1 Slučajne varijable

1.1 Diskretne slučajne varijable

Definicija 1. Neka je dan diskretan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Svaku funkciju $X : \Omega \to \mathbb{R}$ zvat ćemo **diskretna slučajna varijabla**.

Napomena 1. Original $X^{-1}(A)$ skupa $A \subseteq \mathbb{R}$ koji je jednak skupu $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$ kraće ćemo označavati s

$$\{X \in A\},$$

a pripadnu vjerojatnost tog skupa $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$ s $P\{X \in A\}$. Tako, za npr. dani $x \in \mathbb{R}$ koristimo oznaku:

$$\{X = x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}.$$

Napomena 2. Diskretne slučajne varijable zadajemo tako da zadamo pripadni skup vrijednosti $\mathcal{R}(X) = \{x_1, x_2, ...\}$ (slika funkcije X) i pridružene vjerojatnosti $p_n = P\{X = x_n\}$, što zapisujemo u obliku tablice:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}.$$

Ovu tablicu nazivamo TABLICA DISTRIBUCIJE (DISTRIBUCIJA) ili ZAKON RAZDIOBE slučajne varijable X. Distribucija ima sljedeća svojstva:

1. $x_i \neq x_j$ čim je $i \neq j$;
2. $p_i \geq 0$, $\forall i$;
3. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Napomena 3. Vjerojatnost skupa $\{X \in A\}$:

$$P\{X \in A\} = \sum_{x_i \in A} p_i.$$

Zadatak 1. Provjerite jesu li sljedećim tablicama zadane distribucije neke diskretne slučajne varijable:

$$a)\ X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix},$$
$$b)\ X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2.5 & 10\sqrt{2} \\ 0.1 & 0.5 & 0 & 0.4 \end{pmatrix},$$
$$c)\ X = \begin{pmatrix} -5\pi & -4 & 3 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & 0.1 & -0.6 & 0.3 & 0.4 & 0.8 \end{pmatrix},$$
$$d)\ X = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 & 20 \\ p & 2p & 3p & \frac{p}{2} \end{pmatrix}.$$

Zadatak 2. Promotrimo slučajan pokus koji se sastoji od bacanja simetričnog novčića dva puta za redom. Neka je X slučajna varijabla čija je vrijednost broj realiziranih pisama. Nađite distribuciju diskretne slučajne varijable X, te ju prikažite grafički.

Zadatak 3. Strijelac na raspolaganju ima tri metka i gađa metu dok je ne pogodi ili dok ne potroši sva tri metka. Neka je X slučajna varijabla čija je vrijednost broj potrošenih metaka. Uz pretpostavku o nezavisnosti gađanja nađite distrubuciju od X ako je vjerojatnost pogotka mete pri svakom gađanju jednaka 0.8. Odredite vjerojatnost da strijelac potroši barem 2 metka.

1.2 Neprekidne slučajne varijable

Definicija 2. Neka je dan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi:

- $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$,
- Postoji nenegativna realna funkcija realne varijable, $f(t)$, takva da vrijedi:

$$P\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\}\right) = P\{X \le x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Funkciju X zovemo APSOLUTNO NEPREKIDNA slučajna varijabla na Ω ili samo NEPREKIDNA slučajna varijabla. Funkciju f zovemo FUNKCIJA GUSTOĆE VJEROJATNOSTI slučajne varijable X ili samo FUNKCIJA GUSTOĆE slučajne varijable X.

Napomena 4. Funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable ima dva bitna svojstva:

1. Nenegativnost: $f(x) \ge 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$,
2. Normiranost: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Zadatak 4. Za zadane funkcije $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odredite vrijednost nepoznate konstante k tako da svaka od njih bude funkcija gustoće neke neprekidne slučajne varijable:

a) $f(x) = \begin{cases} kx & , \ 0 \le x < 1 \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} k\cos 2x & , \ x \in [-\pi/4, \pi/4\rangle \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases}$

Zadatak 5. Vijek trajanja žarulje je slučajan broj (u satima) u intervalu $[1000, 32\,000\rangle$. Funkcija gustoće slučajne varijable X čija je vrijednost vijek trajanja žarulje je

$$f(x) = \begin{cases} kx^{-3} & , \quad 1000 \leq x < 32\,000 \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

Odredite vrijednost nepoznate konstante k te vjerojatnost da je vijek trajanja žarulje dulji od $2\,000$ sati.