

Vjerojatnost i statistika

Građevinski fakultet, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku,
ak. god. 2014./2015.

**7. vježbe: Funkcija distribucije diskretne slučajne
varijable. Funkcija distribucije neprekidne slučajne
varijable. Funkcije diskretnih slučajnih varijabli.**

23. studenoga 2015.

1 Funkcija distribucija diskretne slučajne varijable

Definicija 1. Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ vjerojatnosni prostor i neka je $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diskretna slučajna varijabla zadana sljedećom tablicom distribucije:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}.$$

Funkciju $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ koja realnom broju x pridružuje vjerojatnost da realizacija dane slučajne varijable bude manja ili jednaka tom broju, tj.

$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i),$$

nazivamo FUNKCIJOM DISTRIBUCIJE DISKRETNE SLUČAJNE VARIJABLE X .

Napomena 1. Uočimo da je funkcija distribucije diskretne slučajne varijable stepenasta funkcija, tj. funkcija sa skokovima vrijednosti u točkama x_i , dok na intervalu $[x_i, x_{i+1})$ prima stalno istu vrijednost koja je jednaka $F(x_i)$.

Zadatak 1. Pretpostavimo da provodimo slučajan pokus koji se sastoji od istovremenog bacanja dviju simetričnih kovanica: jedne kovanice od 2 kn i jedne kovanice od 5 kn. Slučajna varijabla $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definirana je kao funkcija koja svakom ishodu slučajnog pokusa pridružuje sumu vrijednosti kovanica na kojima se nakon bacanja realiziralo pismo. Odredite zakon distribucije ove slučajne varijable te njenu funkciju distribucije. Odredite vjerojatnosti $P(X \leq 6)$, $P(X \leq 10)$, $P(X > 1)$ i $P(X \geq 1.5)$.

Zadatak 2. Iz kutije u kojoj se nalazi 7 kuglica numeriranih brojevima od 1 do 7 izvlače se istovremeno tri kuglice (koje su numerirane brojevima i, j i k , $i, j, k \in \{1, \dots, 7\}$). Odredite tablicu distribucije i funkciju distribucije slučajne varijable X definirane na sljedeći način:

$$X(\{i, j, k\}) = \max\{i, j, k\}, \quad i, j, k \in \{1, \dots, 7\}.$$

2 Funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable

Definicija 2. Neka je $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f . Funkciju distribucije $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ slučajne varijable X definiramo na sljedeći način:

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Napomena 2. Sljedeću formulu, koja se temelji na razlici vrijednosti funkcije distribucije neprekidne slučajne varijable u rubnim točkama intervala, koristimo za izračunavanje vjerojatnosti pripadnosti realizacije slučajne varijable X nekom intervalu $I \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P\{a < X \leq b\} &= P\{X \in \langle a, b \rangle\} = P\{X \in \langle -\infty, b \rangle \setminus \langle -\infty, a \rangle\} \\ &= P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\} = F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Zadatak 3. Zadana je funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{3} & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

Izračunajte funkciju distribucije slučajne varijable X , te skicirajte grafove funkcije gustoće i funkcije distribucije.

Zadatak 4. Neka je X neprekidna slučajna varijabla zadana funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

- a) odredite funkciju distribucije slučajne varijable X i skicirajte njezin graf,
- b) izračunajte $P\{0.25 < X \leq 2\}$.

Zadatak 5. - za. vj. Neka je X neprekidna slučajna varijabla zadana funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \cos 2x & , \quad x \in [-\pi/4, \pi/4) \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

- a) odredite funkciju distribucije slučajne varijable X i skicirajte njezin graf,
- b) izračunajte $P\{0 < X \leq \pi/8\}$.