1 Uvjetna vjerojatnost i nezavisnost događaja

Definicija 1. [Uvjetna vjerojatnost] Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ vjerojatnosni prostor i neka su A i B proizvoljni događaji (podskupovi od Ω) takvi da je $P(B) > 0$. Uvjetna vjerojatnost događaja A uz uvjet da se dogodio događaj B je broj iz segmenta $[0,1]$ kojeg označavamo sa $P(A|B)$, a definira se na sljedeći način

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Definicija 2. [Nezavisnost događaja] Događaji A i B su nezavisni ako vrijedi:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Zadatak 1. Slučajan pokus sastoji se od bacanja simetričnog novčića tri puta za redom. Želimo naći vjerojatnost događaja A **uz dani događaj** B kada su A i B sljedeći događaji:

- $A = \{$glava je pala više puta nego pismo$\}$,
- $B = \{$prvo je palo pismo$\}$.

Jesu li događaji A i B nezavisni?

Zadatak 2. - za. vj. Promotrimo slučajan pokus koji se sastoji od bacanja simetrične igraće kockice. Odredimo:

a) vjerojatnost da je ishod bacanja kockice neparan broj,

b) vjerojatnost da je ishod bacanja kockice prost broj,

c) vjerojatnost da je ishod bacanja kockice neparan broj **ako je poznato** da je ishod prost broj.

Zadatak 3. U kutiji se nalazi 10 kuglica: 7 bijelih i 3 crne. Na slučajan način izvlačimo 2 kuglice, jednu po jednu, bez vraćanja. Odredite vjerojatnost:

a) da je druga izvučena kuglica crna (događaj A),

b) da je druga izvučena kuglica crna, **ako je** prva izvučena kuglica bila bijela (događaj B).

Jesu li događaji A i B nezavisni?

Zadatak 4. - za. vj. Dva se broja na slučajan način odjednom izabiru između brojeva $1, 2, \ldots, 10$. **Ako je poznato** da je njihov zbroj paran broj, odredite vjerojatnost da su oba neparna.

Zadatak 5. Neka su x, y dva slučajno odabrana broja iz segmenta $[0, 1]$. Odredite vjerojatnost da za njih vrijedi $y \leq x^2$ **ako je poznato** da je $x + y < 1$.

2 Formula potpune vjerojatnosti

Definicija 3. Događaji $H_1, H_2, \ldots, H_n$ u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ čine potpunu familiju ili potpun sistem događaja ako vrijedi:

- $H_i \neq \emptyset, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$
- $H_i \cap H_j = \emptyset, \ i \neq j$
- $\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega.$

Napomena 1. Elemente potpunog sistema događaja $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ zvat ćemo HIPOTEZAMA. Vrlo je važno imati na umu da se hipoteze međusobno isključuju i da se u svakom izvođenju slučajnog pokusa točno jedna od njih mora dogoditi.

Teorem 1. FORMULA POTPUNE VJEROJATNOSTI: Neka je $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ potpun sistem događaja u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Tada za proizvoljan događaj $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ vrijedi:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i).$$

Zadatak 6. Cilj se gađa iz tri topa. Topovi pogađaju cilj nezavisno jedan od drugoga s vjerojatnošću 0.4. Ako jedan top pogodi cilj uništava ga s vjerojatnošću 0.3, ako ga pogode dva topa uništavaju ga s vjerojatnošću 0.7, a ako ga pogode tri topa uništavaju ga s vjerojatnošću 0.9. Izračunajte vjerojatnost uništenja cilja.

Zadatak 7. Na raspolaganju imamo 3 šešira s kuglicama. U prvom šeširu nalaze se 5 crne, 2 plavih, 6 crvena i 4 zelene kuglice. U drugom šeširu nalaze se 3 crne, 4 plave i 5 zelenih kuglica. U trećem šeširu nalazi se 6 crvenih, 6 plavih i 3 zelene kuglica. Na slučajan način odabiremo jedan šešir i iz njega na slučajan način odjednom izvlačimo tri kuglice. Kolika je vjerojatnost da smo izvukli jednu plavu i dvije crevene kuglice?

3 Bayesova formula

- Pretpostavimo da nam je zadan potpun sustav događaja $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ te da su nam poznate vjerojatnosti svih hipoteza H_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Nadalje pretpostavimo da je pokus izveden i da se realizirao događaj A.
- Uvjetne vjerojatnosti događaja A uz svaku od hipoteza H_i, dakle vjerojatnosti $P(A|H_i)$, također su nam bile poznate prije izvođenja pokusa.
- Sada je prirodno postaviti pitanje o iznosu vjerojatnosti hipoteza H_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, nakon izvođenja pokusa, tj. uz poznatu činjenicu da se realizirao događaj A. Dakle, zanimaju nas uvjetne vjerojatnosti $P(H_i|A)$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Teorem 2. BAYESOVA[1] FORMULA: Neka je $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ potpun sustav događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ i neka je $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ takav da je $P(A) > 0$. Tada $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vrijedi:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P(A|H_j)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)}.$$

Zadatak 8. Ptica slijeće u slučajno izabrano gnijezdo od ukupno tri gnijezda koja su joj na raspolaganju. Svako gnijezdo sadrži dva jaja i to: u prvom gnijezdu su oba jaja zdrava, u drugom je jedno zdravo i jedno pokvareno , a u trećem su oba jaja pokvarena. Nađite vjerojatnost da ptica sjedi na pokvarenom jajetu. Ako je sjela na pokvareno jaje, kolika je vjerojatnost da sjedi u drugom gnijezdu?

[1] Thomas Bayes (1702. - 1761.), britanski matematičar.

Zadatak 9. - za vj. Na raspolaganju imamo 3 šešira s kuglicama. U prvom šeširu nalaze se 5 crne, 2 plavih, 6 crvena i 4 zelene kuglice. U drugom šeširu nalaze se 3 crne, 4 plave i 5 zelenih kuglica. U trećem šeširu nalazi se 6 crvenih, 6 plavih i 3 zelene kuglica. Na slučajan način odabiremo jedan šešir i iz njega na slučajan način odjednom izvlačimo tri kuglice. Kolika je vjerojatnost da smo izvukli jednu plavu i dvije crevene kuglice? **Ako smo izvukli jednu plavu i dvije crvene kuglice, kolika je vjerojatnost da smo odabrali treći šešir?**