Vjerojatnost i statistika

Građevinski fakultet, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, ak. god. 2015./2016.

3. vježbe: Osnove algebre skupova. Klasična definicija vjerojatnosti.

26. listopada 2015.

1 Osnove algebre skupova

1.1 Osnovni pojmovi

Definicija 1.

1. Skup A je podskup skupa B ($A \subseteq B$) ako je svaki element skupa A ujedno element i skupa B.
2. Skup A jednak je skupu B ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.
3. Unija skupova A i B je skup $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ ili } \omega \in B\}$.
4. Presjek skupova A i B je skup $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ i } \omega \in B\}$.
5. Razlika skupova A i B je skup $A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ i } \omega \notin B\}$.
6. Simetrična razlika skupova A i B je skup $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
7. Komplement skupa (događaja) $A \subseteq \Omega$ je skup $A^C = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$ kojeg nazivamo **suprotan događaj** događaja A.
8. Komplement prostora elementarnih događaja je prazan skup, tj. $\Omega^C = \emptyset$. Cijeli prostor elementarnih događaja Ω nazivamo **siguran događaj**, a njegov komplement **nemoguć događaj**.
9. Konačna unija skupova (događaja) $A_1, A_2, \ldots A_n \subseteq \Omega$ je skup:

$$\begin{aligned}
A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n &= \bigcup_{i=1}^{n} A_i \\
&= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_1 \text{ ili } \omega \in A_2 \text{ ili } \ldots \text{ ili } \omega \in A_n\} \\
&= \{\omega \in \Omega : \text{postoji}\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\, \text{takav da}\ \omega \in A_i\}.
\end{aligned}$$

10. Konačan presjek skupova (događaja) $A_1, A_2, \ldots A_n \subseteq \Omega$ je skup:

$$\begin{aligned} A_1 \cap \ldots \cap A_n &= \bigcap_{i=1}^{n} A_i \\ &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_1 \text{ i } \omega \in A_2 \text{ i } \ldots \text{ i } \omega \in A_n\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_i, \text{ za svaki } i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}. \end{aligned}$$

1.2 Osnovna svojstva skupovnih operacija

1.	$A \cup B = B \cup A$	Komutativnost
2.	$A \cap B = B \cap A$	
3.	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	Asocijativnost
4.	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	
5.	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivnost
6.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
7.	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$	De Morganovi zakoni
8.	$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$	

Zadatak 1. Neka je Ω prostor elementarnih događaja pridružen nekom slučajnom pokusu, te neka su A, B i C događaji ($A, B, C \subseteq \Omega$). Pomoću događaja A, B i C izrazite sljedeće događaje:

a) realizirao se samo događaj A,

b) realizirali su se događaji A i B,

c) realizirala su se sva tri događaja,

d) realizirao se *barem* jedan od događaja A, B i C,

e) realizirao se *točno* jedan od događaja A, B i C,

f) realizirali su se *barem* dva od događaja A, B i C,

g) realizirali su se *točno* dva od događaja A, B i C,

h) realizirali su se *najviše* dva od događaja A, B i C,

i) nije se realizirao *niti jedan* od događaja A, B i C.

Zadatak 2. Među studentima prisutnim na nekom predavanju slučajno se bira jedan student. Pomoću događaja:

- A = student je muškog spola,
- B = student je vegetarijanac,
- C = student živi u studentskom domu.

izrazite sljedeće događaje:

a) student je muškog spola, vegetarijanac je i živi u studentskom domu,

b) Kada će vrijediti $A \cap B \cap C = A$?

c) Kada će vrijediti $C^C \subseteq B$?

d) Kada će vrijediti $A^C = B$?

2 Klasična definicija vjerojatnosti

Teorem 1. Neka su $A, B, C \subseteq \Omega$ konačni skupovi. Tada vrijedi:

1. $k(A^C) = k(\Omega) - k(A)$,
2. $k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B)$,
3. ako je $A \subseteq B$ onda je $k(B \setminus A) = k(B) - k(A)$,
4. za proizvoljne A i B vrijedi $k(B \setminus A) = k(B) - k(A \cap B)$,
5. $k(A \cup B \cup C) = k(A) + k(B) + k(C) - k(A \cap B) - k(A \cap C) - k(B \cap C) + k(A \cap B \cap C)$.

Definicija 2. Ako su svi ishodi u konačnom skupu elementarnih događaja

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

jednako mogući, vjerojatnost realizacije događaja $A \subseteq \Omega$ jednaka je kvocijentu broja elemenata skupa A i broja elemenata skupa Ω:

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)}.$$

Zadatak 3. Na raspolaganju nam je kutija u kojoj se nalazi 100 papirića numeriranih brojevima $1, 2, \dots, 100$. Slučajan pokus sastoji se od izvlačenja jednog papirića iz kutije. Upotrebom **klasične definicije vjerojatnosti** odredite vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) A = izvučeni broj je jednoznamenkast,

b) B = izvučeni broj je dvoznamenkast,

c) C = izvučeni broj je manji ili jednak broju m, $m \in \{1, 2, \dots, 100\}$,

d) D = izvučeni broj je strogo veći od m, $m \in \{1, 2, \dots, 100\}$,

e) E = suma znamenaka izvučenog broja je 3,

f) F = umnožak znamenaka izvučenog broja je 6.

Zadatak 4. Simetrična igraća kockica baca se dva puta. Upotrebom **klasične definicije vjerojatnosti** odredite vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) A = pali su jednaki brojevi,

b) B = suma brojeva koji su pali je 8,

c) C = produkt brojeva koji su pali je 8,

d) D = suma brojeva koji su pali veća je od produkta brojeva koji su pali,

e) E = produkt brojeva koji su pali veći je od sume brojeva koji su pali.

Napomena 1. Sljedeće zadatke rješavamo koristeći principe iz kombinatorike i klasičnu definicuju vjerojatnosti.

Zadatak 5. Pretpostavimo da u pošiljci od ukupno 500 jabuka ima 2% prezrelih jabuka. Kolika je vjerojatnost da slučajan uzorak od 20 jabuka uzet iz te pošiljke sadrži točno dvije prezrele jabuke?

Zadatak 6. U kutiji se nalazi a crvenih i b zelenih kuglica. Iz kutije na slučajan način istovremeno izvlačimo dvije kuglice. Definirajmo sljedeće događaje:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{izvučene kuglice su iste boje}\}, \\ B &= \{\text{izvučene kuglice su različitih boja}\}. \end{aligned}$$

Koji je od događaja A i B vjerojatniji?

Zadatak 7. U kutiji se nalazi 20 bijelih i 15 plavih kuglica. Iz kutije na slučajan način istovremeno izvlačimo pet kuglica. Definirajmo sljedeće događaje:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{izvučene kuglice su iste boje}\}, \\ B &= \{\text{izvučene su 3 bijele i 2 plave kuglice}\}. \end{aligned}$$

Odredite vjerojatnost događaja A i B.

Zadatak 8. Simetričan novčić bacamo 10 puta za redom. Kolika je vjerojatnost da se pismo realizira točno tri puta?