Plimpton 322

Maja Libl[1], **Ivan Matić**[2]

1 Uvod

Dok se brojni matematičari trude naći nove primjene matematike, moderna znanstvena otkrića i inovativne pristupe nastavi, neki pak gledaju unazad, u davno vrijeme nastanka prvih rezultata u matematici, odakle i povjesničari i matematičari mogu crpiti znanja i ideje. Kako je to gotovo uvijek u povijesnim istraživanjima, kod nalaza postoje različita tumačenja o njihovu porijeklu, sadržaju, razlogu nastanka pa i o samoj namjeni. U ovom radu ćemo opisati jednu od sačuvanih glinenih pločica iz babilonske ere od prije oko 4000 godina, pločicu koja predstavlja jedan od prvih tragova nastave matematike, poznatu pod nazivom Plimpton 322. Ova glinena pločica, za koju se smatra da datira iz otprilike 1760 godine prije Krista, svoj naziv duguje kolekcionaru Georgeu Arthuru Plimptonu u čijoj zbirci na Sveučilištu u Columbiji se nalazi.

Kako bi mogli bolje razumijeti sadržaj ove važne povijesne ostavštine, upoznajmo se najprije s matematikom njenih tvoraca.

Babilonska civilizacija se razvila oko 2000. prije Krista propašću sumeranske civilizacije u Mezopotamiji, području koje danas dijelom pripada Iraku. Sumeranska civilizacija je bila napredna civilizacija koja je gradila gradove i razvila sustave za navodnjavanje, a stvorena je miješanjem sumeranske i akadske kulture. Babilonci su od Sumerana naslijedili ideje za seksagezimalni brojevni sustav i klinasto pismo kojim su pisali po glinenim pločicama. Koristili su zašiljenu trsku, kojom su pisali po mokrim pločicama koje su se kasnije pekle na suncu. Osim zadataka i tablica, sadržavale su i nacrte spomenutih sustava za navodnjavanje.

Mnoge od tih pločica su ostale sačuvane i upravo one su izvori za proučavanje povijesti babilonske matematike.

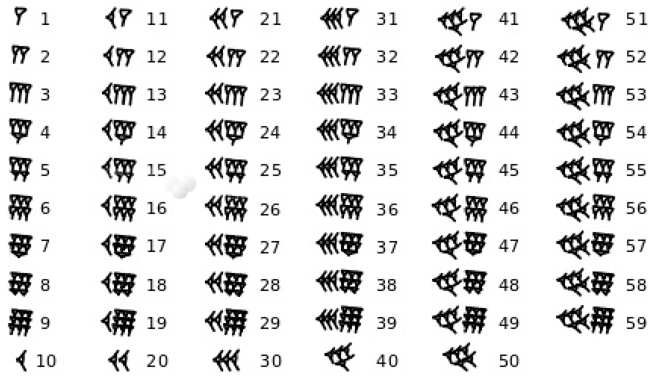
Babilonci su koristili brojevni sustav s bazom 60 koji su Sumerani razvili oko 2500. godine prije Krista. Postoje brojne teorije o tome zašto

[1]e-mail: maja.libl@skole.hr, Osnovna škola Marije i Line, Umag
[2]e-mail: imatic@mathos.hr, Odjel za matematiku, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku

su Sumerani odabrali broj 60 za bazu svog sustava. Mnogi kao razlog navode velik broj djelitelja broja 60 (koji je najmanji prirodan broj djeljiv s 1, 2, 3, 4 i 5 te stoga baza 60 pridonosi jednostavnijoj podjeli na trećine, četvrtine i petine), dok prema drugima razlozi leže u iznimnom interesu Sumerana za astronomiju, gdje se 60 može dovesti do veze s brojem tada poznatih planeta, mjeseci i dana u godini.

Zaista, ono što smo do danas zadržali od Sumerana je podjela tjedna na 7 dana, dana na 24 sata, sata na 60 minuta i minuta na 60 sekundi. Pretpostavlja se da su znali kako broj stupnjeva u krugu iznosi 360 i kako godina ima 365 dana.

Babilonci su za prikaz brojeva koristili samo dva osnovna oblika: simbol $\bigvee$ za 1 i simbol $\prec$ za 10. Na Slici 1 vidimo kombinacije ta dva osnovna oblika za prikaz 59 znamenki njihova brojevnog sustava.



Slika 1: Znamenke u babilonskom brojevnom sustavu

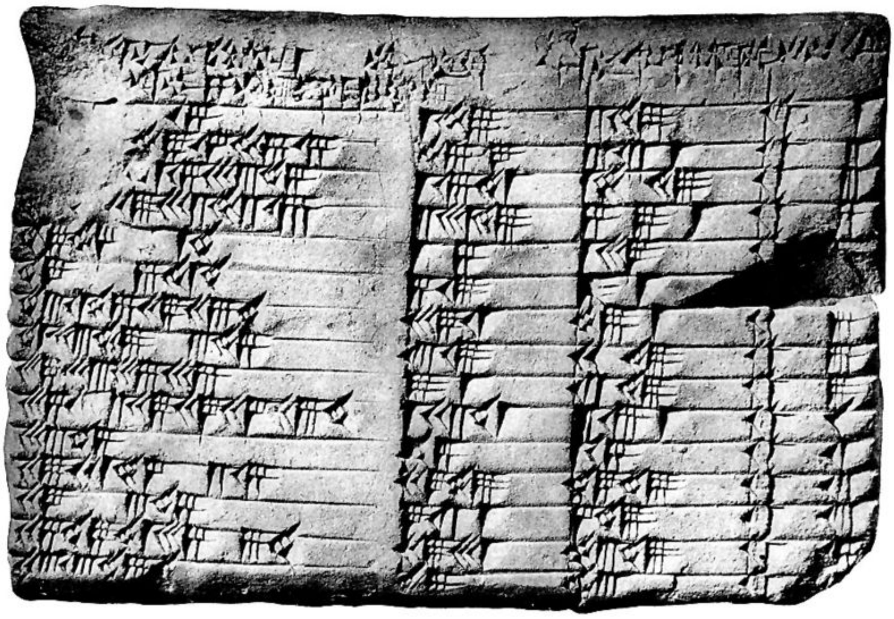
Sustav je bio pozicijski. U pozicijskom brojevnom sustavu, kakav i danas koristimo, vrijednost znamenke ovisi o njezinu položaju u broju pa se prilikom zapisivanja moralo paziti na prazna mjesta između brojeva. Na primjer u dekadskom zapisu kod broja 4305, nula se koristi da pozicije znamenki 4 i 3 budu točne jer broj 435 ima drugačije značenje, kao i broj 3405. Slično tome, u zapisu kakav su koristili Babilonci broj

predstavlja $1 \cdot 60^2 + 2 \cdot 60 + 36 = 3756$. Znamenka najveće težinske vrijednosti se nalazi s lijeve strane i njezina težinska vrijednost je jednaka

$60 \cdot n$ gdje je n takav da može biti $1 \leq n \leq 59$. Babilonci nisu imali simbol za nulu niti simbol za decimalnu točku te se sve moralo prosuđivati iz konteksta, što komplicira tumačenje nalaza iz tog doba.

2 Plimpton 322

Pločica Plimpton 322 (Slika 2) je veličine današnjeg kalkulatora te sadrži jedan redak čistog teksta i tablicu brojeva s 4 stupca i 15 redaka.



Slika 2: Plimpton 322

Pločica je djelomično oštećena u lijevom gornjem kutu, pa nedostaje dobar dio prvog stupca dok su drugi, treći i četvrti stupac potpuno vidljivi.

2.1 O sadržaju pločice

U početku se smatralo kako je Plimpton 322 samo još jedan primjer babilonskog zapisnika, jer su drevni Babilonci na brojnim sličnim pločicama zapisivali količine žitarica, brojno stanje stoke ili izračune poreza. No, početkom 40-ih godina prošlog stoljeća su povjesničari Otto Neugebauer i Abraham Sachs primijetili kako retci na pločici zadovoljavaju interesantno svojstvo, usko vezano uz takozvane Pitagorine trojke, tj. uređene trojke prirodnih brojeva (a, b, c) koje zadovoljavaju jednakost $a^2 + b^2 = c^2$.

Naime, brojevi u srednja dva stupca su upravo duljine kraće stranice b i hipotenuze c pravokutnog trokuta (gdje je $b < a$). U gornjem retku pločice iznad drugog stupca stoji 'širina', dok je iznad trećeg stupca napisano 'dijagonala'. Kako je u to vrijeme pravokutni trokut bio promatran kao polovica pravokutnika, tj. dio na koji pravokutnik dijeli jedna njegova dijagonala, hipotenuza pravokutnog trokuta je bila nazivana dijagonalom, dok je kraća stranica bila nazivana širinom. Prvi stupac, gledano slijeva, sadrži kvocijente $\left(\frac{c}{a}\right)^2$ ili $\left(\frac{b}{a}\right)^2$, dok posljednji stupac sadrži numeraciju redaka od 1 do 15. Nije moguće sa sigurnošću utvrditi od kojima se od navedenih kvocijenata u prvom stupcu radi jer oštećenja na pločici skrivaju vodeću znamenku, koja može biti 0 ili 1. Primijetimo da zaista iz identiteta $a^2 + b^2 = c^2$ dijeljenjem s a^2 dobivamo $1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2$ te se navedeni kvocijenti zbilja razlikuju za 1.

Navedimo i prvih nekoliko redaka pločice:

(1).9834	119	169	1
(1).9416	3367	11521	2
(1).9188	4601	6649	3
(1).8862	12709	18541	4
(1).8150	65	97	5

(podsjetimo kako zbog oštećenja ne možemo biti sigurni počinju li brojevi u prvom stupcu s 0 ili s 1).

Autor ove pločice je ipak načinio i nekoliko manjih pogrešaka u računu, koje se nalaze u drugom, osmom, devetom, trinaestom i petnaestom retku. Pogrešku u drugom retku možemo lako provjeriti, jer pravokutni trokut duljine hipotenuze 11521 i jedne katete 3367 nema drugu katetu cjelobrojne duljine.

To ipak ne umanjuje činjenicu kako je Plimpton 322 dokaz da su Pitagorine trojke bile poznate i tisućama godina prije pojave matematike antičke Grčke. Kako nema povijesnih dokaza da su Babilonci poznavali i dokaz Pitagorina teorema, smatra se kako su tim rezultatom koristili kao prihvaćenim pravilom. No, ispostavlja se kako pločica Plimpton 322 pokazuje i mnogo više. Zapisane Pitagorine trojke predstavljaju redom pravokutne trokute (čije duljine stranica su prirodni brojevi) s manjim šiljastim kutom između 45° i 30°, poredanim na način da kutovi opadaju od prvog retka prema zadnjem. Na primjer, pravokutni trokut iz prvog retka ima manji šiljasti kut jednak otprilike 44.76°, iz trećeg retka 43.78°, a iz desetog retka 37.43°.

Također je zanimljivo primijetiti kako su svi decimalni zapisi u prvom stupcu konačni. Podsjetimo se kako u dekadskom brojevnom sustavu koji mi koristimo razlomak ima konačan decimalni zapis ukoliko se u nazivniku pojavljuju isključivo potencije brojeva 2 i 5, prostih faktora baze sustava. Isto tako, zapisi na pločici su odabirani na način da duljina stranice a sadrži samo potencije brojeva 2, 3 i 5 (prostih faktora broja 60, baze seksagezimalnog sustava) kako bi decimalni zapisi bili konačni. Iz mnogih arheoloških nalaza je vidljivo kako Babilonci općenito nisu bili skloni koristiti iracionalne brojeve.

Prema nekim autorima (npr. [3]), Plimpton 322 predstavlja oblik trigonometrijske pločice, koja opisuje geometriju pravokutnog trokuta te je uređena na način da se kutovi iz retka u redak smanjuju za otprilike 1°.

Prema drugim autorima, poput [5], tablica zapisana na pločici je nastala generiranjem određenih Pitagorinih trojki na način da su odabirani prirodni brojevi p i q, gdje je $p > q$ te oni nisu iste parnosti, a za takve p i q su $p^2 - q^2$, $2pq$ i $p^2 + q^2$ stranice pravokutna trokuta. Zaiste, identitet $(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = (p^2 + q^2)^2$ se lako može provjeriti direktno, a i sve Pitagorine trojke se mogu dobiti na vrlo sličan način, uzimajući dodatno da p i q nemaju zajedničkog djelitelja većeg od 1 i množeći svaki od izraza $p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2$ prirodnim brojem, što je detaljno pojašnjeno u [1].

No, obje ove teorije imaju određenih manjkavosti, jer se iz drugih povijesnih nalaza koji datiraju iz istog razdoblja (a radi se o stotina matematičkih i nematematičkih tablica) ne nazire niti da su Babilonci poznavali navedeni način generiranja Pitagorinih trojki niti da su se na području Mezopotamije kutovi mjerili i njihove mjere zapisivale.

Prema novijoj teoriji ([6]), zapisi na pločici objedinjuju i dva omiljena problema babilonske matematike - problem Pitagorinih trojki i problem recipročnih vrijednosti. Za Babilonce se problem recipročnih vrijednosti sastojao u tome da se za dani x odredi vrijednost y tako da je ili $x \cdot y = 1$ ili je $x \cdot y$ potencija od 60, baze njihova brojevnog sustava. Danas bi varijanta ovog problema bila tražiti par x, y, uz neke uvjete na njima (poput poznavanje njihove sume ili razlike), tako da je $x \cdot y$ jednako 1, 10, 100 ili npr. 1000. U vrijeme nastanka ove pločice dijeljenje nije bilo korišteno kao algebarska operacija na današnji način, ali u različitim povijesnim zapisima se opisuje potraga za recipročnim vrijednostima prirodnih brojeva. Već je i tada, nekoliko tisućljeća unazad, opažena uska veza između navedenih dvaju problema. Naime, ukoliko x i y čine recipročni par (tj. ako je $x \cdot y = 1$), tada vrijedi identitet

$$1^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

odakle množenjem parnim brojem, kako bi se nazivnici pokratili, dobivamo Pitagorinu trojku. Naravno, Babilonci nisu imali modernu notaciju kakvu mi danas koristimo, ali se na brojnim nalazima iz tog doba mogu pronaći zapisi koji sadrže probleme slične navedenom. Veza između ovih problema i sadržaja pločice je također uočena i u [2].

U čemu se dakle sastoji polazni problem koji je prouzročio zapise na pločici? Zamislimo kako želimo pronaći recipročni par koji se razlikuje za odabrani broj n, koji je obično prirodan. Dakle, tražimo x i y takve da je $x \cdot y = 1$ te je $x - y = n$. Babilonci bi obično x i y zamišljali kao duljine stranica pravokutnika površine jednake 1. Podijelimo najprije $x - y$ s 2, dobiveni izraz kvadrirajmo te dobivenom kvadratu dodajmo 1. Sada odredimo izraz čiji je kvadrat jednak dobivenom broju (ili, u babilonskoj interpretaciji, odredimo stranicu kvadrata čija je površina jednaka dobivenom broju). Ustvari je taj izraz jednak $\frac{x+y}{2}$ te dodavanjem i oduzimanjem ranije izračunatog izraza $\frac{x-y}{2}$ dobivamo tražene x i y.

Tome u prilog ide i dio polaznog retka pločice nad prvim stupcem, koji u slobodnom prijevodu (ili barem posljednjem prijedlogu tog prijevoda) glasi: Pomoćni kvadrat hipotenuze, nakon odbacivanja jedinice, daje kraću stranicu. Odbacivanje jedinice u ovom navodu pokazuje kako se u prvom stupcu ipak nalaze kvocijenti $\left(\frac{c}{a}\right)^2$ koji započinju znamenkom 1.

2.2 O autoru pločice

U ovom poglavlju ćemo se posvetiti porijeklu pločice Plimpton 322, oko kojeg se svi povjesničari slažu. Iako su se oko sadržaja i pozadinskog znanja potrebnog da bi se ova pločica sastavila vodile brojne polemike, povijesne činjenice se prilično dobro poklapaju kada se radi o interesu samog autora da napravi ovu pločicu. Najprije, gotovo je sigurno da je autor bio muškarac, jer su u to vrijeme jedine žene koje su u području Mezopotamije učile pisati živjele mnogo sjevernije. Prema zapisima kojima raspolažemo iz tog doba, možemo također zaključiti kako se autor nije niti profesionalno niti amaterski bavio matematikom, pošto na tu temu nema potkrepljujućih dokaza u svih 3000 godina povijesti Mezopotamije. Prema tome, autor bi morala biti osoba koja se koristila matematikom u svom svakodnevnom životu i poslu. Metode za određivanje recipročnih parova i stranica pravokutnih trokuta, kakvima se mogu dobiti rezultati prisutni na pločici, su se tada učile u pisarskim školama, te bi autor mogao biti učenik ili učitelj.

Nadalje, zapisi na pločici su u formatu dokumenata kakvi su u to vrijeme bili korišteni u administraciji tamošnjih hramova i dvorova, što nije moglo biti poznato učeniku, već nekom birokratskom pisaru.

Iz drugih zapisa koji datiraju u isto razdoblje se može otkriti kako je serija učitelja iz doba antičke Mezopotamije radila i posao vezan uz administraciju u hramovima, pa ako je autor ove pločice bio učitelj, vjerojatno je bio i birokrat.

No, naravno da Plimpton 322 ne predstavlja zapis iz pisarnice nekog hrama ili palače, to je jasno iz njegova sadržaja. Sada se kao jedini logičan zaključak nameće kako je ova pločica napisana od strane učitelja te predstavlja radni listić antičkoga doba, učiteljev popis problema koji će biti dani učenicima za vježbu ili ispit znanja. Prema svim izvorima, zapis na pločici Plimpton 322 predstavlja nekoliko primjera istog problema iz matematike koja se učila u školama tog doba, s pažljivo odabranim skupom podataka kako bi sva krajnja rješenja bila cjelobrojna, a svi decimalni brojevi koji se pojavljuju imali konačan zapis. Podaci na pločici se mogu smatrati grupiranima na način da učitelju omoguće da učenicima postavi zadatke iz istog područja za vježbu te da provjeri njihova konačna rješenja i međukorake bez da sam prolazi čitav računski postupak.

Možda iz tog razloga ova pločica ne sadrži najpoznatiju i najelementarniju Pitagorinu trojku $(3, 4, 5)$ (zaista, $3^2+4^2 = 5^2$), jer je ona kao polazni primjer bila predstavljena od strane učitelja koji ju ne smatra potrebnom ponavljati u zadacima za vježbu.

Praktički je identičan pristup i danas prisutan u nastavi matematike, a autor pločice Plimpton 322 možda i nije bio izdvojeni matematičar ispred svoga vremena, ali je vjerojatno bio prilično dobar učitelj. Njegova je pripremljenost za nastavu poživjela idućih nekoliko tisućljeća te nam ostavila i vrijedan nalaz, jedan od prvih pisanih (tj. klesanih) tragova o nastavi matematike.

Literatura

[1] A. Dujella: *Uvod u teoriju brojeva*, skripta, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odjel, Zagreb, 2008.

[2] J. Friberg: *Methods and traditions of Babylonian mathematics: Plimpton 322, Pythagorean Triples, and the Babylonian Triangle Parameter Equations*, Historia Mathematica, 8(1981), 277-318

[3] D.E. Joyce: *Plimpton 322 Tablet*, Clark University, 1995.

[4] M. Libl: *Antička računala*, Diplomski rad, Odjel za matematiku, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, 2013.

[5] O. Neugebauer: *The Exact Sciences in Antiquity*, Brown University Press, Dover, New York, 1969.

[6] E. Robson: *Words and pictures: New light on Plimpton 322*, American Mathematical Monthly, 109, 2(2002), 105–120