Vjerojatnost i statistika

Građevinski fakultet, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku,
ak. god. 2015./2016.

8. vježbe: Numeričke karakteristike diskretne slučajne varijable. Čebiševljeva nejednakost. Važne parametarske familije diskretnih slučajnih varijabli.

30. studenoga 2015.

1 Numeričke karakteristike diskretne slučajne varijable

Definicija 1. Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ diskretan vjerojatnosni prostor i

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

diskretna slučajna varijabla na njemu. Tada je **matematičko očekivanje** (očekivanje) diskretne slučajne varijable X jednako

$$EX = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i p_i,$$

ako je red $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} |x_i| p_i$ konvergentan, tj. konačan.

Definicija 2. Neka je X diskretna slučajna varijabla na diskretnom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ i $r > 0$. Definiramo sljedeće momente slučajne varijable X:

1. **r-ti moment**:
$$E[X^r] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^r p_i,$$
ako $E[X^r]$ postoji,
2. **r-ti centralni moment**:
$$m_r = E\left[(X - E[X])^r\right],$$
ako $E\left[(X - E[X])^r\right]$ postoji,

3. **r-ti apsolutni moment**:

$$E[|X|^r] = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^r p_i,$$

ako $E[|X|^r]$ postoji.

Definicija 3. Drugi centralni moment zove se **varijanca** slučajne varijable X:

$$\mathrm{Var}X = E\left[(X - E[X])^2\right] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Napomena 1. Neka su X i Y slučajne varijable koje imaju matematičko očekivanje, tj. EX i EY postoje. Matematičko očekivanje ima sljedeća bitna svojstva:

1. linearnost: $E[\alpha X + \beta Y] = \alpha EX + \beta EY$,
2. $E[aX + b] = aEX + b$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$,
3. monotonost: $X \leq Y \Rightarrow EX \leq EY$,
4. $X \geq 0 \Rightarrow EX \geq 0$,
5. $X \geq 0$ i $EX = 0 \Rightarrow X = 0$.

Napomena 2. Koristeći 3. svojstvo matematičkog očekivanja, slijedi da je varijanca uvijek nenegativan broj:

$$\mathrm{Var}X \geq 0.$$

Definicija 4. Drugi korijen iz varijance zove se **standardna devijacija** slučajne varijable X, u oznaci σ:

$$\sigma_X = \sigma := \sqrt{\mathrm{Var}X}.$$

Zadatak 1. Odredite matematička očekivanja slučajnih varijabli X, X^2, X^3, Y, Y^2 i $2X + 3Y$, te varijance $Var\,X$ i $Var\,Y$ gdje su slučajne varijable X i Y zadane sljedećim tablicama distribucije:

a)

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & 1/16 \end{pmatrix}.$$

b)

$$Y = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & 1/16 \end{pmatrix}.$$

Zadatak 2. - za vj. Za zadatke 2 i 3 s vježbi 6 i zadatak 2 s vježbi 7 odredite EX i EY gdje je $Y = 3X^2 - 2$.

Zadatak 3. - za vj. Slučajna varijabla X zadana je tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & 4 & 8 \\ a & 1/8 & a-b^2 & b^2 & 1/4 & b \end{pmatrix},$$

gdje su a i b nepoznati parametri. Ako $EX = 25/8$, odredite:

(a) vrijednosti parametara a i b,

(b) varijancu i standardnu devijaciju slučajne varijable X.

2 Čebiševljeva nejednakost

Teorem 1. Neka je X slučajna vrijabla koja ima varijancu σ^2 i neka je $k > 0$. Tada vrijedi:

$$P\{|X - \mu| \geq k\sigma\} \leq \frac{1}{k^2},$$

gdje je μ očekivanje slučajne varijable X.

Napomena 3. Primjenom svojstva vjerojatnosti suprotnog događaja slijedi:

$$P\{|X - \mu| < k\sigma\} \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Zadatak 4. Neka je X slučajna varijabla kojom je modeliran broj kišnih dana u Osijeku tijekom jedne godine. Poznato je da je očekivani broj kišnih dana 128, a standardna devijacija 4. Ocijenite vjerojatnost da broj kišnih dana u Osijeku tijekom jedne godine odstupa od očekivanog broja barem pet dana.

Zadatak 5. Neka je X slučajna varijabla kojom je modelirana visina snježnog pokrivača na Zavižanu u prosincu. Poznato je da je očekivana visina snijega u prosincu na Zavižanu 75 cm, a standardna devijacija 12 cm. Kolika se visina snijega može očekivati tijekom prosinca ako Čebiševljeva ocjena vjerojatnosti nije manja od 0.9.

3 Važne parametarske familije diskretnih slučajnih varijabli

3.1 Bernoullijeva slučajna varijabla

Neka je X slučajna varijabla koja može poprimiti točno dvije vrijednosti - $\mathcal{R}(X) = \{0, 1\}$. Takva slučajna varijabla ima tablicu distribucije sljedećeg oblika:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \quad p \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Slučajnu varijablu X zadanu ovom tablicom distribucije nazivamo **Bernoullijeva slučajna varijabla**, a samu distribuciju **Bernoullijeva distribucija** s parametrom p. Parametar p zapravo je vjerojatnost da se realizira vrijednost 1 slučajne varijable X. Matematičko očekivanje i varijanca Bernoullijeve slučajne varijable:

$$\mathrm{E}[X] = p, \quad \mathrm{Var}(X) = p(1-p).$$

3.2 Binomna slučajna varijabla

Binomna slučajna varijabla vezana je uz nezavisno ponavljanje Bernoullijevog pokusa (koji ima samo dva moguća ishoda: $1 =$ uspjeh; $0 =$ neuspjeh). Svako izvođenje takvog pokusa opisano je jednom Bernoullijevom slučajnom varijablom - sva izvođenja takvog pokusa modelirana su nezavisnim Bernoullijevim slučajnim varijablama zadanima istom tablicom distribucije. Pretpostavimo da Bernoullijev pokus ponavljamo nezavisno n puta i da nas zanima kolika je vjerojatnost da se pojavi točno k uspjeha, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

jer se u n nezavisnih ponavljanja pokusa točno k puta (svaki puta sa vjerojatnošću p) pojavila realizacija koju nazivamo uspjeh i točno $(n-k)$ puta (svaki puta sa vjerojatnošću $(1-p)$) realizacija koju nazivamo neuspjeh.

Slučajna varijabla X čija je realizacija broj uspjeha u n nezavisnih ponavljanja istog Bernoullijevog pokusa ima sljedeću tablicu distribucije:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & n \\ q^n & \binom{n}{1} pq^{n-1} & \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} & \ldots & p^n \end{pmatrix}.$$

Slučajna varijabla X zadana ovom tablicom distribucije zove se **binomna slučajna varijabla**. Njezinu distribuciju nazivamo binomnom distribucijom i označavamo $X \sim B(n, p)$, gdje brojeve n (broj nezavisnih ponavljanja Bernoullijevog pokusa) i p (vjerojatnost realizacije uspjeha u jednom izvođenju Bernoullijevog pokusa) nazivamo parametrima binomne slučajne varijable. Matematičko očekivanje i varijanca binomne slučajne varijable:

$$E[X] = np, \quad \mathrm{Var}(X) = np(1-p).$$

Zadatak 6. Student rješava pismeni ispit koji se sastoji od dvadeset pitanja. Na svako pitanje ponuđena su samo dva odgovora: točno i netočno. Izračunajte vjerojatnost da slučajnim odabirom odgovora na svih dvadeset pitanja student točno riješi 80 % ispita. Kolika je vjerojatnost da na isti način točno riješi barem 80 % ispita?

Zadatak 7. Nastavnik na svakim vježbama, koje redovito pohađa 40 studenata, na slučajan način proziva 3 studenta. Odredite vjerojatnost da je student Marko kroz 7 vježbi prozvan na samo jednim vježbama (prozivanja na različitim vježbama su međusobno nezavisna).

Zadatak 8. Ako je u proizvodnji nekog proizvoda 5% loših proizvoda, odredite vjerojatnost da se u slučajnom uzorku od 200 proizvoda nađu najviše 3 loša proizvoda. Koliki je očekivani broj loših proizvoda u uzorku od 200 proizvoda ?

Zadatak 9. - za vj. Kontrolori pregledavaju karte u svakom desetom autobusu. Putnik P. se vozio autobusom bez karte sedam puta. Odredite tablicu distribucije slučajne varijable X koja broji koliko su puta kontrolori zatekli putnika P. bez karte. Odredite vjerojatnost da su kontrolori barem jedanput zatekli tog putnika bez karte. Izračunajte matematičko očekivanje slučajne varijable X.

Zadatak 10. - za vj. Iz skladišta je otpremljeno 600 boca. Vjerojatnost da se prilikom transporta razbije 1 boca iznosi 0.05. Odredite vjerojatnost da se na odredište dopremi manje od 3 razbijene boce. Koliki je očekivani broj razbijenih boca prilikom tog transporta ?