Vjerojatnost i statistika

Građevinski fakultet, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku,
ak. god. 2015./2016.

1. vježbe: Osnove kombinatorike

12. listopada 2015.

1 Osnove kombinatorike

1.1 Osnovni principi prebrojavanja

Princip jednakosti

Teorem 1. Neka su S i T konačni skupovi. Ako postoji bijekcija među njima, tada je $k(S) = k(T)$.

Primjer 1. Iz jednog grada prema sjeveru vode 3 ceste, prema zapadu 2 ceste, prema istoku 2 ceste i prema jugu 1 cesta. Na koliko se različitih načina može cestom izaći iz toga grada ?

Princip sume

Teorem 2. Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $S_1, \ldots, S_n$ konačni skupovi takvi da je $S_i \cap S_j = \emptyset$, $i \neq j$ (dakle, disjunktni su). Tada je $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$ konačan skup i vrijedi:

$$k(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n) = k(S_1) + k(S_2) + \ldots + k(S_n).$$

Primjer 2. Trebamo odabrati jedan par, mladića i djevojku, iz razreda koji se sastoji od 21 djevojke i 5 mladića. Na koliko različitih načina to možemo napraviti ?

Princip produkta

Teorem 3. Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $S_1, \ldots, S_n$ konačni skupovi (ne nužno disjunktni). Tada je njihov Kartezijev produkt konačan skup i vrijedi:

$$k(S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n) = k(S_1) \cdot k(S_2) \cdot \ldots \cdot k(S_n).$$

Zadatak 1. Muškarac na raspolaganju ima 4 košulje, 3 kravate, 2 hlača i 2 para cipela. Na koliko se različitih načina on može odjenuti ?

Primjer 3. Iz grada A u grad B vode 4 ceste, a iz grada B u grad C vode 3 ceste. Na koliko se različitih načina može doći iz grada A u grad C preko grada B ?

Primjer 4. Na nekom šahovskom turniru svaki je igrač odigrao sa svakim od preostalih igrača jednu partiju. Ukupno je odigrano 78 partija. Koliko je šahista sudjelovalo na tom turniru ?

Princip uzastopnog prebrojavanja

Teorem 4. Neka su $A_1, \ldots, A_n$ konačni skupovi i neka je $T \subset A_1 \times \ldots \times A_n$ skup uređenih n-torki $(a_1, \ldots, a_n)$ definiranih na sljedeći način: prva komponenta a_1 može se birati na k_1 načina (dakle, među k_1 različitih elemenata skupa A_1); za svaku već izabranu prvu komponentu, drugu komponentu a_2 možemo birati na k_2 različitih načina itd. Za svaki izbor komponenata $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$, n-tu komponentu a_n možemo odabrati na k_n različitih načina. Tada je kardinalni broj skupa T jednak :

$$k(T) = k_1 \cdot \ldots \cdot k_n.$$

Zadatak 2. Koliko dijagonala ima konveksan $n-$terokut ?

1.2 Varijacije i permutacije

Primjer 5. Koliko ima međusobno različitih "riječi" od 2 slova, a koliko od 3 slova iz skupa $\{M, O, R, E\}$?

Varijacija r-tog razreda

Definicija 1. Neka je $A = \{a_1, \ldots a_n\}$ skup koji se sastoji od n elemenata i neka je $r \in \mathbb{N}$, $r \leq n$. **Varijacija r-tog razreda** u skupu A je svaka uređena r-torka međusobno <u>različitih</u> elemenata iz skupa A. Broj varijacija r-tog razreda n-članog skupa je:

$$V_n^r = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Primjer 6. Na koliko različitih načina pet ljudi može stati u red?

Permutacija

Definicija 2. Svaku uređenu n-torku skupa od n elemenata zovemo **permutacija**. Broj permutacija n-članog skupa je:

$$p_n = V_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Napomena 1. Permutacija u n-članom skupu je svaka varijacija n-tog razreda tog skupa, odnosno permutacija n-članog skupa je svaka bijekcija tog skupa na samog sebe.

Zadatak 3. Na koliko različitih načina možemo n osoba razmjestiti na n mjesta oko okruglog stola ?

Zadatak 4. 6 muškaraca i 5 žena trebaju stati u red tako da alterniraju, tj. poredani su na način muškarac–žena–muškarac–žena... Na koliko je to različitih načina moguće napraviti ?

Primjer 7. Koliko ima binarnih nizova duljine 7?

Varijacija r-tog razreda s ponavljanjem

Definicija 3. Neka je $A = \{a_1, \ldots a_n\}$ skup koji se sastoji od n elemenata. **Varijacija r-tog razreda s ponavljanjem** skupa od n-elemenata je svaka uređena r-torka elemenata iz skupa A. Broj takvih varijacija s ponavljenjem je n^r.

Zadatak 5. Lokot na šifru ima 4 koluta s 10 znamenki $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Lokot se može otvoriti ako je na svakom kolutu ispravna znamenka. Koliko ima različitih šifri ?

Permutacija s ponavljanjem

Definicija 4. Broj **permutacija s ponavljenjem** skupa od n elemenata među kojima je n_1 elemenata prve vrste, n_2 elemenata druge vrste, $\ldots$, n_k elemenata k-te vrste (pri čemu je $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$) je:

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Primjer 8. Koliko se različitih peteroznamenkastih prirodnih brojeva može napisati pomoću znamenki $3, 3, 5, 7, 7, 7$?

Zadatak 6. Koliko različitih "riječi" možemo dobiti permutiranjem slova u riječi BANANA ?

1.3 Kombinacije

Kombinacija r-tog razreda

Definicija 5. Neka je $A = \{a_1, \ldots a_n\}$ skup koji se sastoji od n elemenata i neka je $r \in \mathbb{N}$, $r \leq n$. **Kombinacija r-tog razreda** u skupu A je svaki r-člani podskup skupa A. Broj kombinacija r-tog razreda skupa od n elemenata je:

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}.$$

Primjer 9. Koliko ima različitih tročlanih podskupova skupa $A = \{a, b, c, d\}$ od 4 elementa ?

Zadatak 7. U razredu ima 15 dječaka i 10 djevojčica. Na koliko načina možemo odabrati:

a) 3 dječaka,

b) 3 dječaka i 2 djevojčice,

c) jednak broj dječaka i djevojčica,

d) petero ljudi, od kojih su barem 3 djevojčice,

e) četvero ljudi, od kojih su najviše 2 dječaka?

Kombinacija r-tog razreda s ponavljanjem

Definicija 6. Neka je $A = \{a_1, \ldots a_n\}$ skup koji se sastoji od n elemenata i neka je $r \in \mathbb{N}$. **Kombinacija r-tog razreda s ponavljanjem** u skupu A je svaki r-člani multiskup skupa A (elementi se smiju ponavljati). Ukupan broj takvih kombinacija je:

$$\overline{C}_n^r = \binom{n+r-1}{r}.$$

Primjer 10. Ako je $A = \{a, b, c\}$, odredite sve kombinacije drugog razreda s ponavljanjem u skupu A.

Zadatak 8. Na koliko se načina $r = 7$ jednakih predmeta može raspodijeliti među $n = 3$ ljudi ?