PRVI KOLOKVIJ IZ VJEROJATNOSTI I STATISTIKE - A grupa

TEORIJA

Zadatak 1. [20 bodova]
Definirajte vjerojatnost kao funkciju na σ-algebri nad prostorom elementarnih događaja. Iskažite svojstvo neprekidnosti vjerojatnosti u odnosu na monotono rastuću familiju događaja.
Rješenje: Pogledati materijale s predavanja.

ZADACI

Zadatak 2. [20 bodova]
U kutiji imamo 5 kuglica označenih slovima A, B, C, D i E. Na slučajan način izvlačimo 3 kuglice. Modelirajte prostor elementarnih događaja ako kuglice biramo bez vraćanja i bez uređaja.
Rješenje: $\Omega = \{\{A,B,C\},\{A,B,D\},\{A,B,E\},\{A,C,D\},\{A,C,E\},\{A,D,E\},\{B,C,D\},\{B,C,E\}$ $,\{B,D,E\},\{C,D,E\}\}$

Zadatak 3. [20 bodova]
Slučajno se bira točka unutar jednakostraničnog trokutu duljine stranice a. Kolika je vjerojatnost da odabrana točka bude unutar trokutu upisane kružnice?
Rješenje: Za prostor elementarnih događaja Ω uzimamo sve točke unutar jedankostraničnog trokuta duljine stranice a iz čega slijedi da je

$$\lambda(\Omega) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Povoljno područje za izbor točaka koje čine događaj A (vidi Sliku) predstavljeno je upisanim krugom polumjera ρ koji računamo prema relaciji

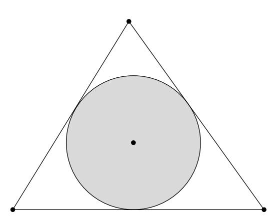
$$\rho = \frac{1}{3}h,$$

gdje je h visina jedankostraničnog trokuta, iz čega slijedi

$$\rho = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

. Kako je $\lambda(A) = \rho^2\pi$, slijedi

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} \approx 0.6046.$$



Slika 1: Trokutu upisan krug

Zadatak 4. [20 bodova]

Na raspolaganju imamo 3 šešira s kuglicama. U prvom šeširu nalaze se 2 crne, 5 plavih, 1 crvena i 3 zelene kuglice. U drugom šeširu nalaze se 6 crnih, 2 plave i 5 crvenih kuglica. U trećem šeširu nalazi se 6 plavih, 6 crvenih i 8 zelenih kuglica. Na slučajan način odabiremo jedan šešir i iz njega na slučajan način odjednom izvlačimo tri kuglice. Kolika je vjerojatnost da smo izvukli jednu crnu i dvije zelene kuglice? Ako smo izvukli jednu crnu i dvije zelene kuglice, kolika je vjerojatnost da smo odabrali prvi šešir?

Rješenje: Zadatak rješavamo pomoću formule potpune vjerojatnosti i Bayesove formule. Neka je $A = \{\text{Izvučene su jedna crna i dvije zelene kuglice}\}$. Uzmimo u obzir sljedeći potpuni sustav događaja:

$H_1 = \{\text{Odabran je 1. šešir}\}$

$H_2 = \{\text{Odabran je 2. šešir}\}$

$H_3 = \{\text{Odabran je 3. šešir}\}$

Očigledno je $P(H_i) = 1/3$ za $i = 1, 2, 3$. Tada su pripadne uvjetne vjerojatnosti

$$P(A|H_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{11}{3}} = \frac{2}{55} \approx 0.0364$$

$$P(A|H_2) = \frac{\binom{6}{1} \cdot 0}{\binom{13}{3}} = 0$$

$$P(A|H_3) = \frac{0 \cdot \binom{8}{2}}{\binom{20}{3}} = 0$$

Iz formule potpune vjerojatnosti slijedi

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A|H_i) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{55} + 0 + 0\right) = \frac{2}{165} \approx 0.0121.$$

Koristeći Bayesovu formulu dobivamo

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = 1.$$

Zadatak 5. [20 bodova]

Promotrimo slučajan pokus koji se sastoji od bacanja igraće kockice dva puta za redom. Neka je X slučajna varijabla čija je vrijednost broj realizacija šestica. Nađite distribuciju diskretne slučajne varijable X te grafički prikažite funkciju gustoće vjerojatnosti.

Rješenje: Prostor elementarni događaja modeliramo kao $\Omega = \{(i,j) : i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$, $k(\Omega) = 6^2 = 36$. Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ diskretna slučajna varijabla dana kao

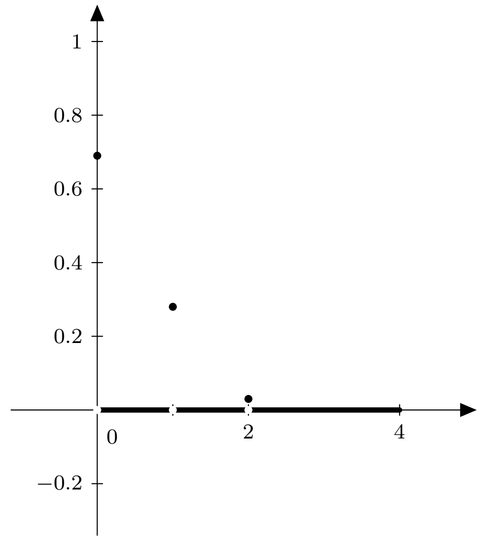
$$X(\omega) = \text{broj šestica koje su se realizirale u } \omega.$$

Tada je $\mathcal{R}(X) = \{0, 1, 2\}$.

$$P(X = 2) = P(\{(6,6)\}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Iz nezavisnosti prvog i drugog bacanja igraće kockice slijedi da je

$$P(X = 1) = P(\{(i,j) : i \in \{1,2,3,4,5\}, j = 6\} \cup \{(i,j) : i = 6, j \in \{1,2,3,4,5\}\}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{36}$$



Slika 2: Funkcija gustoće diskretne slučajne varijable X

$$P(X=0) = P\left(\{(i,j) : i,j \in \{1,2,3,4,5\}\}\right) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

Tablica distribucije slučajne varijable X dana je s

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{25}{36} & \frac{10}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

PRVI KOLOKVIJ IZ VJEROJATNOSTI I STATISTIKE - B grupa

TEORIJA

Zadatak 1. [20 bodova]
Definirajte uvjetnu vjerojatnost na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ u odnosu na događaj $A \in \mathcal{F}$ takav da je $P(A) > 0$. Iskažite teorem o formuli potpune vjerojatnosti.
Rješenje: Pogledati materijale s predavanja.

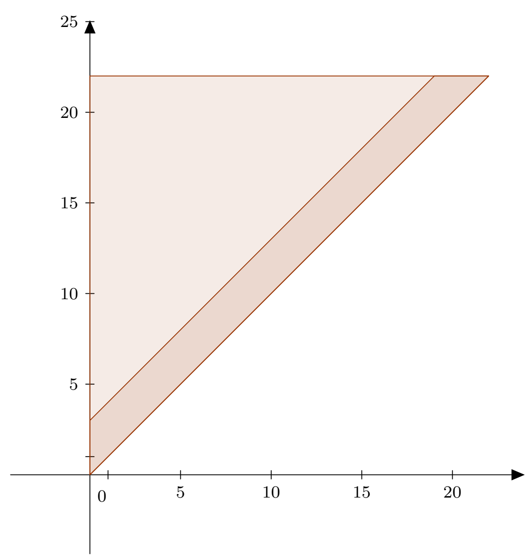
ZADACI

Zadatak 2. [20 bodova]

U kutiji imamo 4 kockice označene brojevima 1, 2, 3, i 4. Na slučajan način izvlačimo 2 kockice. Modelirajte prostor elementarnih događaja ako kuglice biramo bez vraćanja i s uređajem.
Rješenje: $\Omega = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4),(2,1),(3,1),(4,1),(3,2),(4,2),(4,3)\}$

Zadatak 3. [20 bodova]
Vlak ulazi u željeznički kolodvor u slučajnom trenutnu x, a iz njega izlazi u slučajnom trenutku y. Ako vlakovi u tom kolodvoru prometuju od 1 do 23 sata svakog dana, odredite vjerojatnost da se vlak zadrži u kolodvoru kraće od 3 sata.
Rješenje: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je promatran vremenski segment $[0, 22]$ umjesto $[1, 23]$. Budući je x vrijeme ulaza vlaka u kolodvor, a y vrijeme izlaska vlaka iz kolodvora, prostor elementarnih događaja (vidi Sliku 3) je

$$\Omega = \{(x, y) \in [0, 22] \times [0, 22] : y \geq x\}.$$



Slika 3: Prostor elementarnih događaja Ω i događaj A

Vlak će se zadžati manje od 3 sata u kolodvoru ukoliko je

$$A = \{(x, y) \in \Omega : y - x \leq 3\},$$

što je označeni dio prostora elementarnih događaja (vidi Sliku 3). Tada je tražena vjerojatnost

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{\frac{22^2}{2} - \frac{19^2}{2}}{\frac{22^2}{2}} = \frac{\frac{123}{2}}{242} = \frac{123}{484} \approx 0.2541$$

NAPOMENA: Zadatak se mogao riješiti i s prostorom elementarnih događaja $\Omega = [0, 22] \times [0, 22]$, ali tada bi odgovarajući događaj bio $A = \{(x, y) \in \Omega : |y - x| \leq 3\}$.

Zadatak 4. [20 bodova]

Na raspolaganju imamo 3 šešira s kuglicama. U prvom šeširu nalaze se 5 crne, 2 plavih, 6 crvena i 4 zelene kuglice. U drugom šeširu nalaze se 3 crne, 4 plave i 5 zelenih kuglica. U trećem šeširu nalazi se 6 crvenih, 6 plavih i 3 zelene kuglica. Na slučajan način odabiremo jedan šešir i iz njega na slučajan način odjednom izvlačimo tri kuglice. Kolika je vjerojatnost da smo izvukli jednu plavu i dvije crevene kuglice? Ako smo izvukli jednu plavu i dvije crvene kuglice, kolika je vjerojatnost da smo odabrali treći šešir?

Rješenje: Zadatak rješavamo pomoću formule potpune vjerojatnosti i Bayesove formule. Neka je $A = \{\text{Izvučene su jedna crna i dvije zelene kuglice}\}$. Uzmimo u obzir sljedeći potpuni sustav događaja:

$$H_1 = \{\text{Odabran je 1. šešir}\}$$

$$H_2 = \{\text{Odabran je 2. šešir}\}$$

$$H_3 = \{\text{Odabran je 3. šešir}\}$$

Očigledno je $P(H_i) = 1/3$ za $i = 1, 2, 3$. Tada su pripadne uvjetne vjerojatnosti

$$P(A|H_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{6}{2}}{\binom{17}{3}} = \frac{3}{68} \approx 0.0441$$

$$P(A|H_2) = \frac{\binom{4}{1} \cdot 0}{\binom{12}{3}} = 0$$

$$P(A|H_3) = \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{18}{91} \approx 0.1978$$

Iz formule potpune vjerojatnosti slijedi

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A|H_i) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{68} + 0 + \frac{18}{91}\right) = \frac{499}{6188} \approx 0.0806$$

Koristeći Bayesovu formulu dobivamo

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3)P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{408}{499} \approx 0.8176.$$

Zadatak 5. [20 bodova]

Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danu izrazom

$$f(x) = \begin{cases} k(1 - x^2), & -1 \leq x < 1 \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

odredite vrijednost nepoznate konstante k tako da funkcija f bude funkcija gustoće neke neprekidne slučajne varijable.

Rješenje: Iz svojstva nenegativnosti funkcije gustoće možemo zaključiti da je $k \geq 0$. Svojstvo normiranosti daje

$$k \int_{-1}^{1} (1-x^2)\mathrm{dx} = 1.$$

Kako je

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)\mathrm{dx} = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3},$$

dobivamo da je $k = 3/4$.

Slobodan Jelić