102.0827	0.0891
Kriterij b)	0.0489	448.1499	53.5338	107.05	0.0936
Kriterij c)	0.0912	292.3717	63.0618	84.9275	0.0916

Tablica 6.1: Usporedba optimalnih parametara za prigušenje oblika $D = \alpha M$ dobivenih s različitim optimizacijskim kriterijima

Na Slici 6.2 dan je prikaz pomaka svih masa (preciznije, zbog preglednosti slike dan je pomak svake pete mase) s obzirom na svaki od kriterija a), b) i c). Na Slici 6.3 dan je graf pomaka 15. i 50. mase u vremenu uz prigušenje $D = \alpha M$ s obzirom na sva tri kriterija.

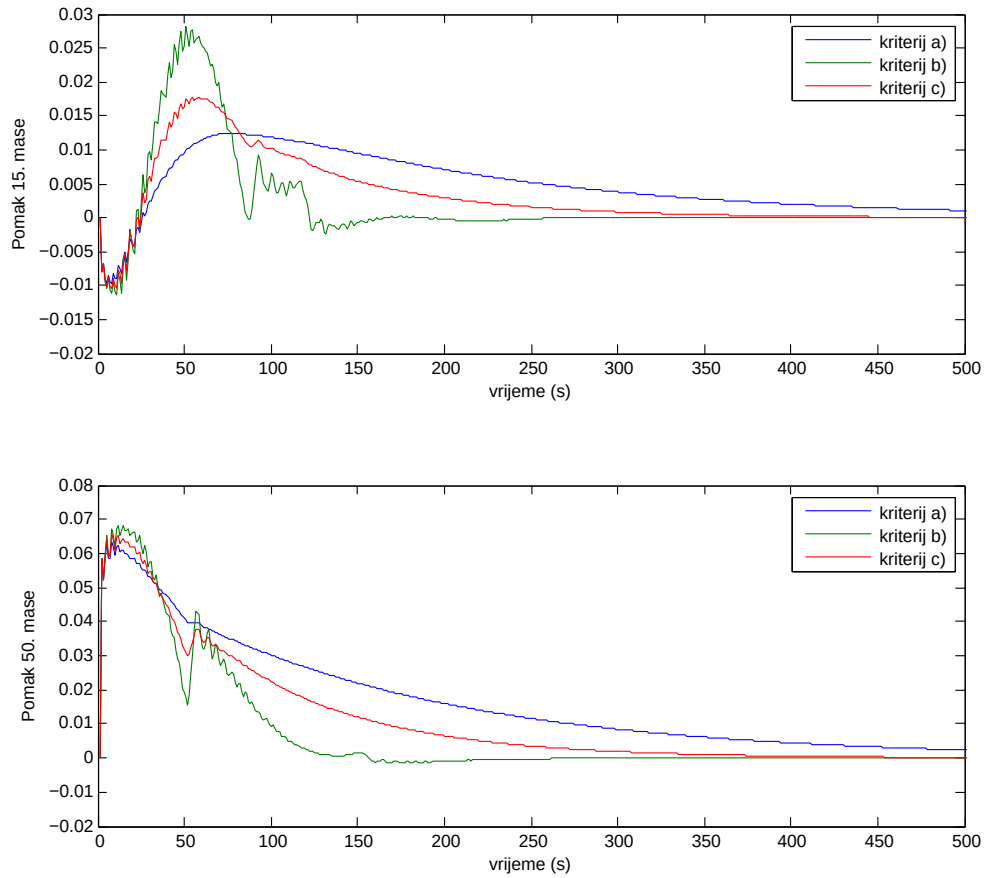


Slika 6.2: Pomak svih masa za prigušenje $D = \alpha M$ s obzirom na kriterije a), b) i c)

Prema slici može se zaključiti da se sustav iz ovog primjera najbrže smirio uz upotrebu kriterija b), no u slučaju kriterija b) također imamo i najveću amplitudu. Kriterij a) je dao najmanju amplitudu, dok je kriterij c) imao ponašanje vrlo slično kriteriju a), no uz malo veću amplitudu ali malo brže smirivanje sustava.

Prigušenje oblika $D = \beta K$. Nadalje ćemo usporediti optimalne parametre za promatranu konfiguraciju za prigušenje $D = \beta K$ s obzirom na kriterije a), b) i c). Optimalni parametri, vrijednosti funkcija koje minimiziramo i maksimalna amplituda a_{max} dani su u tablici 6.2

Na Slici 6.4 dan je prikaz pomaka svake pete mase s obzirom na svaki od kriterija a), b) i c).

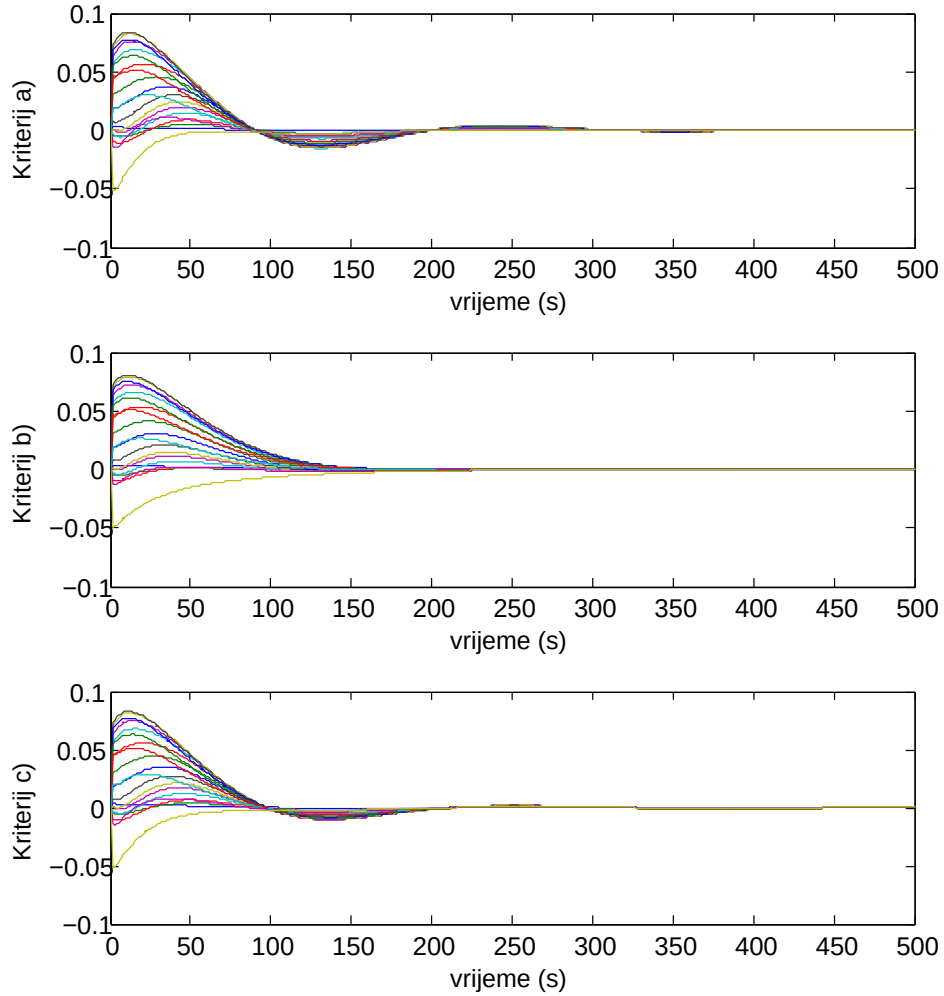


Slika 6.3: Pomak 15. i 50. mase u vremenu za prigušenje $D = \alpha M$

	β	$\text{tr}(X)$	$\ X\ _2$	$\ X\ _F$	a_{max}
Kriterij a)	25.3191	253.1908	64.4317	87.2567	0.0891
Kriterij b)	50.5505	316.16	53.5338	98.4746	0.0846
Kriterij c)	31.012	258.4161	58.9312	84.9275	0.0866

Tablica 6.2: Usporedba optimalnih parametara za prigušenje oblika $D = \beta K$ dobivenih s različitim optimizacijskim kriterijima

Na Slici 6.5 prikazan je graf pomaka 15. i 50. mase u vremenu uz prigušenje $D = \beta K$ s parametrima iz Tablice 6.2.

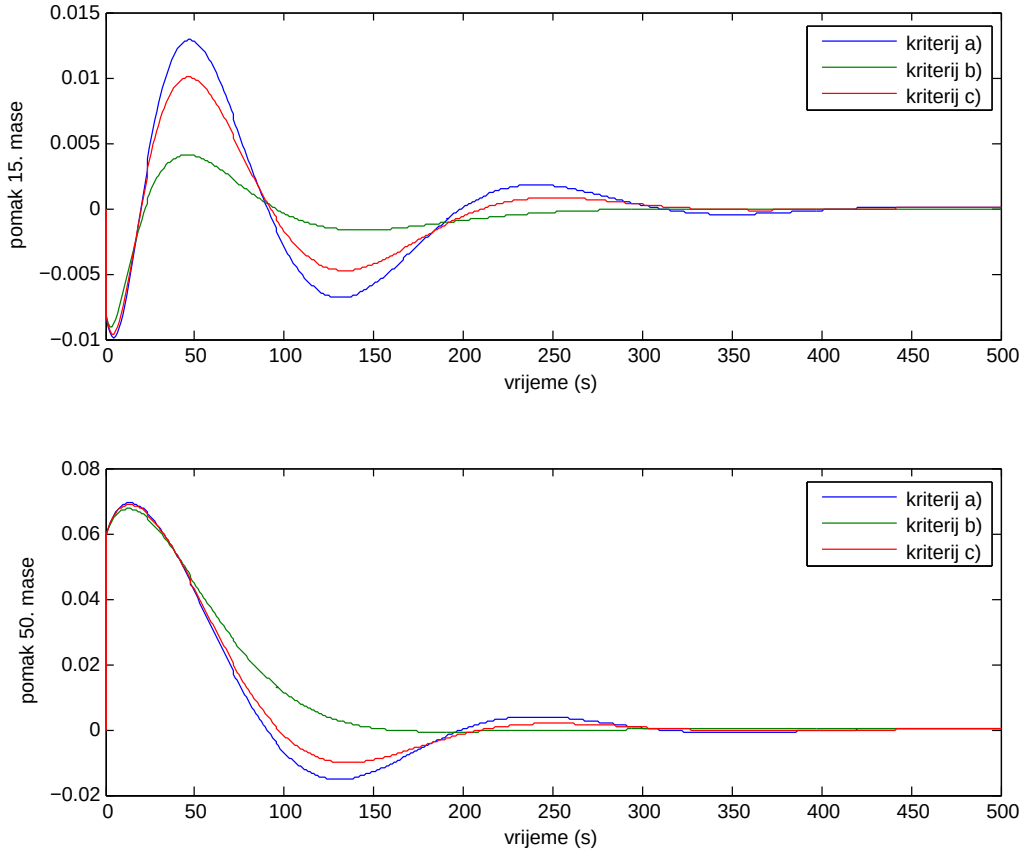


Slika 6.4: Pomak svih masa za prigušenje $D = \beta K$ s obzirom na kriterije a), b) i c)

I kod prigušenja proporcionalnog krutosti vidimo da se navedeni sustav s parametrima iz kriterija a) i c) ponaša vrlo slično, dok s parametrom iz kriterija b) se najbrže smiruje, no ima i najveću maksimalnu amplitudu.

Prigušenje oblika $D = \alpha M + \beta K$. Usporedimo nadalje optimalne parametre za Rayleigh-evo prigušenje $D = \alpha M + \beta K$. Optimalne parametre ćemo računati za kriterije a), b) i c) pri čemu treba imati na umu da u ovom modelu prigušenja kriterij b) ne daje jedinstvene optimalne parametre.

U Tablici 6.3 navedeni su optimalni Rayleigh-evi parametri i pripadna vrijednost funkcija koje minimiziramo, te u zadnjem stupcu dana je vrijednost maksimalne amplitude a_{max} .



Slika 6.5: Pomak 15. i 50. mase u vremenu za prigušenje $D = \beta K$

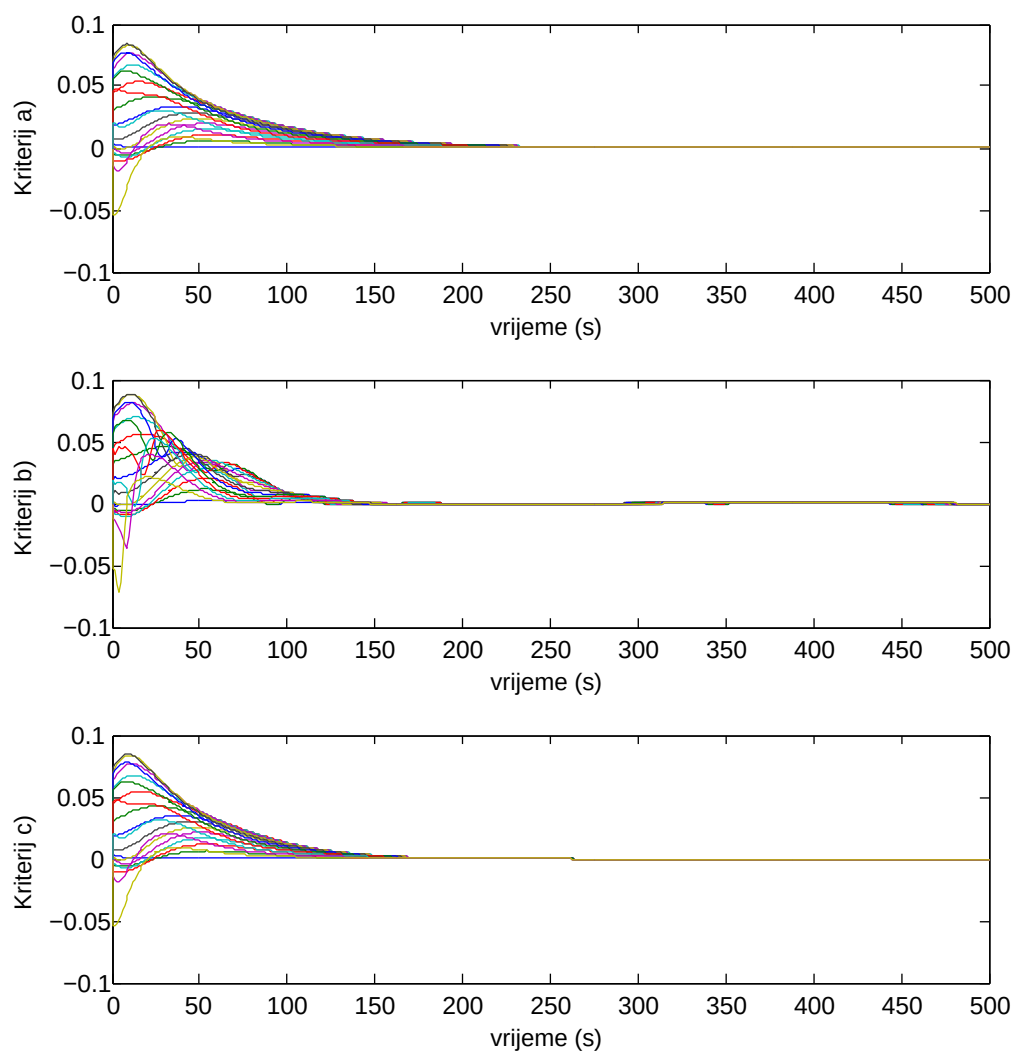
	α	β	$\text{tr}(X)$	$\ X\ _2$	$\ X\ _F$	a_{max}
Kriterij a)	0.0626	9.2157	192.4308	56.9576	70.7957	0.086
Kriterij b)	0.0486	0.3383	377.0469	53.5338	94.3726	0.089
Kriterij c)	0.0456	9.7275	194.086	54.2095	69.1698	0.087

Tablica 6.3: Usporedba Rayleigh-evih parametara dobivenih s različitim optimizacijskim kriterijima

Na Slici 6.6 dan je prikaz pomaka svake pete mase s obzirom na svaki od kriterija a), b) i c).

Slika 6.7 daje graf pomaka 15. i 50. mase u vremenu uz Rayleigh-evo prigušenje s parametrima iz Tablice 6.3.

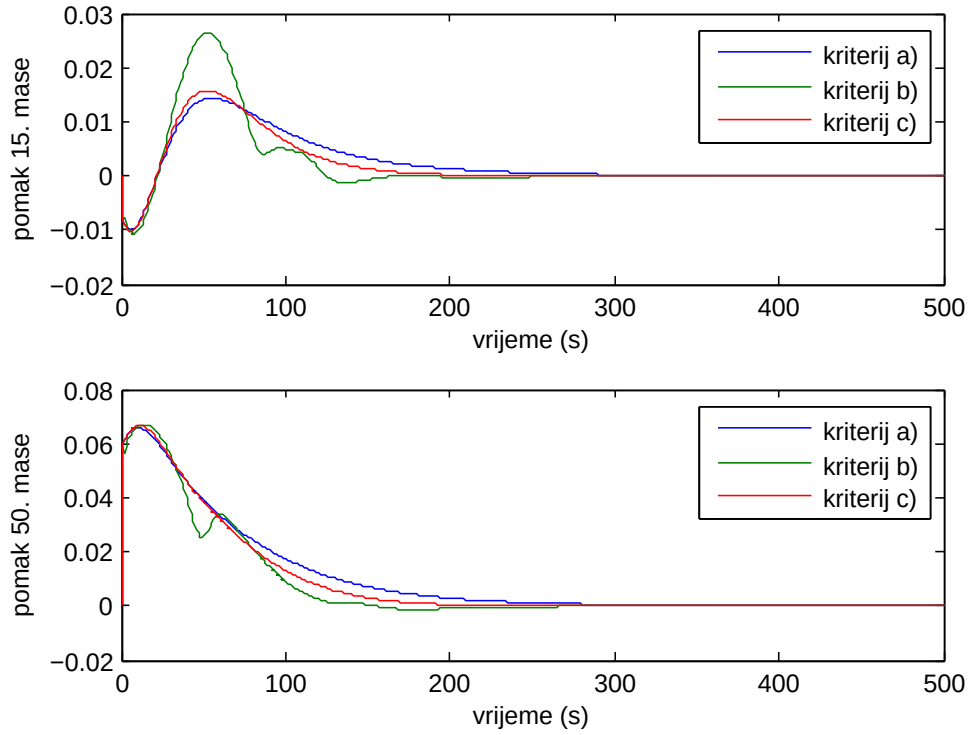
Prigušenje oblika $D = \alpha M + \beta M^{1/2} \sqrt{M^{-1/2} K M^{-1/2}} M^{1/2}$. Na poslijetku, usporedimo i optimalne parametre za prigušenje oblika $D = \alpha M + \beta M^{1/2} \sqrt{M^{-1/2} K M^{-1/2}} M^{1/2}$, pri čemu također za kriterij b) optimalni parametri nisu jedinstveni. U Tablici 6.4 dani



Slika 6.6: Pomak svih masa za Rayleigh-evo prigušenje s obzirom na kriterije a), b) i c)

su optimalni parametri zajedno s pripadnim vrijednostima funkcija koje minimiziramo, kao i maksimalna amplituda a_{max} .

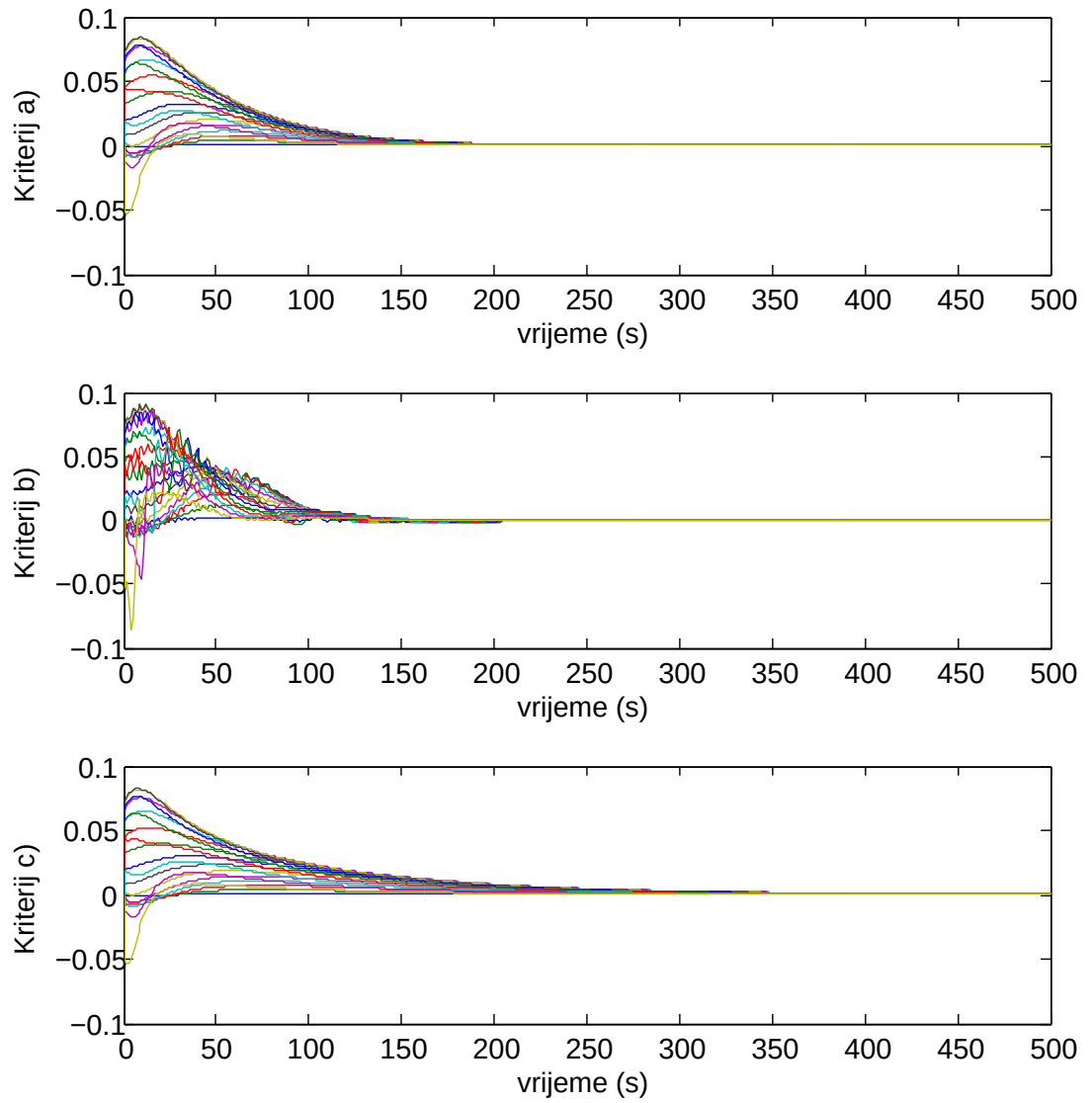
Na Slici 6.8 dan je prikaz pomaka svake pete mase s obzirom na svaki od kriterija a), b) i c). Graf pomaka 15. i 50. mase u vremenu za optimalne parametre iz Tablice 6.4 prikazan je na Slici 6.9.



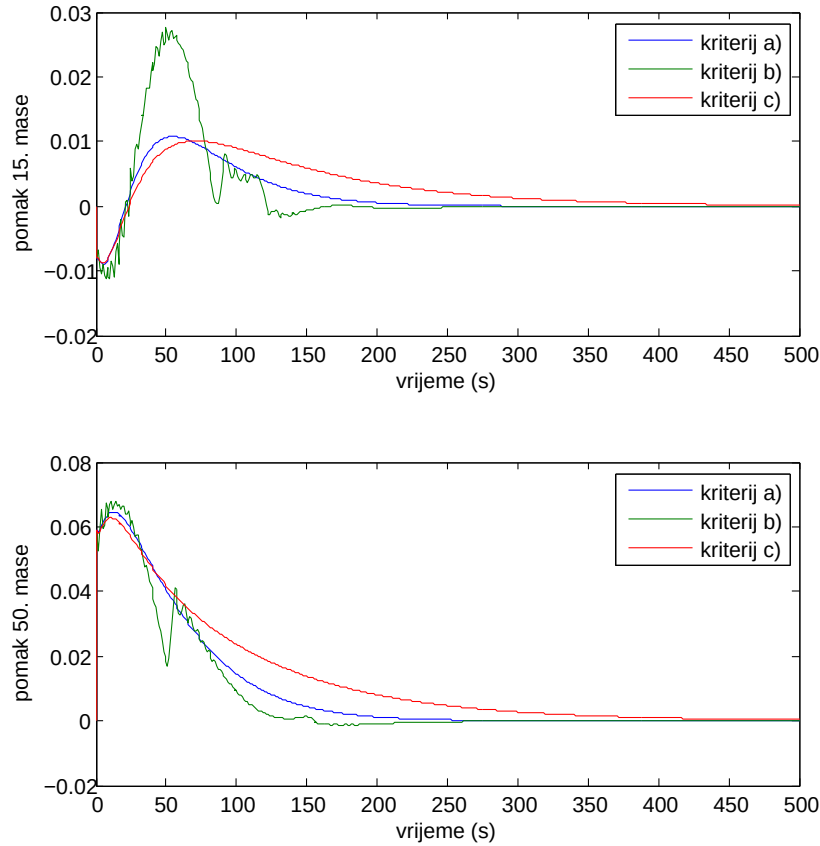
Slika 6.7: Pomak 15. i 50. mase u vremenu za Rayleigh-evo prigušenje

	α	β	$\text{tr}(X)$	$\ X\ _2$	$\ X\ _F$	a_{max}
Kriterij a)	0	2	188.4713	54.8845	69.3392	0.084
Kriterij b)	0.0486	0.0092	438.125	53.5338	105.108	0.093
Kriterij c)	0	1.6818	191.308	53.6379	68.3406	0.085

Tablica 6.4: Usporedba optimalnih parametara za prigušenje oblika $D = \alpha M + \beta M^{1/2} \sqrt{M^{-1/2} K M^{-1/2}} M^{1/2}$



Slika 6.8: Pomak svih masa za prigušenje $D = \alpha M + \beta M^{1/2} \sqrt{M^{-1/2} K M^{-1/2}} M^{1/2}$ s obzirom na kriterije a), b) i c)



Slika 6.9: Pomak 15. i 50. mase u vremenu za prigušenje $D = \alpha M + \beta M^{1/2} \sqrt{M^{-1/2} K M^{-1/2}} M^{1/2}$

Pogledajmo još na kraju ovog primjera što možemo zaključiti o različitim oblicima prigušenja promatranog sustava. Lako se vidi da su vremena iščezavanja gibanja, kao i maksimalne amplitude vrlo bliske. Globalno je najmanja maksimalna amplituda dobivena u slučaju modela prigušenja $D = \alpha M + \beta M^{1/2} \sqrt{M^{-1/2} K M^{-1/2}} M^{1/2}$ i to u slučaju kriterija a).

U sljedećem primjeru promatra se gibanje sustava s jednim slobodnim krajem (npr. zgrade) nakon nekog početnog pomaka. Usporedit će se procijenjeni Rayleigh-evi parametri iz literature s optimalnim parametrima s obzirom na kriterije a), b) i c).

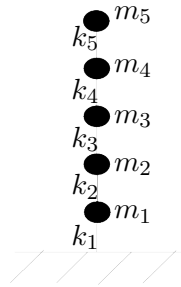
Primjer 4. Promatramo sustav s pet masa čiji je model prikazan na Slici 6.10. Takav sustav može se modelirati jednažbom (2.9) gdje je

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_5 & -k_5 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5 \end{bmatrix}$$

i

$$D = \alpha M + \beta K$$



Slika 6.10: Sustav s pet masa i jednim slobodnim krajem

Preciznije, usporedit ćemo rezultate na referentnoj strukturi danoj u [76] s masama i krutostima danim u Tablici 6.5 i procijenjenim Rayleigh-evim parametrima $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.001$.

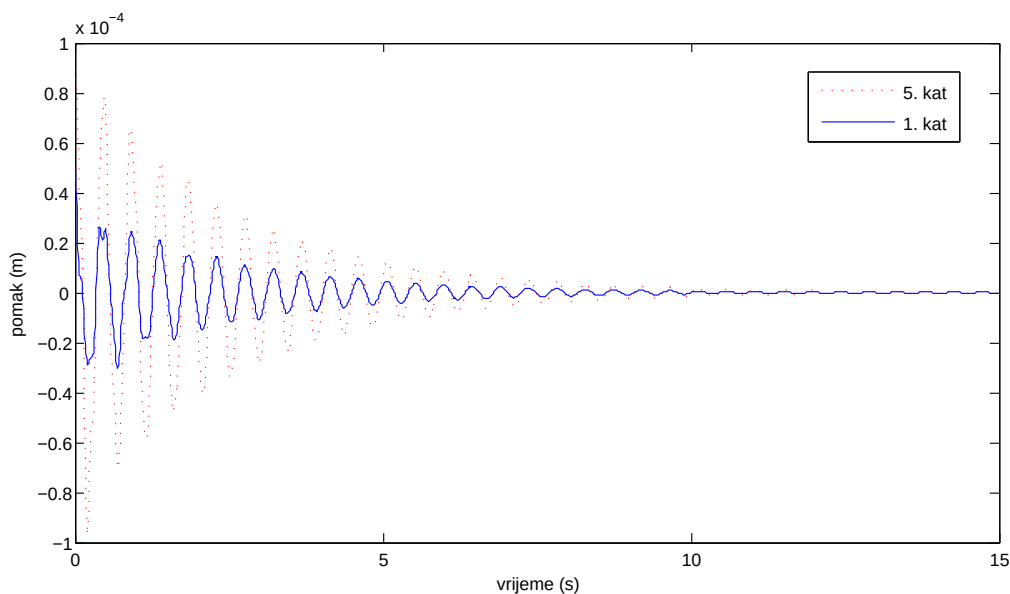
i	1	2	3	4	5
m_i	4000	3000	2000	1000	800
k_i	3.375×10^6	3.75×10^6	3.375×10^6	3×10^6	2.25×10^6

Tablica 6.5: Mase i krutosti strukture

Optimalni Rayleigh-evi parametri dobiveni koristeći optimizacijske kriterije a), b) i c) prikazani su u Tablici 6.6.

	α	β	$\text{tr}(X)$	$\ X\ _2$	$\ X\ _F$
Referentni parametri	0.6	0.001	5.0802	1.3095	2.0761
Kriterij a)	23.3228	0.0280	0.3053	0.1263	0.1468
Kriterij b)	21.4213	0.0002	0.411	0.1220	0.1781
Kriterij c)	21.0949	0.0171	0.3180	0.1228	0.1454

Tablica 6.6: Rayleigh-evi parametri dobiveni koristeći različite optimizacijske kriterije



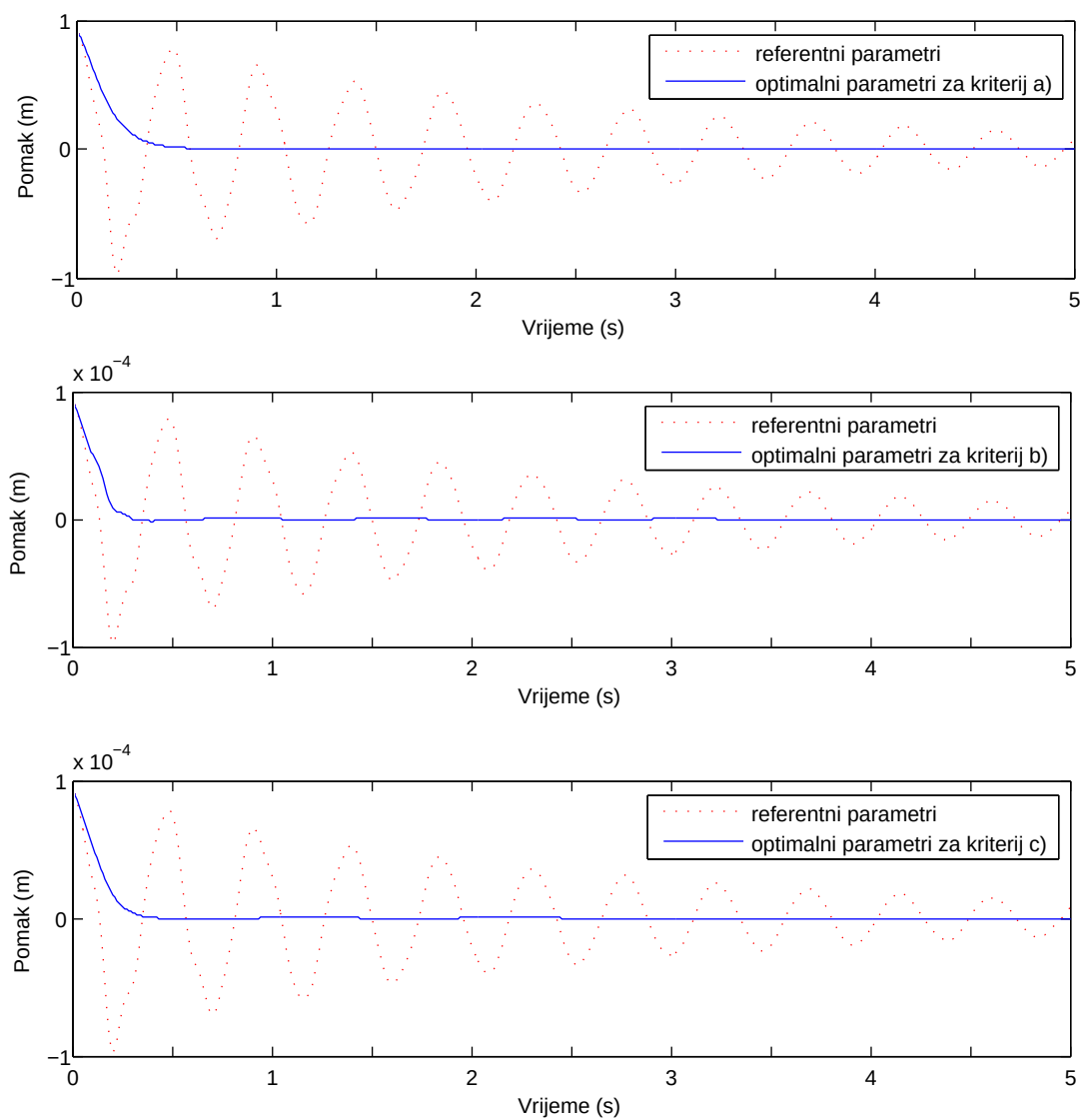
Slika 6.11: Povijest pomaka prvog i petog kata strukture

Povijest pomaka prvog i petog kata referentne strukture (s procijenjenim Rayleigh-evim parametrima $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.001$) nakon početnog pomaka $x(0) = [0.5 \times 10^{-4}, 0.6 \times 10^{-4}, 0.7 \times 10^{-4}, 0.8 \times 10^{-4}, 0.9 \times 10^{-4}]^T$ i uz $s = n$ prikazana je na Slici 6.11.

Kao što je i za očekivati, najveći pomak je na posljednjem katu, dok je najmanji pomak na prvom katu. Nakon početnog pomaka, struktura se umirila nakon 20 sekundi i najveća amplituda je početna.

Nadalje, usporedit ćemo povijest pomaka referentne strukture s Rayleigh-evim prigušenjem s optimalnim parametrima iz Tablice 6.6. Kao što je vidljivo na Slici 6.12, struktura s optimalnim parametrima s obzirom na kriterije a), b) i c) će se vrlo brzo prestati gibati (u nešto kraće od jedne sekunde) i najveći pomak je također početni.

Za kriterij b) gibanje i amplituda ovise o izboru optimalnih parametara (koji općenito nisu jedinstveni).



Slika 6.12: Grafovi pomaka petog kata strukture s referentnim parametrima i optimalnim parametrima s obzirom na kriterije a), b) i c)

Popis algoritama

1	Arnoldijeva procedura bazirana na modificiranoj Gram-Schmidtovoj proceduri	16
2	<i>Full Orthogonalization Method</i> (FOM)	17
3	Osnovna procedura za računanje rješenja Sylvesterove jednadžbe (3.1) koristeći Sherman-Morrison-Woodbury-jevu formulu (3.12)	36
4	<i>2-solve scheme</i> za Sylvesterovu jednadžbu $A_0\hat{X} + \hat{X}B_0 = \hat{Y}$, gdje su A_0, B_0 blok dijagonalne matrice s 2×2 blokovima na glavnoj dijagonali.	37
5	Algoritam za računanje rješenja parametarski ovisne Sylvesterove jednadžbe (4.1)	47
6	Algoritam za rješavanje T -Sylvesterove jednadžbe $AX + X^TB = E$. . .	62
7	Osnovna procedura za računanje rješenja jednadžbe (5.5) koristeći Sherman-Morrison-Woodbury-jevu formulu (5.13)	65
8	Algoritam za računanje rješenja parametarski ovisne T -Sylvesterove jednadžbe (5.18)	68

Bibliografija

- [1] S. Adhikari. *Damping Models for Structural Vibration*. PhD thesis, Trinity College, Cambridge, 2000.
- [2] S. Adhikari. Damping modelling using generalized proportional damping. *Journal of Sound and Vibration*, 293:156–170, 2006.
- [3] A. C. Antoulas. *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems, Advances in Design and Control*. SIAM, Philadelphia, PA, 2005.
- [4] R. H. Bartels and G. W. Stewart. A solution of the matrix equation $AX + XB = C$. *Comm. ACM*, 15(9):820–826, 1972.
- [5] U. Baur and P. Benner. Cross-Gramian based model reduction for data-sparse systems. *Electr. Trans. Num. Anal.*, (31):256–270, 2008.
- [6] R. Bellman. *Introduction to matrix analysis*. Classics in applied mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.
- [7] P. Benner, Z. Tomljanović, and N. Truhar. Dimension reduction for damping optimization in linear vibrating system. Accepted for publication in ZAMM, 2010.
- [8] P. Benner, N. Truhar, and R.-C. Li. On ADI Method for Sylvester Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233(4):1035–1045, 2009.
- [9] D. A. Bini, B. Iannazzo, and F. Poloni. A fast Newton’s method for a nonsymmetric algebraic Riccati equation. *SIMAX*, 30(1):276–290, 2008.
- [10] A. Bouhamidi, M. Hached, M. Heyouni, and K. Jbilou. A preconditioned block Arnoldi method for large Sylvester matrix equations. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 2011.
- [11] K. Brabender. *Optimale Dämpfung von linearen Schwingungssystemen*. PhD thesis, Fernuniversität, Hagen, 1998.
- [12] H. Braden. The equations $A^T X \pm X^T A = B$. *SIAM J. Matrix Anal. Applic.*, 20:295–302, 1998.

- [13] S. Brahma and B. N. Datta. A norm-minimizing parametric algorithm for quadratic partial eigenvalue assignment via Sylvester equation. *Proc. European Control Conference, Kos, Greece*, pages 1–6, 2007.
- [14] S. Brahma and B. N. Datta. An optimization approach for minimum norm and robust partial quadratic eigenvalue assignment problems for vibrating structure. *Journal of Sound and Vibration*, 324(3-5):471–489, 2009.
- [15] R. Byers and D. Kressner. Structured Condition Numbers for Invariant Subspaces. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 28(2):326–347, 2006.
- [16] D. B. C. Thornton. Computer simulated deformation of compact granular assemblies. *Acta Mechanica*, 64:45–61, 1986.
- [17] D. Calvetti and L. Reichel. Application of ADI iterative methods to the restoration of noisy images. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, (17):165–186, 1996.
- [18] T. K. Caughey. Classical normal modes in damped linear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 27(2):269–271, 1960.
- [19] S. Cox, I. Nakić, A. Rittmann, and K. Veselić. Lyapunov optimization of a damped system. *Systems & Control Letters*, 53:187–194, 2004.
- [20] S. J. Cox. Designing for optimal energy absorption II, distributed parameters systems. In *Proceedings of an Int. Conf. on Control and Estimation of Distributed Parameter Systems*, number 108, pages 103–109, 1996.
- [21] S. J. Cox. Designing for optimal energy absorption, I: Lumped parameter systems. *ASME J. Vibration and Acoustics*, 120(2):339–345, 1998.
- [22] B. N. Datta. *Numerical Methods for Linear Control Systems*. Elsevier Academic Press, 2004.
- [23] W. Enright. Improving the efficiency of matrix operations in the numerical solution of stiff ordinary differential equations. *ACM Trans. Math. Softw.*, (4):127–136, 1978.
- [24] Z. B. Fan and C. Bu. The solution of the matrix equation $AX - X^T B = C$. *College Maths.*, 20:100–102, 2004.
- [25] G. Freiling. A Survey of Nonsymmetric Riccati Equations. *Linear Algebra and its Applications*, 351-352:243–270, 2002.
- [26] P. Freitas and P. Lancaster. On the optimal value of the spectral abscissa for a system of linear oscillators. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 21:195–208, 1999.
- [27] Z. Gajic and M. Qureshi. *Lyapunov Matrix Equation in System Stability and Control*. Academic Press, Mathematics in Science and Engineering Series, San Diego, 1995.

-
- [28] G. H. Golub and C. F. V. Loan. *Matrix Computations*. University Press, Baltimore, 1989.
- [29] C.-H. Guo and N. J. Higham. Iterative Solution of a Nonsymmetric Algebraic Riccati Equation. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 29(2):396–412, 2007.
- [30] S. J. Hammarling. Numerical solution of the stable, nonnegative definite Lyapunov equation. *IMA J. Numer. Anal.*, 2(3):303–323, 1982.
- [31] H. V. Henderson and S. R. Searle. On Deriving the Inverse of a Sum of Matrices. *SIAM Review*, 23(1):53–60, 1981.
- [32] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1990.
- [33] D. Y. Hu and L. Reichel. Krylov-subspace methods for the Sylvester equation. *Linear Algebra Appl.*, 172:283–313, 1992.
- [34] I. M. Jaimoukha and E. M. Kasenally. Krylov subspace methods for solving large Lyapunov equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31:227–251, 1994.
- [35] K. Jbilou. Low rank approximate solutions to large Sylvester matrix equations. *Appl. Math. Comput.*, 177:365–376, 2006.
- [36] J. Juang and W. W. Lin. Nonsymmetric algebraic Riccati equations and Hamiltonian-like matrices. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 20:228–243, 1998.
- [37] D. Kressner, C. Schröder, and D. S. Watkins. Implicit QR Algorithms for Palindromic and Even Eigenvalue Problems. *Numerical Algorithms*, 51(2):209–238, 2009.
- [38] I. Kuzmanović and N. Truhar. Optimization of the solution of the parameter-dependent Sylvester equation and applications. Poslano, 2010.
- [39] P. Lancaster and M. Tismenetsky. *The Theory of Matrices*. Academic Press, New York, 1985.
- [40] J.-R. Li and J. White. Low-rank solution of Lyapunov equations. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 24:260–280, 2002.
- [41] A. Lu and E. Wachspress. Solution of Lyapunov equations by ADI iteration. *Comp. Math. Appl.*, 21:43–58, 1991.
- [42] M. McGarry and E. V. Houten. Use of a Rayleigh damping model in elastography. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 46:759–766, 2008.
- [43] V. Mehrmann and H. Xu. Explicit Solutions for a Riccati Equation from Transport theory. *SIAM J. Matrix Analysis Applications*, 30(4):1339–1357, 2008.

- [44] G. Meurant. Estimates of the Norm of the Error in Solving Linear Systems with FOM and GMRES. *SIAM J. Scientific Computing*, 33(5):2686–2705, 2011.
- [45] P. C. Müller and M. Gürgöze. Optimale Dämpfungsstärke eines viskosen Dämpfers bei einem mehrläufigen Schwingungssystem. *Z. Angew. Math. Mech.*, 71(12):60–63, 1991.
- [46] I. Nakić. *Optimal damping of vibrational systems*. PhD thesis, Fernuniversität, Hagen, 2003.
- [47] M. Paz. *Structural dynamics, theory and computation*. Van Nostrand Reinhold, New York, 1991.
- [48] T. Penzl. A cyclic low-rank smith method for large sparse Lyapunov equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 21:1401–1418, 2000.
- [49] W. E. Roth. The equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3:392–396, 1952.
- [50] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems (second ed.)*. SIAM, Philadelphia, 2003.
- [51] J. Semblat. Rheological interpretation of Rayleigh damping. *Journal of Sound and Vibration*, 206:741–744, 1997.
- [52] S. Silvestri and T. Trombetti. Added viscous dampers in shear-type structures: the effectiveness of mass proportional damping. *Journal of Earthquake Engineering*, 8(2):275–313, 2004.
- [53] S. Silvestri and T. Trombetti. On the modal damping ratios of shear-type structures equipped with rayleigh damping systems. *Journal of Sound and Vibration*, 292(2):21–58, 2006.
- [54] S. Silvestri and T. Trombetti. Novel schemes for inserting seismic dampers in shear-type structures based upon the mass proportional component of the rayleigh damping matrix. *Journal of Sound and Vibration*, 302(3):486–526, 2007.
- [55] S. Silvestri, T. Trombetti, and C. Ceccoli. Inserting the Mass Proportional Damping (MPD) system in a concrete shear-type structure. *Structural Engineering and Mechanics*, 16(2):177–193, 2003.
- [56] V. Simoncini. Restarted Full Orthogonalization Method for shifted linear systems. *BIT Numerical Mathematics*, 43(2):459–466, 2003.
- [57] V. Simoncini. A new iterative method for solving large-scale Lyapunov matrix equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 29:1268–1288, 2007.

- [58] D. C. Sorensen and A. Antoulas. The Sylvester equation and approximate balanced reduction. *Linear Algebra Appl.*, (351/352):671–700, 2002.
- [59] D. C. Sorensen and Y. Zhou. Direct methods for matrix Sylvester and Lyapunov equations. *Journal of Applied Mathematics*, (6):277–303, 2003.
- [60] J. J. Sylvester. Sur l'équation en matrices $px = xq$. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 99:67–71, 1884.
- [61] F. Teran and F. M. Dopico. Consistency and efficient solution of the Sylvester equation for $\star$ -congruence: $AX + X^*B = C$. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 22:849–863, 2011.
- [62] F. Tisseur and K. Meerbergen. The quadratic eigenvalue problem. *SIAM Rev.*, 43(2):235–286, 2001.
- [63] N. Truhar. An efficient algorithm for damper optimization for linear vibrating systems using Lyapunov equation. *J. Comput. Appl. Math.*, 172(1):169–182, 2004.
- [64] N. Truhar and K. Veselić. On some properties of the Lyapunov equation for damped systems. *Mathematical Communications*, 9(2):189–197, 2004.
- [65] N. Truhar and K. Veselić. An efficient method for estimating the optimal dampers' viscosity for linear vibrating systems using Lyapunov equation. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 31(1):18–39, 2009.
- [66] J. Vanbiervliet, B. Vandereycken, W. Michiels, S. Vandewalle, and M. Diehl. The smoothed spectral abscissa for robust stability optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 20(1):156–171, 2009.
- [67] K. Veselić. On linear vibrational systems with one dimensional damping ii. *Integral Eq. Operator Th.*, (13):883–897, 1990.
- [68] K. Veselić. Modal approximations to damped linear systems. 2009. Preprint.
- [69] K. Veselić. *Damped Oscillations of Linear Systems - A Mathematical Introduction*. Springer Lecture notes in Mathematics 2023, 2011.
- [70] K. Veselić, K. Brabender, and K. Delinić. Passive control of linear systems. In *Applied Mathematics and Computation*, M. Rogina et al. Eds. Dept. of Math. Univ. Zagreb, pages 39–68, 2001.
- [71] E. L. Wachspress. Iterative solution of the Lyapunov matrix equation. *Appl. Math. Lett.*, 1:87–90, 1988.
- [72] E. Wilson. *Three Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures: A physical approach with emphasis on earthquake engineering*. Computers and Structures Inc., Berkeley, California, USA, 1995.

- [73] H. K. Wimmer. Roth's Theorems for Matrix Equations With Symmetry Constraints. *Linear Algebra Appl.*, 199:357–362, 1994.
- [74] M. A. Woodbury. *Inverting modified matrices*. Statistical Research Group, Memo. Rep. no. 42. Princeton University, Princeton, N. J., 1950.
- [75] J. R. Wright and J. E. Cooper. *Introduction to aircraft aeroelasticity and loads*. Wiley, 2007.
- [76] B. Xu, Z. Wu, G. Chen, and K. Yokoyama. Direct identification of structural parameters from dynamic responses with neural networks. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 17:931–943, 2004.
- [77] Y. Zhou. *Numerical Methods for Large Scale Matrix Equations with Applications in LTI System Model Reduction*. PhD thesis, Rice University, 2002.

Životopis

Rođena sam 20. siječnja 1982. godine u Osijeku, Hrvatska. Osnovnoškolsko obrazovanje završila sam u Petrijevcima, a srednju Prirodoslovno-matematičku gimnaziju završila sam u Osijeku. 2000. godine upisala sam studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Osijeku, smjer matematika-informatika. Diplomirala sam u svibnju 2005. godine kao profesor matematike i informatike pod mentorstvom prof. dr. sc. Rudolfa Scitovskog s diplomskim radom pod nazivom *Metode direktnog traženja minimuma*.

Tijekom studija nagrađena sam Rektorovom nagradom za akademsku godinu 2003./04. za seminarski rad pod nazivom *Jedna metoda procjene parametara u smislu minimizacije sume L_p ortogonalnih udaljenosti*. Iste godine osvojila sam i godišnju nagradu Lions cluba Osijek za najbolje studente Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku.

Tijekom travnja 2005. godine bila sam zaposlena u III. gimnaziji u Osijeku kao profesor matematike. Od lipnja 2005. godine zaposlena sam kao asistent na Odjelu za matematiku, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, gdje izvodim vježbe iz više kolegija.

Akadske godine 2005./06. upisala sam Sveučilišni poslijediplomski doktorski studij na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Od 2010. godine moj znanstveni rad je pod mentorstvom prof. dr. sc. Ninoslava Truhara. Tijekom poslijediplomskog studija održala sam šest seminara na Seminaru za optimizaciju i primjene i Seminaru za numeričku matematiku i računarstvo. Sudjelovala sam na dvije ljetne škole usko vezane uz područje moga rada, te kao autor ili koautor sudjelovala na pet međunarodnih konferencija. Autor sam nekoliko stručnih radova, te koautor u tri (objavljena ili u postupku objavljivanja) znanstvena rada u međunarodnim časopisima.

Sažetak

U ovoj disertaciji promatra se problem rješavanja i optimizacije rješenja strukturiranih Sylvesterovih (odnosno Ljapunovljevih) i T -Sylvesterovih matričnih jednačbi, s posebnim naglaskom na parametarski ovisne Sylvesterove, odnosno T -Sylvesterove jednačbe. U radnji je pokazano da korištenje strukture može značajno doprinijeti ubrzanju procesa rješavanja Sylvesterove i T -Sylvesterove jednačbe, a osobito specijalno povezanih nizova jednačbi koji se javljaju primjerice u procesu optimizacije rješenja parametarski ovisne Sylvesterove, odnosno T -Sylvesterove jednačbe.

Zbog odgovarajuće strukture, u radnji se proučavaju Sylvesterove jednačbe kod kojih su pripadne matrice zbroj jednostavnih matrica (primjerice dijagonalnih ili blok dijagonalnih) s matricama maloga ranga, odnosno jednačbe oblika

$$(A_0 + U_1 V_1)X + X(B_0 + U_2 V_2) = E,$$

pri čemu su A_0, B_0 jednostavne matrice, a U_1, V_1, U_2, V_2 matrice malog ranga r . Primjenom standardne Sherman-Morrison-Woodbury-eve formule moguće je dobiti takozvanu Sherman-Morrison-Woodbury-evu formulu za rješenje prethodne jednačbe, što omogućava razvijanje algoritma koji koristeći strukturu rješava jednačbu tog oblika znatno efikasnije od standardnih algoritama. Algoritam baziran na Sherman-Morrison-Woodbury-evoj formuli osobito je efikasan za računanje rješenja parametarski ovisne Sylvesterove jednačbe

$$(A_0 - vU_1 V_1)X(v) + X(v)(B_0 - vU_2 V_2) = E$$

za više vrijednosti parametra v . Dok je za standardne metode potrebno $\mathcal{O}(n^3)$ elementarnih operacija za svaku vrijednost parametra v , metoda bazirana na Sherman-Morrison-Woodbury-evoj formuli treba $\mathcal{O}(rkn^2)$, gdje je $r, k \ll n$ operacija za prvu vrijednost od v , dok svako sljedeće rješavanje s drugom vrijednosti od v iziskuje samo $\mathcal{O}(rn^2)$ operacija, gdje je k dimenzija pripadnog Krylovljevog potprostora. Osim toga, ovim pristupom moguće je i derivacije od $X(v)$ računati u $\mathcal{O}(rn^2)$ elementarnih operacija, što omogućava također efikasnu optimizaciju rješenja $X(v)$ s obzirom na parametar

v. Specijalan slučaj, parametarski ovisna Ljapunovljeva jednadžba oblika

$$(A_0 - vUU^T)X(v) + X(v)(A_0 - vUU^T)^T = E$$

javlja se pri računanju i optimizaciji viskoznosti prigušivača mehaničkih sustava s obzirom na kriterij minimizacije usrednjene jedinične ukupne energije. Opisani problemi proučavaju se u poglavljima 3 i 4.

Slično kao u slučaju Sylvesterove jednadžbe, Sherman-Morrisonov-Woodbury-evu formulu moguće je primjeniti i na T -Sylvesterovu jednadžbu oblika

$$(A_0 + U_1V_1)X + X^T(B_0 + U_2V_2) = E,$$

pri čemu su A_0, B_0 jednostavne matrice, a U_1, V_1, U_2, V_2 matrice malog ranga. Dobi-vena formula omogućava konstrukciju efikasnog algoritma za rješavanje prethodne T -Sylvesterove jednadžbe, kao i rješavanje i optimizaciju rješenja parametarski ovisne T -Sylvesterove jednadžbe. Sherman-Morrison-Woodbury-eva formula za T -Sylvesterovu jednadžbu promatra se u 5. poglavlju.

Već spomenuti problem optimizacije prigušenja mehaničkih sustava usko je vezan za Ljapunovljevu jednadžbu. U posljednjem poglavlju proučava se optimalno modalno prigušenje D dinamičkog sustava opisanog jednadžbom $M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = 0$ koje će za dane matrice mase M i krutosti K osigurati najbolje (s obzirom na neki kriterij) iščezavanje gibanja sustava u vremenu. Kao optimizacijski kriteriji za ovaj problem koriste se kriteriji minimalnog traga, minimalne spektralne norme i minimalne Frobeniusove norme rješenja sustavu pripadne Ljapunovljeve jednadžbe. Izvedeni su optimalni parametri za specijalne tipove modalnog prigušenja, kao što su prigušenje proporcionalno masi, prigušenje proporcionalno krutosti, Rayleigh-evo prigušenje i dr. Traženi optimalni parametri dobiveni su optimizacijom rješenja pripadne parametarski ovisne Ljapunovljeve jednadžbe obzirom na navedene kriterije optimalnosti i dani su u poglavlju 6.

Summary

The problem of solving and optimizing the solution of structured Sylvester (i.e. Lyapunov) and T -Sylvester matrix equations is considered in this dissertation, with special focus on the parameter dependent Sylvester and T -Sylvester equations. It has been shown that the use of a structure can significantly contribute to acceleration of the process of solving the Sylvester as well as the T -Sylvester equation, and especially some related sequences of equations that arise e.g. in the process of optimization of the solution of parameter-dependent Sylvester and T -Sylvester equations.

Due to the appropriate structure, Sylvester equations in which matrices are the sum of simple matrices (e.g. diagonal or block-diagonal) with small-rank matrices are considered in this dissertation, i.e. Sylvester equations of the form

$$(A_0 + U_1 V_1)X + X(B_0 + U_2 V_2) = E,$$

where A_0, B_0 are simple matrices and U_1, V_1, U_2, V_2 are matrices with a low rank r . By using the standard Sherman-Morrison-Woodbury formula it is possible to obtain the so-called Sherman-Morrison-Woodbury formula for the solution of the previous equation. The obtained formula can be used for the construction of an algorithm that solves the equation of the given form much more efficiently than standard algorithms. An algorithm based on the Sherman-Morrison-Woodbury formula is especially efficient for computing the solution of the parameter dependent Sylvester equation

$$(A_0 - vU_1 V_1)X(v) + X(v)(B_0 - vU_2 V_2) = E$$

for many different values of parameter v . While the standard methods need $O(n^3)$ elementary operations for each different value of parameter v , the method based on the Sherman-Morrison-Woodbury formula has complexity $O(rkn^2)$, where $r, k \ll n$ for the first value of v , while each of the following solving processes with the other value of v needs only $O(rn^2)$ operations, where k is the dimension of the corresponding Krylov subspace. In addition, this approach also allows computation of derivatives of $X(v)$ in $O(rn^2)$ elementary operations, which enables efficient optimization of the solution $X(v)$ with respect to parameter v .

A special case, a parameter-dependent Lyapunov equation of the form

$$(A_0 - vUU^T)X(v) + X(v)(A_0 - vUU^T)^T = E,$$

occurs during calculation and optimization of dampers' viscosity in mechanical systems with respect to the criterion of minimizing the average total unit energy. The described problems are studied in Chapters 3 and 4.

Similarly to the case of the Sylvester equation, the Sherman-Morrison-Woodbury formula can be applied to the T -Sylvester equation of the form

$$(A_0 + U_1V_1)X + X^T(B_0 + U_2V_2) = E,$$

where A_0, B_0 are simple matrices and U_1, V_1, U_2, V_2 are matrices with a low rank r . The obtained formula is used for the construction of an efficient algorithm for solving the aforementioned T -Sylvester equation, as well as for solving and optimizing the solution of the parameter-dependent T -Sylvester equation. The Sherman-Morrison-Woodbury formula for the T -Sylvester equation is considered in Chapter 5.

The aforementioned problem of optimizing dampers' viscosity in mechanical systems is closely related to the Lyapunov equation. The last chapter considers optimal modal damping of dynamical system described by equation $M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = 0$ which will for given mass and stiffness matrices M and K ensure the best (with respect to some criterion) evanescence of the oscillations of the system in time. Criteria of minimum trace, minimum spectral norm and minimum Frobenius norm of the solution of system's corresponding Lyapunov equation are used as optimization criteria for this problem. Optimal parameters for some special types of modal damping, such as mass proportional damping, stiffness proportional damping, Rayleigh damping, etc. are derived. The required optimal parameters are obtained by optimizing the solution of the corresponding parameter-dependent Lyapunov equation with respect to the above-mentioned criteria of optimality and results are presented in Chapter 6.

