

Vjerojatnost i statistika

Građevinski fakultet, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku,
ak. god. 2015./2016.

9. vježbe: Poissonova slučajna varijabla. Numeričke karakteristike neprekidne slučajne varijable. Važne parametarske familije neprekidnih slučajnih varijabli.

7. prosinca 2015.

1 Numeričke karakteristike diskretne slučajne varijable

1.1 Poissonova slučajna varijabla

- Slučajna varijabla čija realizacija predstavlja broj "uspjeha" u nekom jediničnom intervalu (vremena, mase, volumena, ...) naziva se POISSONOVOM SLUČAJNOM VARIJABLOM.
- Slučajan pokus iz kojeg proizlazi koncept slučajne varijable ovakvog tipa mora zadovoljavati slijedeće uvjete:
 - vjerojatnost da se pojavi uspjeh ne ovisi o tome u kojem će se jediničnom intervalu dogoditi,
 - broj uspjeha u jednom vremenskom intervalu neovisan je o broju uspjeha u nekom drugom intervalu,
 - očekivani broja uspjeha je isti za sve jedinične intervale i dan je pozitivnim realnim brojem λ .

Definicija 1. Slučajna varijable X ima Poissonovu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$ ako prima vrijednosti iz skupa $\{0, 1, 2, \dots\}$ s vjerojatnostima:

$$P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}.$$

Teorem 1. Numeričke karakteristike Poissonove slučajne varijable ($X \sim \mathcal{P}(\lambda)$):

- MATEMATIČKO OČEKIVANJE: $EX = \lambda$;
- VARIJANCA: $Var X = \lambda$.

Zadatak 1. Podaci o poslovanju dostavne službe jedne poznate osječke pizzerije podupiru tvrdnju da je očekivani broj poziva koje ta služba primi tijekom jednog sata 240. Odredite vjerojatnost da tijekom jedne minute:

1. ne bude primljena niti jedna narudžba;
2. budu primljene barem dvije narudžbe.

Zadatak 2. - za vj. Podaci o radu neke telefonske centrale podupiru tvrdnju da ta centrala tijekom jednog sata primi 120 poziva. Zbog iznenadnog kvara pozivi nisu primani jednu minutu. Kolika je vjerojatnost da u tom periodu centrali nije bilo upućeno više od 4 poziva?

2 Numeričke karakteristike neprekidne slučajne varijable

Definicija 2. Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f . Ako je integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x) dx < \infty,$$

kažemo da slučajna varijabla X ima očekivanje i broj

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx,$$

zovemo OČEKIVANJE NEPREKIDNE SLUČAJNE VARIJABLE X .

Definicija 3. Za strogo pozitivan realan broj r definiramo:

- r -ti moment μ_r : $E[X^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx$, ukoliko $E[X^r]$ postoji.
- r -ti centralni moment m_r : $E[(X - E[X])^r] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^r f(x) dx$, ukoliko je spomenuti integral konačan.

Definicija 4. Varijanca (drugi centralni moment) neprekidne slučajne varijable X sa funkcijom gustoće f definirana je na sljedeći način:

$$\text{Var } X = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f(x) dx.$$

Definicija 5. Drugi korijen iz varijance zove se standardna devijacija neprekidne slučajne varijable X , u oznaci σ :

$$\sigma_X = \sigma := \sqrt{\text{Var} X}.$$

Napomena 1. Svojstva (linearnost, monotonost, ...) matematičkog očekivanja spomenuta kod očekivanja diskretnih slučajnih varijabli vrijede i kod očekivanja neprekidnih slučajnih varijabli.

Zadatak 3. Slučajna varijabla X zadana je funkcijom gustoće:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad -1 \leq x < 0 \\ 1-x & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & , \quad \text{inače.} \end{cases}$$

Odredite funkciju distribucije slučajne varijable X , te izračunajte njezino matematičko očekivanje i varijancu.