3. Neprekidna preslikavanja

Jedan od najvažnijih pojmova u matematičkoj analizi je neprekidnost preslikavanja. U metričkim i topološkim prostorima neprekidna preslikavanja imaju jednako važnu ulogu kao što to imaju linearni operatori za vektorske prostore.

Nas će najviše zanimati vektorske funkcije više realnih varijabli. To su funkcije koje su definirane na skupu $D \subseteq \mathbb{R}^n$, a primaju vrijednosti u skupu $\mathbb{R}^m$. Neka je $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, vektorska funkcija. Kako je $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$, možemo pisati

$$f(\mathbf{x}) = \big(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})\big),$$

gdje su $f_1, \ldots, f_m : D \to \mathbb{R}$ tzv. komponentne ili koordinatne funkcije.

3.1. Neprekidnost

Prvo ćemo se prisjetiti Cauchyjeve definicije neprekidnosti realne funkcije jedne realne varijable:

Definicija 3.1. *Preslikavanje $f : D \to \mathbb{R}$, gdje je $D \subseteq \mathbb{R}$, je* neprekidno *ili* kontinuirano u točki *$x_0 \in D$ ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ za svaki $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$, tj.*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in D)\ \ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Pomoću euklidske metrike d na $\mathbb{R}$ svojstvo (3.1) možemo zapisati u obliku:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in D)\ \ d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Ovaj ekvivalentan zapis nam sugerira kako proširiti pojam neprekidnosti na preslikavanja metričkih prostora. Definira se:

Definicija 3.2. *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori, $D \subseteq X$ i $f : D \to Y$ preslikavanje. Preslikavanje f je* neprekidno *ili* kontinuirano u točki *$x_0 \in D$ ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ za svaki $x \in D$ za koji je $d_X(x, x_0) < \delta$, tj.*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in D)\ \ d_X(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Teorem 3.3. *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori, $D \subseteq X$ i $f : D \to Y$ preslikavanje. Preslikavanje f je neprekidno u točki $x_0 \in D$ onda i samo onda ako za svaku otvorenu okolinu V točke $f(x_0)$ u Y postoji otvorena okolina U točke x_0 u X takva da je $f(U \cap D) \subseteq V$.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Neka je f neprekidno u točki $x_0 \in D$, a $V \subseteq Y$ otvorena okolina točke $f(x_0)$. Kako je V otvoren skup, postoji realan broj $\varepsilon > 0$ takav da je

$$K_Y(f(x_0), \varepsilon) = \{y \in Y : d_Y(y, f(x_0)) < \varepsilon\} \subseteq V.$$

Zbog neprekidnosti preslikavanja f u točki x_0 postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ za svaki $x \in D$ za koji je $d_X(x, x_0) < \delta$. Dakle,

$$f\big(K_X(x_0,\delta) \cap D\big) \subseteq K_Y(f(x_0),\varepsilon),$$

gdje je $K_X(x_0,\delta) = \{x \in X : d_X(x,x_0) < \delta\}$ otvorena kugla u X oko x_0 radijusa δ. Stavimo li $U := K_X(x_0,\delta)$, dobivamo $f(U \cap D) \subseteq V$.

$\Leftarrow$ Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je $V := K_Y(f(x_0),\varepsilon)$ otvorena okolina točke $f(x_0)$ u Y, po pretpostavci postoji otvorena okolina U točke x_0 u X takva da je $f(U \cap D) \subseteq V$. Kako je $x_0 \in U$ i U otvoren skup, postoji $\delta > 0$ takav da je $K_X(x_0,\delta) \subseteq U$. Zato je $f\big(K_X(x_0,\delta) \cap D\big) \subseteq V$, tj. $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ za svaki $x \in D$ za koji je $d_X(x,x_0) < \delta$. $\square$

Prethodni teorem nam govori da se neprekidnost može opisati samo pomoću otvorenih skupova, tj. pomoću topologije prostora X i Y. To svojstvo služi za definiciju neprekidnosti u topološkim prostorima. Preciznije:

Definicija 3.4. *Neka su $(X,\mathcal{U})$ i $(Y,\mathcal{V})$ topološki prostori, a $D \subseteq X$. Za preslikavanje $f : D \to Y$ kažemo da je* neprekidno *ili* kontinuirano u točki *$x_0 \in D$ ako za svaku otvorenu okolinu V točke $f(x_0)$ u Y postoji otvorena okolina U točke x_0 u X takva da je*

$$f(U \cap D) \subseteq V.$$

U protivnom se kaže da je preslikavanje f prekidno *ili* diskontinuirano *u točki $x_0 \in D$.*

Preslikavanje $f : D \to Y$ je neprekidno na skupu *$A \subseteq D$ ako je f neprekidno u svakoj točki skupa A. Preslikavanje f je* neprekidno *ukoliko je neprekidno na D.*

Primjedba 3.5. *Ako je $f : D \to Y$ neprekidno preslikavanje i $A \subseteq D$, onda je očito neprekidna i restrikcija $f_{|A} : A \to Y$.*

Primjer 3.6. *Navedimo nekoliko jednostavnih primjera neprekidnih preslikavanja:*

(i) Neka je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor. Identiteta *$1_X : X \to X$ definirana formulom $1_X(x) = x$, $x \in X$, je neprekidna na X. Zaista, neka je $x_0 \in X$ i V bilo koja otvorena okolina od $1_X(x_0)$. Prema Definiciji 3.4. treba pronaći otvorenu okolinu U točke $1_X(x_0)$ takvu da je $1_X(U) \subseteq V$. Kako je $1_X(x_0) = x_0$, dovoljno je staviti $U := V$.*

(ii) Neka je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor i $D \subset X$. Funkciju $i : D \to X$ definiranu s $i(x) = x$, $x \in D$, zovemo inkluzija. *Inkluzija je neprekidno preslikavanje.*

(iii) Neka su $(X,\mathcal{U})$ i $(Y,\mathcal{V})$ topološki prostori i $y_0 \in Y$. Konstantno preslikavanje *$c : X \to Y$ definirano formulom $c(x) = y_0$, $x \in X$, je neprekidno na X. Naime, ako je $x_0 \in X$ i V bilo koja otvorena okolina točke $c(x_0) = y_0$ u Y, tada za svaku otvorenu okolinu U oko x_0 u X vrijedi $f(U) = \{y_0\} \subseteq V$.*

(iv) Koordinatne projekcije $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *$i = 1, \dots, n$, definirane formulama*

$$p_i(x_1, \dots, x_n) = x_i, \qquad i = 1, \dots, n$$

su neprekidna preslikavanja.

Neka je $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ *i* $\varepsilon > 0$. *Treba pokazati da postoji* $\delta > 0$ *takav da je* $d(p_i(\mathbf{x}), p_i(\mathbf{x}^0)) < \varepsilon$ *za svaki* $\mathbf{x} \in K(\mathbf{x}^0, \delta)$. *Kako je*

$$d(p_i(\mathbf{x}), p_i(\mathbf{x}^0)) = |x_i - x_i^0| \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0),$$

za $\delta > 0$ *možemo uzeti bilo koji realan broj manji od* ε.

(v) Neka je $(X, +, \cdot)$ *realan vektorski prostor. Pokažimo da je norma* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ *neprekidno preslikavanje.*

Neka je $x_0 \in X$. *Treba pokazati da za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da je* $\big| \|x\| - \|x_0\| \big| < \varepsilon$ *za svaki* $x \in X$ *takav da je* $\|x - x_0\| < \delta$.

Prvo ćemo pokazati da za svaki $x \in X$ *vrijedi nejednakost*

$$\Big| \|x\| - \|x_0\| \Big| \leq \|x - x_0\|. \tag{3.3}$$

Zaista, pomoću nejednakosti trokuta dobivamo

$$\|x\| = \|(x - x_0) + x_0\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0\|,$$

odakle je $\|x\| - \|x_0\| \leq \|x - x_0\|$. *Slično se pokaže da je* $\|x_0\| - \|x\| \leq \|x - x_0\|$. *Time je dokazana nejednakost (3.3).*

Zbog (3.3) za traženi $\delta > 0$ *možemo uzeti bilo koji realan broj manji od* ε.

Primjer 3.7. *Neka je* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definirana formulom:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , \text{ ako je } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ ako je } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Pokažimo da postoji $\varepsilon > 0$ *sa svojstvom da za svaki* $\delta > 0$ *postoji točka* $(x_\delta, y_\delta) \in K\big((0, 0), \delta\big)$ *takva da je* $d\big(f(x_\delta, y_\delta), f(0, 0)\big) \geq \varepsilon$. *To će značiti da* f *nije neprekidna u točki* $(0, 0)$.

Zaista, neka je $\varepsilon = \frac{1}{3}$. *Za svaki* $\delta > 0$ *stavimo* $(x_\delta, y_\delta) := (\delta/2, \delta/2)$. *Tada je* $d\big((x_\delta, y_\delta), (0, 0)\big) = \delta/\sqrt{2} < \delta$ *i* $d\big(f(x_\delta, y_\delta), f(0, 0)\big) = |f(\delta/2, \delta/2) - 0| = 1/2 > 1/3$.

Restrikcije ove funkcije na koordinatne osi su konstante, pa su prema tome i neprekidne na $\mathbb{R}$. *Kaže se da je ova funkcija "neprekidna po svakoj varijabli posebno". Dakle, neprekidnost po svakoj varijabli posebno ne implicira neprekidnost funkcije.*

Topološka struktura metričkog prostora je određena konvergentnim nizovima (Teorem 2.11.). Zato ne iznenađuje što se i neprekidnost preslikavanja metričkih prostora može opisati pomoću kovergentnih nizova. O tome nam govori sljedeći teorem:

Teorem 3.8. (Heineova karakterizacija neprekidnosti) *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori, $D \subseteq X$ i $f : D \to Y$ preslikavanje. Preslikavanje f je neprekidno u točki $x_0 \in D$ onda i samo onda ako za svaki niz (x_k) u D koji konvergira prema x_0, niz funkcijskih vrijednosti $\big(f(x_k)\big)$ konvergira prema $f(x_0)$.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Neka je f neprekidno preslikavanje u točki $x_0 \in D$, a (x_k) bilo koji niz u D koji konvergira prema x_0. Treba pokazati da niz $\big(f(x_k)\big)$ konvergira prema $f(x_0)$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Zbog neprekidnosti funkcije f u točki x_0 postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f\big(D \cap K_X(x_0, \delta)\big) \subseteq K_Y(f(x_0), \varepsilon). \tag{3.4}$$

Nadalje, kako $x_k \to x_0$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x_k \in D \cap K_X(x_0, \delta), \qquad k \geq k_0. \tag{3.5}$$

Iz (3.5) i (3.4) dobivamo da je $f(x_k) \in K_Y(f(x_0), \varepsilon)$ za svaki $k \geq k_0$. To znači da niz $\big(f(x_k)\big)$ konvergira prema $f(x_0)$.

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da f "čuva konvergenciju", tj. da $f(x_k) \to f(x_0)$ za svaki niz (x_k) iz D koji konvergira prema x_0. Treba pokazati da je f neprekidna u x_0. Dokaz ćemo provesti kontradikcijom. Pretpostavimo da je f prekidna u točki x_0. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ postoji točka $x_\delta \in D$ takva da je $d_X(x_\delta, x_0) < \delta$ i $d_Y(f(x_\delta), f(x_0) \geq \varepsilon$. Specijalno, stavljajući $\delta = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, dolazimo do niza (x_k) u D takvog da je $d_X(x_k, x_0) < \frac{1}{k}$ i $d_Y(f(x_k), f(x_0) \geq \varepsilon$. Tako dobiveni niz (x_k) konvergira prema x_0 (jer $d_X(x_k, x_0) \to 0$), ali odgovarajući niz funkcijskih vrijednosti $(f(x_k))$ ne konvergira prema $f(x_0)$. To je kontradikcija s pretpostavkom da f "čuva konvergenciju". □

Primjedba 3.9. *Svojtvo iz Teorema 3.8. se ponekad uzima za definiciju neprekidnosti u metričkim prostorima. To je tzv.* Heineova definicija neprekidnosti *u metričkim prostorima. Može se pokazati da Teorem 3.8. ne vrijedi općenito u Hausdorffovim prostorima (vidi [1, str. 188])*

Primjer 3.10. *Pokažimo da funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadana formulom*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5}{x^8 + (y - x^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

nije neprekidna u točki $(0, 0)$.

Niz $(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, konvergira prema $(0, 0)$. Kako $f(x_k, y_k) = k^3$ ne konvergira prema $f(0, 0) = 0$, prema Heineovoj definiciji neprekidnosti zaključujemo da funkcija f nije neprekidna u točki $(0, 0)$.

3.2. Neka svojstva neprekidnih preslikavanja

Sljedeći teorem nam daje nekoliko korisnih karakterizacija neprekidnosti:

Teorem 3.11. *Neka su X, Y topološki prostori, a $f : X \to Y$ preslikavanje. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) f je neprekidno preslikavanje.

(ii) Za svaki otvoreni skup $V \subseteq Y$ je i skup $f^{-1}(V)$ otvoren u X.

(iii) Za svaki zatvoreni skup $F \subseteq Y$ je i skup $f^{-1}(F)$ zatvoren u X.

(iv) Za svaki skup $A \subseteq X$ je $f(\operatorname{Cl} A) \subseteq \operatorname{Cl} f(A)$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Neka je V otvoren skup iz Y. Treba pokazati da je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u X. Neka je $x \in f^{-1}(V)$. Kako je V okolina točke $f(x)$, zbog neprekidnosti funkcije f postoji otvorena okolina U_x od x takva da je $f(U_x) \subseteq V$, odakle slijedi $U_x \subseteq f^{-1}(V)$. Zato je

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x \subseteq \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} f^{-1}(V) = f^{-1}(V)$$

odakle dobivamo $f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$. Kako je proizvoljna unija otvorenih skupova opet otvoren skup, tvrdnja je dokazana.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Neka je $F \subseteq Y$ zatvoren skup. Tada je $Y \backslash F$ otvoren skup u Y, pa je prema (ii) skup $f^{-1}(Y \backslash F)$ otvoren u X. Kako je $f^{-1}(F) = X \backslash f^{-1}(Y \backslash F)$, slijedi da je $f^{-1}(F)$ zatvoren skup.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Prema (iii) skup $f^{-1}\big(\operatorname{Cl} f(A)\big)$ je zatvoren. Osim toga, vrijedi

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}\big(\operatorname{Cl} f(A)\big).$$

Kako je $\operatorname{Cl} A$ najmanji zatvoreni skup koji sadrži A, to je $\operatorname{Cl} A \subseteq f^{-1}\big(\operatorname{Cl} f(A)\big)$, odakle slijedi $f(\operatorname{Cl} A) \subseteq \operatorname{Cl} f(A)$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Neka je V otvorena okolina točke $f(x)$ u prostoru Y. Treba pokazati da postoji otvorena okolina U od x takva da je $f(U) \subseteq V$.

Neka je $A := f^{-1}(Y \backslash V) = X \backslash f^{-1}(V)$. Prvo ćemo pokazati da $x \notin \operatorname{Cl} A$. U suprotnom bi prema (iv) bilo

$$f(x) \in f(\operatorname{Cl} A) \subseteq \operatorname{Cl} f(A) = \operatorname{Cl} f\big(f^{-1}(Y \backslash V)\big) \subseteq \operatorname{Cl}(Y \backslash V),$$

odakle bi slijedilo da $f(x) \notin Y \backslash \operatorname{Cl}(Y \backslash V) = \operatorname{Int} V = V$, što je kontradikcija.

Sada imamo

$$x \in X \backslash \operatorname{Cl} A = X \backslash \operatorname{Cl}(X \backslash f^{-1}(V)) = \operatorname{Int} f^{-1}(V).$$

To znači da je skup $U := \operatorname{Int} f^{-1}(V)$ otvorena okolina točke x. Očito je $f(U) \subseteq V$. □

Teorem 3.12. *Neka su $f, g : X \to Y$ neprekidna preslikavanja topološkog prostora X u Hausdorffov prostor Y. Tada vrijedi:*

(i) Skup $A := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ *je zatvoren.*

Nadalje, ako je $Y = \mathbb{R}$*, onda vrijedi:*

(ii) Skup $B := \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ *je zatvoren.*

(iii) Skup $C := \{x \in X : f(x) > g(x)\}$ *je otvoren.*

Dokaz. (i) Treba pokazati da je skup $G := X \backslash A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ otvoren. Neka je $x \in G$. Kako je Y Hausdorffov prostor, postoje disjunktne otvorene okoline V_1 oko $f(x)$ i V_2 oko $g(x)$. Zbog neprekidnosti funkcija f i g postoje otvorene okoline U_1 i U_2 točke x takve da je $f(U_1) \subseteq V_1$, a $g(U_2) \subseteq V_2$. Skup $U_x := U_1 \cap U_2$ je otvoren, sadrži točku x i vrijedi $f(U_x) \subseteq V_1$, $g(U_x) \subseteq V_2$. Zato je $U_x \subseteq G$, jer je $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Očito vrijedi

$$G \subseteq \bigcup_{x \in G} U_x \subseteq \bigcup_{x \in G} G = G$$

odakle slijedi $G = \bigcup\limits_{x \in G} U_x$. Kako je unija svake familije otvorenih skupova opet otvoren skup, G je otvoren skup.

(ii) Stavite $G := X \backslash B = \{x \in X : f(x) > g(x)\}$. Dalje se postupa na potpuno isti način kao pod (i).

(iii) Prema (ii) skup B je zatvoren. Po definiciji zatvorenog skupa to znači da je njegov komplement $X \backslash B = C$ otvoren. $\square$

Za skup D iz topološkog prostora X se kaže da je gust na X ako je $\operatorname{Cl} D = X$. Primjerice skup $\mathbb{Q}$ je gust na $\mathbb{R}$.

Korolar 3.13. *Ako se neprekidna preslikavanja* $f, g : X \to Y$ *topološkog prostora* X *u Hausdorffov prostor* Y *podudaraju na nekom gustom skupu* $D \subseteq X$*, onda je* $f = g$*.*

Dokaz. Prema teoremu 3.12. skup $A := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ je zatvoren. Po pretpostavci je $D \subseteq A$, pa je zato $X = \operatorname{Cl} D \subseteq \operatorname{Cl} A = A$. $\square$

Jedno od najvažnijih svojstava neprekidnih funkcija dano je u sljedećem teoremu:

Teorem 3.14. (O neprekidnosti kompozicije) *Neka su* X, Y, Z *topološki prostori,* $D \subseteq X$ *i* $E \subseteq Y$*. Nadalje, neka su* $f : D \to Y$ *i* $g : E \to Z$ *funkcije takve da je* $f(D) \subseteq E$*, tj. da je definirana kompozicija* $h = g \circ f : D \to Z$*. Ako je* f *neprekidna u točki* $x_0 \in D$*, a* g *neprekidna u točki* $f(x_0)$*, onda je kompozicija* $h = g \circ f$ *neprekidna u točki* x_0*.*

Dokaz. Neka je W proizvoljna otvorena okolina točke $h(x_0) = g(f(x_0))$ u Z. Treba pokazati da postoji otvorena okolina U točke x_0 u X takva da je $h(U \cap D) \subseteq W$. Kako je g neprekidna u točki $f(x_0)$, postoji otvorena okolina V točke $f(x_0)$ takva da je $g(V \cap E) \subseteq W$. Nadalje, zbog neprekidnosti funkcije f u točki x_0 postoji otvorena okolina U od x_0 takva da je $f(U \cap D) \subseteq V$. Kako je $f(U \cap D) \subseteq E$, to je $f(U \cap D) \subseteq V \cap E$. Zato je

$$h(U \cap D) = g(f(U \cap D)) \subseteq g(V \cap E) \subseteq W,$$

što dokazuje tvrdnju teorema. $\square$

3.3. Neprekidnost vektorskih funkcija više varijabli

Sada ćemo malo više pažnje posvetiti neprekidnosti vektorskih funkcija više varijabli. Neka je $f : D \to \mathbb{R}^m$, gdje je $D \subseteq \mathbb{R}^n$, vektorska funkcija od n varijabli. Kao što već znamo, ovu funkciju f možemo zapisati u obliku $f = (f_1, \ldots, f_m)$, gdje su $f_i : D \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, tzv. koordinatne funkcije. Uočimo da je $f_i = p_i \circ f$, gdje je $p_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ i-ta koordinatna projekcija.

Kako je vektorska funkcija f sastavljena od m realnih funkcija f_i, ne treba nas čuditi da se mnogi problemi o vektorskim funkcijama svode na odgovarajuće probleme za realne funkcije. To se jako lijepo vidi na problemu neprekidnosti.

Teorem 3.15. *Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f : D \to \mathbb{R}^m$ funkcija. Funkcija f je neprekidna u točki $x_0 \in D$ onda i samo onda ako su sva koordinatna preslikavanja $f_i : D \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots . m$, neprekidna u točki x_0.*

Dokaz. $\Rightarrow$. Neka je f neprekidna u točki $x_0 \in D$. Kako su koordinatne projekcije $p_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, neprekidne na $\mathbb{R}^m$, prema teoremu 3.14. sve kompozicije $f_i = p_i \circ f$, $i = 1, \ldots, m$, su neprekidne u točki x_0.

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da su sva koordinatna preslikavanja $f_i : D \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, neprekidna u točki $x_0 \in D$. Treba pokazati da je f neprekidna u x_0.

Neka je $\varepsilon > 0$. Kako su sva preslikavanje $f_i : D \to \mathbb{R}$ neprekidna u x_0, postoje realni brojevi $\delta_i > 0$ takvi da je

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, \qquad x \in K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta_i).$$

Neka je $\delta := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$. Tada za svaki $x \in K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta)$ vrijedi

$$d(f(x), f(x_0)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} [f_i(x) - f_i(x_0)]^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon,$$

pa je f neprekidna u x_0. $\square$.

Teorem 3.16. *Neka su $f, g : D \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcija u točki $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ i neka je $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

(i) Funkcija $f + g : D \to \mathbb{R}$ je neprekidna u x_0.

(ii) Funkcija $\lambda f : D \to \mathbb{R}$ je neprekidna u x_0.

(iii) *Funkcija* $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ *je neprekidna u* x_0.

(iv) *Ako je* $g(x_0) \neq 0$, *onda je funkcija* $\frac{f}{g}$ *definirana na nekoj okolini (u* D*) od* x_0 *i neprekidna je u* x_0.

(v) *Funkcija* $|f| : D \to \mathbb{R}$ *je neprekidna u* x_0.

Primjedba 3.17. *Zbog Teorema 3.15. tvrdnje (i)-(ii) vrijede i za vektorske funkcije* $f, g : D \to \mathbb{R}^m$. *Nadalje, tvrdnja (iii) vrijedi i za vektorske funkcije ako se za produkt uzme skalarni produkt. Zbog neprekidnosti norme tvrdnja (v) vrijedi i za vektorske funkcije ako se apsolutna vrijednost zamijeni s normom.*

Za dokaz Teorema 3.16. trebat će nam sljedeće dvije leme:

Lema 3.18. (O lokalnoj omeđenosti neprekidne funkcije) *Neka je* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *i* $f : D \to \mathbb{R}^m$ *funkcija. Ako je* f *neprekidna u točki* $x_0 \in D$, *onda je ona omeđena na nekoj okolini točke* x_0, *tj. postoje brojevi* $r > 0$ *i* $M > 0$ *takvi da je* $\|f(x)\| < M$ *za svaki* $x \in K_{\mathbb{R}^n}(x_0, r) \cap D$.

Dokaz. Zbog neprekidnosti funkcije f u točki x_0, za $\varepsilon = 1$ postoji $r > 0$ takav da je $\|f(x) - f(x_0)\| < 1$ za svaki $x \in K_{\mathbb{R}^n}(x_0, r) \cap D$. Neka je $M := 1 + \|f(x_0)\|$. Sada za svaki $x \in K_{\mathbb{R}^n}(x_0, r) \cap D$ pomoću nejednakosti trokuta dobivamo

$$\|f(x)\| = \|\big(f(x) - f(x_0)\big) + f(x_0)\| \leq \|f(x) - f(x_0)\| + \|f(x_0)\| < 1 + \|f(x_0)\| = M.$$

□

Lema 3.19. *Neka je* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *i* $f : D \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija u točki* $x_0 \in D$. *Tada vrijedi:*

(i) *Ako je* $f(x_0) > 0$, *onda postoji* $\delta > 0$ *takav da je*

$$f(x) > \frac{1}{2} f(x_0) \qquad \forall x \in K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta) \cap D.$$

(ii) *Ako je* $f(x_0) < 0$, *onda postoji* $\delta > 0$ *takav da je*

$$f(x) < \frac{1}{2} f(x_0) \qquad \forall x \in K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta) \cap D.$$

Dokaz. (i) Neka je $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0) > 0$. Zbog neprekidnosti funkcije f u točki x_0 postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta) \cap D$ vrijedi $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) = \big(\frac{1}{2} f(x_0), \frac{3}{2} f(x_0)\big)$. Zato je $f(x) > \frac{1}{2} f(x_0) > 0$.

(ii) Neka je $\varepsilon = -\frac{1}{2} f(x_0) > 0$. Tada zbog neprekidnosti od f u x_0 postoji postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta) \cap D$ vrijedi $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) = \big(\frac{3}{2} f(x_0), \frac{1}{2} f(x_0)\big)$. Zato je $f(x) < \frac{1}{2} f(x_0) < 0$. □

Dokaz Teorema 3.16. (i) Neka je $\varepsilon > 0$. Treba pokazati da postoji $\delta > 0$ takav da je $|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| < \varepsilon$ za svaki $x \in K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta) \cap D$.

Zbog neprekidnosti funkcija f i g u x_0 postoje $\delta_1, \delta_2 > 0$ takvi da je

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &< \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall x \in K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta_1) \cap D, \\ |g(x) - g(x_0)| &< \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall x \in K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta_2) \cap D. \end{aligned}$$

Neka je $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tada za svaku točku $x \in K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta) \cap D$ vrijedi

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| &= |(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))| \\ &\le |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(ii) Ako je $\lambda = 0$, onda je λf konstanta, pa je neprekidna. Zato nadalje pretpostavimo da je $\lambda \neq 0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Zbog neprekidnosti od f u x_0 postoji $\delta > 0$ takav da je $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ za svaki $x \in K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta) \cap D$. Sada se lako pokaže da za svaki $x \in K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta) \cap D$ vrijedi $|(\lambda f)(x) - (\lambda f)(x_0)| < \varepsilon$.

(iii) Za dokaz ove tvrdnje iskoristit ćemo nejednakost

$$\begin{aligned} &|(fg)(x) - (fg)(x_0)| = |f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \\ &\quad = |f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) \pm f(x)g(x_0)| \\ &\quad = |f(x)[g(x) - g(x_0)] + g(x_0)[f(x) - f(x_0)]| \\ &\quad \le |f(x)| \cdot |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)| \cdot |f(x) - f(x_0)| \end{aligned}$$

i lemu 3.18. Prema lemi 3.18. postoje $r > 0$ i $M > 0$ takvi da je $|f(x)| < M$ i $|g(x)| < M$ za svaki $x \in K_{\mathbb{R}^n}(x_0, r) \cap D$. Neka je $\varepsilon > 0$. Zbog neprekidnosti funkcija f i g u točki x_0 postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta) \cap D$ vrijedi

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \& \quad |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Pri tome bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\delta \le r$. Sada za svaki $x \in K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta) \cap D$ dobivamo

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (fg)(x_0)| &\le |f(x)| \cdot |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)| \cdot |f(x) - f(x_0)| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(iv) Kako je $g(x_0) \neq 0$, prema lemi 3.19. postoji $\delta_1 > 0$ takav da je

$$|g(x)| > \frac{1}{2}|g(x_0)| \qquad \text{za svaki } x \in K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta_1) \cap D. \tag{3.6}$$

To znači da je funkcija $\frac{f}{g}$ definirana na skupu $K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta_1) \cap D$, koji je okolina (u D) točke x_0. Kako je $f \cdot g = f \cdot \frac{1}{g}$, zbog (iii) dovoljno je pokazati da je $\frac{1}{g}$ neprekidna u x_0. U tu svrhu ćemo iskoristiti jednakost

$$\Big|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\Big| = \frac{|g(x) - g(x_0)|}{|g(x)| \cdot |g(x_0|} \tag{3.7}$$

koja nam sugerira kako treba "uštimati" dokaz ove tvrdnje.

Neka je $\varepsilon > 0$. Zbog neprekidnosti od g u x_0 postoji $\delta_2 > 0$ takav da je

$$|g(x) - g(x_0)| < \frac{1}{2}|g(x_0)|^2 \quad \text{za svaki } x \in K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta_2) \cap D. \tag{3.8}$$

Neka je $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tada za svaki $x \in K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta) \cap D$ iz (3.7), (3.6) i (3.8) dobivamo $\Big|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\Big| < \varepsilon$.

(v) Tvrdnja slijedi iz neprekidnosti norme i neprekidnosti kompozicije neprekidnih preslikavanja. □

Pomoću Teorema 3.15., Teorema 3.16. i teorema o neprekidnosti kompozicije nprekidnih funkcija lako je dokazati sljedeći korolar:

Korolar 3.20.

(i) Zbrajanje i množenje realnih brojeva su neprekidne funkcije sa $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$.

(ii) Polinomi (jedne ili više varijabli) su neprekidne funkcije.

(iii) Racionalne funkcije su neprekidne u svakoj točki u kojoj su definirane.

(iv) Skup svih neprekidnih funkcija sa $D \subseteq \mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$ je realan vektorski prostor.

Dokaz. Radi ilustracije dokazat ćemo samo tvrdnju (i): Pomoću koordinatnih projekcija $p_1, p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ možemo pisati

$$\begin{aligned} x + y &= p_1(x, y) + p_2(x, y) \\ x \cdot y &= p_1(x, y) \cdot p_2(x, y). \end{aligned}$$

Kako su p_1 i p_2 neprekidne funkcije, prema teoremu 3.16. zbrajanje i množenje realnih brojeva su neprekidne funkcije. □

3.4. Povezani prostori i povezanost putevima

Intuitivno govoreći, topološki prostor je povezan ako je sastavljen "od jednog komada". Preciznije:

Definicija 3.21. *Topološki prostor X je* povezan *ako se ne može prikazati kao disjunktna unija dvaju nepraznih otvorenih podskupova, tj. ako ne postoje neprazni otvoreni podskupovi $U_1, U_2 \subseteq X$ takvi da je $X = U_1 \cup U_2$ i $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Prostor X je* nepovezan *ako nije povezan. Skup $A \subseteq X$ je povezan ako je povezan kao topološki potprostor.*

Teorem 3.22. *Neka je X topološki prostor. Sljedeća svojstva su ekvivalentna:*

(i) X je povezan.

(ii) X se ne može prikazati kao disjunktna unija dvaju nepraznih zatvorenih podskupova.

(iii) Svako neprekidno preslikavanje $f : X \to \{0, 1\}$ je konstantno.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Kada bi postojali neprazni zatvoreni skupovi $F_1, F_2 \subseteq X$ takvi da je $X = F_1 \cup F_2$ i $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, onda bi F_1 i F_2 ujedno bili i otvoreni skupovi pa bi X bio nepovezan.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Kada bi postojala neprekidna surjekcija $f : X \to \{0, 1\}$, onda bi skupovi $F_1 := f^{-1}(0)$ i $F_2 := f^{-1}(1)$ bili neprazni i zatvoreni (Teorem 3.11.) pa bi vrijedilo $X = F_1 \cup F_2$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Kada X ne bi bio povezan, postojali bi neprazni otvoreni skupovi U_1 i U_2 takvi da je $X = U_1 \cup U_2$ i $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Tada bi funkcija $f : X \to \{0, 1\}$ definirana formulom

$$f(x) = \begin{cases} 0, \; x \in U_1 \\ 1, \; x \in U_2 \end{cases}$$

bila neprekidna surjekcija. □

Sljedeći teorem daje važan primjer povezanog skupa.

Teorem 3.23. *Segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je povezan.*

Dokaz. Pretpostavimo da segment $[a, b]$ nije povezan, tj. da postoje neprazni, disjunktni, otvoreni u $[a, b]$ skupovi U_1 i $U_2 \subseteq \mathbb{R}$ takvi da je $[a, b] = U_1 \cup U_2$. Bez smanjenja općenitosti, neka je $a \in U_1$ i neka je $c := \inf U_2$. Lako je pokazati da mora biti ili $c \in U_1$ ili $c \in U_2$. Kako je $a \in U_1$ i U_1 otvoren u $[a, b]$, postoji $r > 0$ takav da je $[a, a + r) \subseteq U_1 = [a, b] \backslash U_2$, pa je zato $c = \inf U_2 \neq a$. Očito je $c \neq b$, jer bi inače bilo $U_2 = \{b\}$ što nije otvoren skup u $[a, b]$.

Kao što smo rekli, mora biti ili $c \in U_1$ ili $c \in U_2$. Kad bi bilo $c \in U_2$, onda bi (zbog otvorenosti u $[a, b]$ skupa U_2) postojao $r > 0$ takav da je $(c - r, c + r) \subseteq U_2$, pa bi infimum skupa U_2 bio manji od c. Dakle, mora biti $c \in U_1$. No tada bi postojao $r > 0$ takav da je $(c - r, c + r) \subseteq U_1$ pa c ne bi mogao biti infimum skupa U_2. Time smo dobili kontradikciju, pa je $[a, b]$ povezan. □

Primjer 3.24. *Skup $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ nije povezan jer $f : A \to \{0, 1\}$ zadana sa*

$$f(x) = \begin{cases} 0, \; x < 0 \\ 1, \; x > 0 \end{cases}$$

je neprekidna surjekcija.

Teorem 3.25. *Neka je $(A_i, i \in I)$ familija nepraznih podskupova A_i iz topološkog prostora X takva da je $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Ako je svaki od skupova A_i, $i \in I$, povezan, onda je i skup $A := \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ povezan.*

Dokaz. Neka je $f : A \to \{0,1\}$ neprekidno preslikavanje. Treba pokazati da je f konstanta.

Neka je $x_0 \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Za svaki $i \in I$ restrikcija $f_{|A_i} : A_i \to \{0,1\}$ je neprekidno i konstantno preslikavanje (jer je A_i povezan skup). Zato je $f_{|A_i}(x) = f(x_0)$ za svaki $x \in A_i$, pa je stoga i $f(A) = f(x_0)$. □

Primjer 3.26.

(a) Interval $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ je povezan jer postoji dovoljno velik prirodan broj n_0 takav da je

$$(a,b) = \bigcup_{n\geq n_0} \big[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\big].$$

(b) Slično se pokaže da su povezani i skupovi $(a,b]$ i $[a,b)$.

(c) Prostor $\mathbb{R}$ je povezan jer je $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n,n]$.

Teorem 3.27. *Neka je X povezan topološki prostor i $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Tada je slika $f(X) \subseteq Y$ povezan skup.*

Dokaz. Kada bi postojala neprekidna surjekcija $g : f(X) \to \{0,1\}$, onda bi i kompozicija $g \circ f : X \to \{0,1\}$ bila neprekidna surjekcija, pa X ne bi bio povezan. □

Korolar 3.28. *Neka je I jedan od sljedećih skupova: $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$ ili (a,b). Graf Γ_φ neprekidne realne funkcije $\varphi : I \to \mathbb{R}$ je povezan.*

Dokaz. Na Γ_φ možemo gledati kao na sliku neprekidne funkcije $f : I \to \mathbb{R}^2$ definirane sa $f(x) = (x, \varphi(x))$. □

Definicija 3.29. *Neka su X i Y topološki prostori. Neprekidna bijekcija $f : X \to Y$ je* homeomorfizam *ako je neprekidno i inverzno preslikavanje $f^{-1} : Y \to X$.*

Za prostore X i Y kažemo da su homeomorfni *ako postoji barem jedan homeomorfizam $f : X \to Y$.*

Primjer 3.30. *Skup $\mathbb{R}$ i interval $(-1,1)$ su homeomorfni. Za homeomorfizam možemo uzeti preslikavanje $f : \mathbb{R} \to (-1,1)$ definirano formulom $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.*

Iz definicije slijedi da je kompozicija homeomorfizama opet homeomorfizam, te da je i f^{-1} homeomorfizam za svaki homeomorfizam f. Identiteta $1_X : X \to X$ je očito homeomorfizam. Zato je homeomorfizam relacija ekvivalencije čije se klase sastoje od međusobno homeomorfnih prostora. Svako svojstvo prostora koje imaju svi prostori iz iste klase zove se topološko svojstvo ili topološka invarijanta.

Korolar 3.31. *Povezanost je topološko svojstvo, tj. ako su X i Y homeomorfni, te ako je jedan od njih povezan, onda je i drugi povezan.*

Za primjenu je izuzetno važan sljedeći teorem koji nam govori da neprekidna realna funkcija definirana na povezanom prostoru prima sve međuvrijednosti:

Teorem 3.32. *Neka je X povezan prostor, $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija i $c, d \in f(X)$. Tada je $[c, d] \subseteq f(X)$, tj. za svaki $t \in [c, d]$ postoji $x \in X$ takav da je $f(x) = t$.*

Dokaz. Kada bi postojao $t \in [c, d]$ takav da $t \notin f(X)$, onda bi $U_1 := f^{-1}\big((-\infty, t)\big)$ i $U_2 := f^{-1}\big((t, \infty)\big)$ bili disjunktni neprazni podskupovi od X takvi da je $X = U_1 \cup U_2$, pa X ne bi bio povezan. □

Korolar 3.33. *Neprekidna slika segmenta je segment, tj. ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, onda je $f([a, b])$ segment.*

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da je $f([a, b])$ odozgor omeđen skup. Kada ne bi bilo tako, postojao bi niz $(f(x_k))$ u $f([a, b])$ koji bi divergirao prema $+\infty$. Kako je (x_k) omeđen niz u $[a, b]$, on bi prema Bolzano-Weierstrassovom teoremu imao konvergentan podniz (x_{u_k}). Neka $x_{u_k} \to x_0$. Segment $[a, b]$ je zatvoren, pa je $x_0 \in [a, b]$ (Teorem 2.11.). Tada bi prema Heineovoj definiciji neprekidnosti niz $f(x_{u_k})$ konvergirao prema $f(x_0)$, što je kontradikcija. Dakle, $f([a, b])$ je odozgor omeđen skup. Na sličan način se pokaže da je $f([a, b])$ odozgo omeđen.

Sada ćemo pokazati da je $A := \inf f([a, b]) \in f([a, b])$. Zaista, Prema definiciji infimuma za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $f(x_k)$ takav da je $A \leq f(x_k) < A + \frac{1}{k}$. To znači da niz $f(x_k)$ konvergira prema A. Niz (x_k) ima konvergentan podniz (x_{u_k}). Neka $x_{u_k} \to x_0 \in [a, b]$. Prema Heineovoj definiciji neprekidnosti tada $f(x_{u_k}) \to f(x_0)$. Kako podniz konvergentnog niza konvergira istoj vrijednosti kao i niz (Propozicija 2.14.), to je $f(x_0) = A$.

Na sličan način se pokaže da je $B := \sup f([a, b]) \in f([a, b])$.

Dakle, $A, B \in f([a, b])$. Očito je $f([a, b]) \subseteq [A, B]$. Prema teoremu 3.32. je $[A, B] \subseteq f([a, b])$. Time smo pokazali da je $f([a, b]) = [A, B]$. □

Primjer 3.34. *Pokažimo da je svako neprekidno preslikavanje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ konstantno.*

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je kodomena skup $\mathbb{R}$, tj da je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija koja prima samo racionalne vrijednosti. Kada f ne bi bila konstanta, postojale bi točke $a, b \in \mathbb{R}$ takve da je $f(a) \neq f(b)$. Prema Korolaru 3.33. skup $f([a, b])$ bi bio segment. Kako svaki segment sadrži iracionalne brojeve, to bi bila kontradikcija s pretpostavkom da f prima samo racionalne vrijednosti.

Sljedeći korolar se često koristi u numeričkoj matematici:

Korolar 3.35. *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da je $f(a) \cdot f(b) < 0$. Tada postoji točka $c \in [a, b]$ takva da je $f(c) = 0$.*

Povezanost putevima. Neka je $A \subseteq X$ podskup topološkog prostora X. Put u skupu A je svako neprekidno preslikavanje $\omega : [a, b] \to X$ takvo da je $\omega([a, b]) \subseteq A$. Točka $x_0 := \omega(a)$ je početak puta, a točka $x_1 := \omega(b)$ je kraj puta. Kažemo da je ω put između točaka x_0 i x_1 ili da put ω povezuje točku x_0 s točkom x_1. Pri tome je moguće da bude $x_0 = x_1$; u tom slučaju put se naziva petljom. Bez smanjenja općenitosti, u definiciji puta $\omega : [a, b] \to X$ može se pretpostaviti da je $[a, b] = [0, 1]$.

Definicija 3.36. *Skup $A \subseteq X$ iz topološkog prostora X je* povezan putevima *ako između bilo koje dvije točke $x_0, x_1 \in A$ postoji put u A.*

Teorem 3.37. *Svaki putevima povezan skup A je povezan.*

Dokaz. Fiksirajmo točku $x_0 \in A$. Po pretpostavci za svaku točku $x \in A$ postoji put $\omega_x : [a_x, b_x] \to A$ koji povezuje x_0 sa x. Kako je svaki segment $[a_x, b_x]$ povezan (Teorem 3.23.), prema teoremu 3.27. i skup $\omega_x([a_x, b_x])$ je povezan. Kako je $x_0 \in \omega_x([a_x, b_x])$ za svaki $x \in A$, prema teoremu 3.25. i skup $A = \bigcup_{x \in A} \omega_x([a_x, b_x])$ je povezan. $\square$

Primjedba 3.38. *Postoji povezan skup A koji nije putevima povezan. Konstruirajmo jedan takav skup. Interval $(0, 1]$ je povezan (Primjer 3.26.), pa je zato povezan i skup (vidi Korolar 3.28.)*

$$\Gamma := \Big\{ \Big(x, \sin\big(\frac{1}{x}\big) \Big) : 0 < x \leq 1 \Big\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Neka je

$$A := \Gamma \cup \{(0, 0)\} = \Big\{ \Big(x, \sin\big(\frac{1}{x}\big) \Big) : 0 < x \leq 1 \Big\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Kako je $(0, 0) \in \operatorname{Cl} A$, skup A je povezan (vidi 9. zadatak na str. 63) Može se pokazati da A nije povezan putevima.

Dokažimo da A nije povezan putevima. Dokaz ćemo provesti kontradikcijom. Pretpostavimo da je skup A putevima povezan. Tada postoji put u A koji povezuje točake $(0, 0)$ i $(1, \sin 1)$, tj. neprekidno preslikavanje $\omega : [0, 1] \to X$ takvo da je $\omega([0, 1]) \subseteq A$, $\omega(0) = (0, 0)$ i $\omega(1) = (1, \sin 1)$. Neka je $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Kako je $\omega_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija te kako je $\omega_1(0) = 0$, $\omega_1(1) = 1$, prema teoremu 3.32. je $\omega_1([0, 1]) = [0, 1]$. Neka je (x_k), $x_k \neq 0$, bilo koji niz iz $(0, 1]$ koji konvergira prema 0. Kako je $\omega_1([0, 1]) = [0, 1]$, za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $t_k \in (0, 1]$ takav da je $x_k = \omega_1(t_k)$. Nadalje, zbog $\omega([0, 1]) \subseteq A$ je

$$\omega(t_k) = (\omega_1(t_k), \omega_2(t_k)) = \Big(x_k, \sin\big(\frac{1}{x_k}\big) \Big)$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je (t_k) konvergentan niz (u suprotnom uzmemo konvergentan podniz). Neka $t_k \to t_0 \in [0, 1]$. Tada pomoću Heineove definicije neprekidnosti dobivamo

$$\begin{aligned} \omega_1(t_0) &= \lim_{k\to\infty} \omega_1(t_k) = \lim_{k\to\infty} x_k = 0 \\ \omega_2(t_0) &= \lim_{k\to\infty} \omega_2(t_k) = \lim_{k\to\infty} \sin\big(\frac{1}{x_k}\big). \end{aligned}$$

Kako je $\omega(t_0) = (\omega_1(t_0), \omega_2(t_0)) = (0, \omega_2(t_0)) \in A$, to je $\omega_2(t_0) = 0$, tj.

$$\lim_{k\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x_k}\right) = 0.$$

Dakle, kada bi A bio putevima povezan, tada bi za svaki niz niz (x_k), $x_k \neq 0$, iz $(0,1]$ koji konvergira prema 0 imali $\lim_{k\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x_k}\right) = 0$, što nije točno (vidi 18. zadatak na str. 65). Dakle, skup A nije povezan putevima.

U normiranom vektorskom prostoru X za svake dvije točke $x_0, x_1 \in X$ definira se tzv. pravocrtni put $\omega : [0,1] \to X$:

$$\omega(t) = x_0 + t(x_1 - x_0), \qquad t \in [0,1].$$

Pri tome skup

$$[x_0, x_1] := \omega([0,1]) = \{x_0 + t(x_1 - x_0),\, t \in [0,1]\}$$

zovemo segment u X. Uniju segmenata oblika $\Gamma = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \ldots \cup [x_{k-1}, x_k]$ zovemo poligonalna crta od x_0 do x_k.

Propozicija 3.39. *Svaka poligonalna crta $\Gamma = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \ldots \cup [x_{k-1}, x_k]$ u normiranom prostoru X je slika nekog puta između x_0 i x_k.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, neka je $\Gamma = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2]$. Funkcija $\omega : [0,2] \to X$ definirana formulom

$$\omega(t) = \begin{cases} x_0 + t(x_1 - x_0), & 0 \le t \le 1 \\ x_1 + (t-1)(x_2 - x_1), & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

je put u X i pri tome je $\omega([0,2]) = \Gamma$. □

Skup A iz normiranog prostora X je konveksan ako ima svojstvo da za svake dvije točke $x_0, x_1 \in A$ sadrži i segment $[x_0, x_1]$.

Primjer 3.40. *Svaka otvorena kugla $K(y_0, r) \subseteq X$ je konveksan skup. Zaista, neka su $x_0, x_1 \in K(y_0, r)$. Tada je $\|x_0 - y_0\| < r$ i $\|x_1 - y_0\| < r$. Za svaku točku $x \in [x_0, x_1]$ postoji $t \in [0,1]$ takav da je $x = x_0 + t(x_1 - x_0)$, pa je zato*

$$\begin{aligned} \|x - y_0\| &= \|x_0 + t(x_1 - x_0) - y_0\| = \|(1-t)(x_0 - y_0) + t(x_1 - y_0)\| \\ &\le (1-t)\|x_0 - y_0\| + t\|x_1 - y_0\| < (1-t)r + tr = r, \end{aligned}$$

tj. $x \in K(y_0, r)$.

Korolar 3.41. *Svaki konveksan skup K u normiranom vektorskom prostoru X je povezan.*

Dokaz. Budući da za svake dvije točke $x_0, x_1 \in K$ segment $[x_0, x_1]$ leži u K, skup K je putevima povezan i zato je povezan. □

Korolar 3.42. *Skup $K \subseteq \mathbb{R}$ je povezan onda i samo onda ako je konveksan.*

Dokaz. Ako je K konveksan, prema prethodnom korolaru on je povezan. Pretpostavimo da je K povezan i pokažimo da je tada konveksan. Neka su x_0 i x_1 bilo koje dvije točke skupa K. Bez smanjenja općenitosti neka je $x_0 < x_1$. Treba pokazati da svaka točka $x \in (x_0, x_1)$ pripada skupu K. U protivnom bi postojala točka $x \in (x_0, x_1) \backslash K$, pa bi skupovi $U_1 := K \cap (-\infty, x)$, $U_2 := K \cap (x, \infty)$ bili neprazni disjunktni otvoreni skupovi u K sa svojstvom $K = U_1 \cup U_2$, što bi bilo u suprotnosti s pretpostavkom da je K povezan. □

Dokaz sljedećeg teorema može se naći u [1, str. 221, Teorem 7]:

Teorem 3.43. *Neka je U otvoren i povezan skup u normiranom prostoru X. Tada se svake dvije točke iz U mogu povezati poligonalnom crtom.*

Vrlo je teško stvoriti geometrijsku predodžbu o tome kako izgledaju povezani skupovi. Nasuprot tome, imamo dobru predodžbu o tome kako izgledaju putevi, naročito poligonalne crte. U matematičkoj analizi važnu ulogu imaju otvoreni i povezani podskupovi od $\mathbb{R}^n$; takav skup zovemo **područje**. Otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je područje onda i samo onda ako se svake njegove dvije točke mogu spojiti poligonalnom crtom. Štoviše, vrijedi općenitiji rezultat:

Korolar 3.44. *Otvoren skup U u normiranom prostoru X je povezan onda i samo onda ako se svake dvije točke $x_0, x_1 \in U$ mogu povezati poligonalnom crtom.*

Dokaz. Ako je U otvoren i povezan, prema prethodnom teoremu svake dvije točke $x_0, x_1 \in U$ se mogu povezati poligonalnom crtom. Ako se svake dvije točke $x_0, x_1 \in U$ mogu povezati poligonalnom crtom, onda je U povezan putevima (Propozicija 3.39.), pa je prema Teoremu 3.37. i povezan. □

3.5. Neprekidne funkcije na kompaktima

Teorem 3.45. *Neka su X i Y topološki prostori, $K \subseteq X$ kompaktan skup, a $f : K \to Y$ neprekidno preslikavanje. Tada je slika $f(K)$ kompaktan skup u Y.*

Dokaz. Treba pokazati da svaki otvoreni pokrivač skupa $f(K)$ ima konačan potpokrivač. Neka je $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ otvoreni pokrivač skupa $f(K)$. Tada je $f(K) \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, pa je zato

$$K = f^{-1}(f(K)) = f^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(V_\alpha).$$

Zbog neprekidnosti preslikavanja f za svaki $\alpha \in A$ skup $f^{-1}(V_\alpha)$ je otvoren u K, tj. postoji skup U_α otvoren u X takav da je $f^{-1}(V_\alpha) = K \cap U_\alpha$. Zato je

$$K = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(V_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Dakle, familija $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ je otvoreni pokrivač skupa K. Zbog kompaktnosti skupa K ta familija ima konačan potpokrivač $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}\}$. Dakle, $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$. Kako je $f(K \cap U_\alpha) = f(f^{-1}(V_\alpha)) \subseteq V_\alpha$, $\alpha \in A$, to je

$$f(K) = f\big(K \cap \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}\big) = f\big(\bigcup_{i=1}^n (K \cap U_{\alpha_i})\big) = \bigcup_{i=1}^n f(K \cap U_{\alpha_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i},$$

što nam pokazuje da je $\{V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n}\}$ konačan potpokrivač skupa $f(K)$. □

Sljedeći korolar je poopćenje Korolara 3.33.. On nam govori da svaka neprekidna realna funkcija definirana na kompaktu postiže i minimum i maksimum.

Korolar 3.46. (Weierstrassov teorem) *Neka je X topološki prostor, $K \subseteq X$ kompaktan skup, a $f : K \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje. Tada f ima minimum i maksimum, tj. postoje točke $x_1, x_2 \in K$ sa svojstvom*

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2), \qquad \forall x \in K.$$

Dokaz. Prema teoremu 3.45. skup $f(K)$ je kompaktan, pa je prema Korolaru 2.40. omeđen i zatvoren. Zbog omeđenosti postoje $\inf f(K)$ i $\sup f(K)$.

Pokažimo da je $\inf f(K) \in f(K)$. Zaista, prema definiciji infimuma za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $y_k \in f(K)$ takav da je $\inf f(K) \le y_k < \inf f(K) + \frac{1}{k}$. To znači da niz (y_k) konvergira prema $\inf f(K)$. Zbog zatvorenosti skupa $f(K)$ je $\inf f(K) \in f(K)$ (Teorem 2.11.). Slično se pokaže da je $\sup f(K) \in f(K)$.

Kako je $\inf f(K) \in f(K)$ i $\sup f(K) \in f(K)$, postoje točke $x_1, x_2 \in K$ takve da je $f(x_1) = \inf f(K)$, $f(x_2) = \sup f(K)$. Zato za svaki $x \in K$ vrijedi

$$f(x_1) = \inf f(K) \le f(x) \le \sup f(K) = f(x_2).$$

□

Korolar 3.47. *Neka je X topološki prostor, $K \subseteq X$ kompaktan skup, a $f : K \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje. Ako je $f(x) > 0$ za svaki $x \in K$, onda postoji realan broj $c > 0$ takav da je $f(x) > c$ za svaki $x \in K$.*

Dokaz. Dovoljno je staviti $c = \frac{1}{2} \inf f(K) = \frac{1}{2} \min f(K)$. □

Primjer 3.48. *Koristeći se Weierstrassovim teoremom nije teško pokazati da su sve norme na $\mathbb{R}^n$ ekvivalentne.*

Neka je $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ proizvoljna norma na $\mathbb{R}^n$, a $\| \cdot \|$ uobičajena euklidska norma. Stavimo

$$M := \max\{|\!|\!|\mathbf{e}_i|\!|\!| : i = 1, \dots, n\},$$

gdje su $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \dots, n$, vektori standardne baze prostora $\mathbb{R}^n$. Tada za svaki vektor $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$|\!|\!|\mathbf{x}|\!|\!| = |\!|\!| \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i |\!|\!| \le \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot |\!|\!|\mathbf{e}_i|\!|\!| \le M \sum_{i=1}^n |x_i| \le nM\|\mathbf{x}\| \tag{3.9}$$

Posljednja nejednakost je posljedica nejednakosti $\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i| \leq n\|\mathbf{x}\|$.

Sada ćemo pokazati da je norma $|\!|\!| \cdot |\!|\!| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *neprekidno preslikavanje sa euklidskog prostora* $\mathbb{R}^n$ *u euklidski prostor* $\mathbb{R}$. *Neka je zato* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *Za svaki* $\varepsilon > 0$ *treba pronaći* $\delta > 0$ *takav da je* $\big| |\!|\!|\mathbf{x}|\!|\!| - |\!|\!|\mathbf{x}_0|\!|\!| \big| < \varepsilon$ *za svaki* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *za koji je* $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$.

Zamijenimo li u (3.9) $\mathbf{x}$ *sa* $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, *dobivamo* $|\!|\!|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|\!|\!| \leq nM\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$. *Pomoću te nejednakosti i nejednakosti* $\Big| |\!|\!|\mathbf{x}|\!|\!| - |\!|\!|\mathbf{x}_0|\!|\!| \Big| \leq |\!|\!|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|\!|\!|$ *(dokaz ove nejednakosti može se naći u Primjeru 3.6.) dobivamo*

$$\Big| |\!|\!|\mathbf{x}|\!|\!| - |\!|\!|\mathbf{x}_0|\!|\!| \Big| \leq |\!|\!|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|\!|\!| \leq nM\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|,$$

odakle vidimo da za traženi broj $\delta > 0$ *možemo uzeti bilo koji relan takav da je* $\delta < \frac{\varepsilon}{nM}$.

Neka je m *minimum funkcije* $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ *na jediničnoj sferi u* $\mathbb{R}^n$, *tj. na skupu*

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Jedinična sfera je kompaktan skup, a $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ *je neprekidna funkcija pa minimum postoji po Weierstrassovom teoremu. Tada za svaki* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ *vrijedi*

$$|\!|\!|\mathbf{x}|\!|\!| = \|\mathbf{x}\| \cdot \left|\!\left|\!\left| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right|\!\right|\!\right| \geq m\|\mathbf{x}\|,$$

jer je $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \in S^{n-1}$ *pa je* $\left|\!\left|\!\left| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right|\!\right|\!\right| \geq m$. *Time smo dokazali nejednakosti*

$$m\|\mathbf{x}\| \leq |\!|\!|\mathbf{x}|\!|\!| \leq nM\|\mathbf{x}\|$$

pa su $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ *i* $\| \cdot \|$ *ekvivalntne norme.*

Teorem 3.49. *Neka je* $f : X \to Y$ *neprekidna bijekcija metričkih prostora. Ako je* X *kompaktan, onda je i inverzno preslikavanje* $g = f^{-1} : Y \to X$ *neprekidno (tj.* f *je homeomorfizam).*

Dokaz. Prema teoremu 3.11. dovoljno je pokazati da je za svaki zatvoreni skup $F \subseteq X$ zatvoren i skup $g^{-1}(F) = f(F) \subseteq Y$.

Ako je $F \subseteq X$ zatvoren podskup kompaktnog prostora X, onda je F kompaktan (teorem 2.36.), pa je i $f(F) = g^{-1}(F)$ kompaktan u Y(Teorem 3.45.). No tada je prema korolaru 2.39. skup $g^{-1}(F)$ omeđen i zatvoren. □

Jedno vrlo važno svojstvo neprekidnih funkcija na kompaktima je uniformna neprekidnost.

Definicija 3.50. *Neka su* (X, d_X) *i* (Y, d_Y) *metrički prostori,* $D \subseteq X$ *i* $f : D \to Y$ *preslikavanje. Preslikavanje* f *je* uniformno neprekidno *(ili* jednoliko neprekidno*) na skupu* D *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da je* $d_Y(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$ *za sve* $x', x'' \in D$ *za koje je* $d_X(x', x'') < \delta$.

Očito je da uniformna neprekidnost povlači neprekidnost. Obratno ne vrijedi (vidi primjer 3.51.). Razlika između ova dva pojma je u tome što kod obične neprekidnosti δ ovisi o ε i o točki x_0 u kojoj se definira neprekidnost, dok kod uniformne neprekidnosti δ ovisi samo o ε.

Primjer 3.51. *Funkcija $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ zadana formulom $f(x) = \frac{1}{x}$ je neprekidna, ali nije uniformno neprekidna na $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.*

Treba pokazati da postoji $\varepsilon > 0$ sa svojstvom da za svaki $\delta > 0$ postoje točke $x', x'' \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ takve da je $|x' - x''| < \delta$ i $\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| \geq \varepsilon$ Zaista, niz $\left(\frac{1}{k}\right)$ je konvergentan pa je i Cauchyjev. Zato za svaki $\delta > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{k}\right| < \delta, \qquad \forall\, k, m \geq k_0.$$

Stavimo $x' = \frac{1}{m}$, $x'' = \frac{1}{k}$, gdje su $m, k \geq k_0$ i $m > n$. Tada je $|x' - x''| < \delta$, ali je ipak $\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| = |m - k| \geq 1$. Dakle, ni za jedan $\varepsilon \leq 1$ ne može se zadovoljiti definiciju uniformne neprekidnosti.

Ipak, za funkcije definirane na kompaktnom skupu neprekidnost i uniformna neprekidnost se podudaraju. O tome nam govori sljedeći teorem:

Teorem 3.52. *Neka su X i Y metrički prostori, $K \subseteq X$ i $f : K \to Y$ neprekidno preslikavanje. Ako je K kompaktan skup, onda je f uniformno neprekidna na K.*

Dokaz. Treba pokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $d_Y(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$ za sve $x', x'' \in K$ za koje je $d_X(x', x'') < \delta$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Zbog neprekidnosti preslikavanja f za svaki $x \in K$ postoji realan broj $\delta_x > 0$ takav da je $f(K \cap K_X(x, \delta_x)) \subseteq K_Y(f(x), \varepsilon/2)$. Familija $\{K_X(x, \delta_x) : x \in K\}$ je otvoreni pokrivač kompaktnog skupa K. Neka je $\delta > 0$ njegov Lebesgueov broj (egzistencija Lebesgueova broja je osigurana Teoremom 2.45.). Prema definiciji Lebesgueova broja, za svake dvije točke $x', x'' \in K$ za koje je $\operatorname{diam}\{x', x''\} = d_X(x', x'') < \delta$ postoji točka $x \in K$ takva da je $x', x'' \in K_X(x, \delta_x)$. Zato je

$$d_Y(f(x'), f(x'')) \leq d_Y(f(x'), f(x)) + d_Y(f(x), f(x'')) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

U matematičkoj analizi vrlo važnu klasu uniformno neprekidnih funkcija tvore tzv. Lipschitzove funkcije.

Definicija 3.53. *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Za preslikavanje $f : X \to Y$ kažemo da je* Lipschitzovo *ili da ima* Lipschitzovo svojstvo *ako postoji konstanta (*Lipschitzova konstanta*) $\lambda \geq 0$ takva da za bilo koje dvije točke $x_1, x_2 \in X$ vrijedi*

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda \cdot d_X(x_1, x_2).$$

Primjer 3.54.

(a) *Koordinatne projekcije* $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *imaju Lipschitzovo svojstvo.*

(b) *Svaka derivabilna funkcija* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$*, takva da joj je derivacija* f' *omeđena na* (a, b)*, ima Lipschitzovo svojstvo. U to se lako uvjeriti pomoću Lagrangeova teorema srednje vrijednosti.*

(c) *Svaki linearni operator* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *ima Lipschitzovo svojstvo (vidi Korolar 3.57.)*

Teorem 3.55. *Neka je* $f : X \to Y$ *Lipschitzovo preslikavanje metričkih prostora. Tada je* f *uniformno neprekidna.*

Dokaz. Ako je $\lambda = 0$, onda je f konstanta pa tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da je $\lambda > 0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Za δ uzmimo bilo koji realan broj takav da je $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{\lambda}$. Tada za sve $x', x'' \in X$ takve da je $d_X(x', x'') < \delta$ vrijedi

$$d_Y(f(x'), f(x'')) \leq \lambda d_X(x', x'') < \lambda\delta < \varepsilon,$$

pa je f uniformno neprekidna na X. □

Svaki linearni operator $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ima Lipschitzovo svojstvo. Za dokaz ove tvrdnje treba nam sljedeća lema, koju ćemo koristiti i kod diferencijabilnosti.

Lema 3.56. *Svaki linearni operator* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *je* ograničen *u smislu da postoji realan broj* $\lambda \geq 0$ *takav da je*

$$\|A(\mathbf{x})\| \leq \lambda \cdot \|\mathbf{x}\|, \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu nejednakosti (3.9). Neka je $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ standardna baza u $\mathbf{R}^n$. Stavimo

$$M := n \max\{\|A(\mathbf{e}_i)\| : i = 1, \ldots, n\}.$$

Tada za svaki vektor $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\begin{aligned} \|A(\mathbf{x})\| &= \|A(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i)\| = \|\sum_{i=1}^n x_i A(\mathbf{e}_i)\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|A(\mathbf{e}_i)\| \\ &\leq \frac{M}{n} \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \frac{M}{n} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}\| = M\|\mathbf{x}\| \end{aligned}$$

□

Teorem 3.57. *Svaki linearni operator* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *ima Lipschitzovo svojstvo.*

Dokaz. Neka je $\lambda \geq 0$ takav da je $\|A(\mathbf{x})\| \leq \lambda \cdot \|\mathbf{x}\|$ za svaki $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Tada za svake dvije točke $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$d(A(\mathbf{x}'), A(\mathbf{x}'')) = \|A(\mathbf{x}') - A(\mathbf{x}'')\| = \|A(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')\| \leq \lambda\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\| = \lambda d(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$$

□

Korolar 3.58. *Svaki linearni operator $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je uniformno neprekidan.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz Teorema 3.57. i Teorema 3.55.. □

Definicija 3.59. *Lipschitzovu funkcija sa konstantom $\lambda < 1$ zovemo* kontrakcija.

Za točku $x^\star \in X$ kažemo da je fiksna za preslikavanje $f : X \to X$ ako je $f(x^\star) = x^\star$. Sljedeći teorem je ključan za dokaz mnogih važnih rezultata.

Teorem 3.60. (Banachov teorem o fiksnoj točki) *Neka je (X, d) potpun metrički prostor, a $f : X \to X$ kontrakcija sa konstantom λ. Tada vrijedi:*

(i) Preslikavanje f ima jednu jedinu fiksnu točku $x^\star \in X$.

(ii) Za svaku točku $x_1 \in X$ niz (x_k) definiran sa

$$x_k := f(x_{k-1}), \quad k \geq 2$$

konvergira prema jedinstvenoj fiksnoj točki $x^\star$.

(iii) Vrijedi

$$d(x_k, x^\star) \leq \frac{\lambda^{k-1}}{1-\lambda} d(x_1, f(x_1)).$$

Dokaz. Odaberimo proizvoljnu točku $x_1 \in X$, a zatim definirajmo indukcijom niz (x_k) iz X na sljedeći način

$$x_k := f(x_{k-1}), \quad k \geq 2.$$

Pokažimo da je (x_k) Cauchyjev niz. Teleskopiranjem se dobiva

$$d(x_k, x_{k+1}) = d(f(x_{k-1}), f(x_k)) \leq \lambda d(x_{k-1}, x_k) \leq \ldots \leq \lambda^{k-1} d(x_1, x_2).$$

Zato za svaki $j \in \mathbb{N}$ pomoću nejednakosti trokuta zaključujemo:

$$\begin{aligned} d(x_k, x_{k+j}) &\leq d(x_k, x_{k+1}) + d(x_{k+1}, x_{k+2}) + \ldots + d(x_{k+j-1}, x_{k+j}) \\ &\leq \lambda^{k-1} d(x_1, x_2) + \lambda^k d(x_1, x_2) + \ldots + \lambda^{k+j-2} d(x_1, x_2) \\ &= \lambda^{k-1}(1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots + \lambda^{j-1})\, d(x_1, x_2) \\ &= \lambda^{k-1} \frac{1-\lambda^j}{1-\lambda}\, d(x_1, x_2) \\ &\leq \frac{\lambda^{k-1}}{1-\lambda}\, d(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Kako je $0 \leq \lambda < 1$, to je $\lim_{k\to\infty} \lambda^{k-1} = 0$. Zato za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{\lambda^{k-1}}{1-\lambda}\, d(x_1, x_2) < \varepsilon$ za svaki $k \geq k_0$. Zbog (3.10) tada je $d(x_k, x_{k+j}) < \varepsilon$ za svaki $k \geq k_0$, tj. niz (x_k) je Cauchyjev.

Zbog potpunosti prostora (X, d) Cauchyjev niz (x_k) konvergira prema nekoj točki $x^\star \in X$. Nadalje, vrijedi

$$\begin{aligned} d(x^\star, f(x^\star)) &\leq d(x^\star, x_k) + d(x_k, f(x^\star)) = d(x^\star, x_k) + d(f(x_{k-1}), f(x^\star)) \\ &\leq d(x^\star, x_k) + \lambda \cdot d(x_{k-1}, x^\star) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Kako $x_k \to x^\star$, to $d(x^\star, x_k) \to 0$ i $d(x_{k-1}, x^\star) \to 0$, pa iz (3.11) dobivamo

$$d(x^\star, f(x^\star)) = 0,$$

tj. $x^\star$ je fiksna točka preslikavanja f.

Pokažimo jedinstvenost fiksne točke. Pretpostavimo da je i $z \in X$ fiksna točka, tj. da je $f(z) = z$. Tada bismo imali

$$d(x^\star, z) = d(f(x^\star), f(z)) \leq \lambda \cdot d(x^\star, z).$$

Kako je $0 \leq \lambda < 1$, gornja jednakost povlači da je $d(x^\star, z) = 0$, tj. $z = x^\star$.

Graničnim prijelazom $j \to \infty$ iz (3.10) dobivamo

$$d(x_k, x^\star) \leq \frac{\lambda^{k-1}}{1-\lambda} d(x_1, x_2)$$

□

Primjedba 3.61. *Ako je (X, d) potpun metrički prostor, a $f : X \to X$ preslikavanje sa svojstvom*

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \qquad \text{za sve } x, y \in X,\ x \neq y, \tag{3.12}$$

onda općenito f ne mora imati fiksnu točku. Evo primjera: Skup $X = [1, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ je zatvoren, pa je potpun metrički prostor (Teorem 2.32.). Pokažimo da funkcija $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ zadana formulom $f(x) = x + \frac{1}{1+x}$ ima svojstvo (3.12). Neka su $x, y \in [0, \infty)$ i $x \neq y$. Bez smanjenja općenitosti, neka je $x < y$. Prema Lagrangeovom teoremu o srednjoj vrijednosti postoji $c \in (x, y)$ takav da je

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x). \tag{3.13}$$

Kako za svaki $c \in (0, \infty)$ vrijedi $|f'(c)| = \left|1 - \frac{1}{(1+c)^2}\right| < 1$, iz (3.13) dobivamo $|f(x) - f(y)| < |x - y|$. Dakle, f ima svojstvo (3.12). Budući da je $f(x) > x$ za svaki $x \in [0, \infty)$, ne postoji fiksna točka.

Primjedba 3.62. *Pojam fiksne točke za preslikavanje $f : X \to X$ ne ovisi o metrici d na X. Stoga se može dogoditi da preslikavanje f nije kontrakcija u zadanoj metrici d, ali da je kontrakcija u nekoj drugoj metrici d'. Ako je (X, d') potpun metrički prostor, onda će f imati fiksnu točku.*

3.6. Limes funkcije

Limes funkcije se definira samo u točkama gomilanja domene. Intuitivno govoreći, limes funkcije f u točki x_0 je vrijednost kojoj je $f(x)$ sve "bliže" kada je x sve "bliži" točki x_0. Preciznije:

Definicija 3.63. *Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor, $(Y, \mathcal{V})$ Hausdorffov prostor, $D \subseteq X$, $x_0 \in D'$ točka gomilanja skupa D i $f : D \to Y$ preslikavanje. Za točku $L \in Y$ kažemo da je* limes *ili* granična vrijednost preslikavanja *f* u točki *x_0 i pišemo $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$ ako za svaku otvorenu okolinu V točke L u Y postoji otvorena okolina U točke x_0 u X takva da je*

$$f(U \cap (D \backslash \{x_0\})) \subseteq V.$$

Primjedba 3.64. *Važno je uočiti da limes L funkcije f u točki $x_0 \in D'$ ne ovisi o tome da li je funkcija f definirana u točki x_0 ili nije. Zato, ako je $g : D \cup \{x_0\} \to Y$ neka druga funkcija definirana formulom*

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ako je } x \in D \backslash \{x_0\} \\ y_0, & \text{ako je } x = x_0, \end{cases}$$

gdje je $y_0 \in Y$ bilo koja točka, onda će f imati limes L u točki x_0 onda i samo onda ako g u točki x_0 ima limes L.

Neposredno iz definicije slijedi sljedeća činjenica:

Propozicija 3.65. *Neka je $S \subseteq D$. Ako funkcija $f : D \to Y$ ima limes u točki $x_0 \in S'$, onda i restrikcija $f_{|S} : S \to Y$ ima limes u x_0 i pri tome su ta dva limesa jednaka, tj. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f_{|S}(x)$.*

Teorem 3.66. *Limes funkcije je jedinstven ako postoji.*

Dokaz. Neka je $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Treba pokazati da ni jedna druga točka $L' \in Y \backslash \{L\}$ ne može biti limes funkcije f u točki x_0. U tu svrhu odaberimo disjunktne otvorene okoline V_1 točke L i V_2 točke L'. Budući da je Y Hausdorffov prostor, takve okoline postoje.

Kako je L limes funkcije f u točki x_0, po definiciji postoji otvorena okolina U_1 točke x_0 u X takva da je

$$f(U_1 \cap (D \backslash \{x_0\})) \subseteq V_1.$$

Neka je U_2 bilo koja otvorena okolina točke x_0 u X. Tvrdnja teorema će biti dokazana ako pokažemo da $f(U_2 \cap (D \backslash \{x_0\}))$ nije sadržano u V_2. Zaista, neka je $U := U_1 \cap U_2$. Kako je U otvorena okolina točke x_0, a x_0 točka gomilanja skupa D, postoji točka $x \in U \cap (D \backslash \{x_0\})$. Kako je $x \in U \subseteq U_1$, to je $f(x) \in V_1$, a kako je $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $f(x) \notin V_2$. $\square$

Teorem 3.67. *Neka je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor, $(Y,\mathcal{V})$ Hausdorffov prostor i $D \subseteq X$. Funkcija $f : D \to Y$ je neprekidna u točki $x_0 \in D$ onda i samo onda ako ona u x_0 ima limes i on je jednak $f(x_0)$.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Neka je f neprekidna u točki $x_0 \in D$. Tada za svaku otvorenu okolinu $V \subseteq Y$ točke $f(x_0)$ postoji otvorena okolina $U \subseteq X$ točke x_0 takva da je $f(U \cap D) \subseteq V$. Tada je pogotovo

$$f(U \cap (D \backslash \{x_0\})) \subseteq V,$$

odakle iz definicije slijedi da f ima limes u točki x_0 i da je on jednak $f(x_0)$.

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da je $f(x_0)$ limes funkcije f u točki x_0. Neka je $V \subseteq Y$ bilo koja okolina točke $f(x_0)$. Treba pokazati da postoji otvorena okolina $U \subseteq X$ točke x_0 takva da je $f(U \cap D) \subseteq V$.

Prema definiciji limesa postoji otvorena okolina $U \subseteq X$ točke x_0 takva da je $f(U \cap (D \backslash \{x_0\})) \subseteq V$. Kako je $f(x_0) \in V$, to je $f(U \cap D) \subseteq V$. □

Primjedba 3.68. *Pretpostavimo da $f : D \to Y$ ima limes u točki $x_0 \in D'$. Definirajmo funkciju $\tilde{f} : D \cup \{x_0\} \to Y$ formulom*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ako je } x \in D \backslash \{x_0\} \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x), & \text{ako je } x = x_0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Prema Primjedbi 3.64. je $\lim\limits_{x \to x_0} \tilde{f}(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \tilde{f}(x_0)$, pa je prema teoremu 3.67. $\tilde{f}$ neprekidna u točki x_0. Funkciju $\tilde{f}$ zovemo proširenje funkcije f po neprekidnosti u točki x_0.

Teorem 3.69. *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori, $D \subseteq X$, $x_0 \in D'$ točka gomilanja skupa D i $f : D \to Y$ funkcija. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

(ii) Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $d_Y(f(x), L) < \varepsilon$ za svaki $x \in D \backslash \{x_0\}$ za koji je $d_X(x, x_0) < \delta$, tj.

$$f\big(K_X(x_0, \delta) \cap (D \backslash \{x_0\})\big) \subseteq K_Y(L, \varepsilon).$$

(iii) Za svaki niz (x_k) u $D \backslash \{x_0\}$ koji konvergira prema x_0, niz funkcijskih vrijednosti $\big(f(x_k)\big)$ konvergira prema L.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je $K_Y(L, \varepsilon)$ otvorena okolina točke L, prema definiciji limesa postoji otvorena okolina $U \subseteq X$ oko točke x_0 takva da je $f(U \cap (D \backslash \{x_0\})) \subseteq K_Y(L, \varepsilon)$. Prema definiciji otvorenog skupa postoji $\delta > 0$ takav da je $K_X(x_0, \delta) \subseteq U$. Zato je $f\big(K_X(x_0, \delta) \cap (D \backslash \{x_0\})\big) \subseteq K_Y(L, \varepsilon)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Neka je (x_k) niz u $D \backslash \{x_0\}$ koji konvergira prema x_0. Treba pokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $f(x_k) \in K_Y(L, \varepsilon)$ za svaki $k \geq k_0$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Po pretpostavci postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f\big(K_X(x_0,\delta)\cap(D\backslash\{x_0\})\big)\subseteq K_Y(L,\varepsilon).$$

Kako $x_k \to x_0$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_k \in K_X(x_0,\delta)\cap(D\backslash\{x_0\})$ za svaki $k \geq k_0$. Zato je $f(x_k)\in K_Y(L,\varepsilon)$ za svaki $k \geq k_0$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Neka je $V \subseteq Y$ otvorena okolina od L. Dovoljno je pokazati da postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je $f(K_X(x_0,\delta)\cap(D\backslash\{x_0\}))\subseteq V$. Kada ne bi bilo tako, za svaki $\delta > 0$ bi postojala točka $x_\delta \in D\backslash\{x_0\}$ takva da je $d_X(x_\delta,x_0) < \delta$ i $f(x_\delta)\notin V$. Specijalno, stavljajući $\delta = \frac{1}{k}$, $k\in\mathbb{N}$, dolazimo do niza (x_k) u $D\backslash\{x_0\}$ takvog da je $d_X(x_k,x_0) < \frac{1}{k}$ i $f(x_k)\notin V$. Tako dobiveni niz (x_k) konvergira prema x_0 (jer $d_X(x_k,x_0)\to 0$), ali odgovarajući niz funkcijskih vrijednosti $(f(x_k))$ ne konvergira prema L. To bi bila kontradikcija s pretpostavkom (iii). $\square$

Primjer 3.70. *Pokažimo da funkcija*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & \textit{ako je } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \textit{ako je } (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

nema limes u točki $(0,0)$.

Za restrikciju funkcije f na pravac $y = kx$ nalazimo

$$\lim_{(x,kx)\to(0,0)} f(x,kx)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

Kako dobivena vrijednost ovisi o broju k, naša funkcija f nema limes u točki $(0,0)$. *Naime, kada bi funkcija f imala limes L u točki* $(0,0)$ *onda bi i svaka restrikcija na pravcac $y = kx$, $k \neq 0$, za limes u točki* 0 *imala također L, bez obzira koliki je k.*

Sljedeći teorem nam govori da se problem računanja limesa vektorske funkcije više varijabli svodi na računanje limesa realnih funkcija više varijabli.

Teorem 3.71. *Neka je $D\subseteq\mathbb{R}^n$, i $f=(f_1,\dots,f_m): D\to\mathbb{R}^m$ funkcija. Funkcija f u točki $x_0\in D'$ ima limes $L=(l_1,\dots,l_m)\in\mathbb{R}^m$ onda i samo onda ako za svaki $i=1,\dots,m$ koordinatna funkcija $f_i: D\to\mathbb{R}$ u točki x_0 ima limes l_i.*

Dokaz. Dovoljno je oponašati dokaz teorema 3.15. uz neznatne modifikacije. $\square$

Primjer 3.72. *Neka je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ zadana sa $f(x)=\left(x^2-1,\frac{\sin x}{x}\right)$. Kako je $\lim_{x\to 0} f_1(x)=\lim_{x\to 0}(x^2-1)=0$ i $\lim_{x\to 0} f_2(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, to je $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x^2-1,\frac{\sin x}{x}\right)=(0,1)$.*

Lako je modificirati dokaz teorema 3.16. da bi se dokazale sljedeće tvrdnje:

Teorem 3.73. *Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ funkcija, $\lambda \in \mathbb{R}$ i $x_0 \in D'$ točka gomilanja skupa D. Ako f i g imaju limes u točki x_0, onda i funkcije $f+g, \lambda f, f \cdot g, |f| : D \to \mathbb{R}$ imaju limes u x_0 i pri tome vrijedi:*

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} \Big(\lambda f(x)\Big) = \lambda \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

(iv) Ako je $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, *onda postoji otvoren skup $U \subseteq \mathbb{R}^n$ takav da je funkcija $\frac{f}{g}$ definirana na $U \cap (D \backslash \{x_0\})$ i vrijedi*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$$

(v) $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |\lim\limits_{x \to x_0} f(x)|$.

□

Primjedba 3.74. *Zbog teorema 3.71. tvrdnje (i)-(ii) vrijede i za vektorske funkcije $f, g : D \to \mathbb{R}^m$. Nadalje, tvrdnja (iii) vrijedi i za vektorske funkcije ako se za produkt uzme skalarni produkt. Zbog neprekidnosti norme tvrdnja (v) vrijedi i za vektorske funkcije ako se apsolutna vrijednost zamijeni s normom.*

Limes realne funkcije više realnih varijabli naziva se *višestruki limes*. Treba ih razlikovati od tzv. uzastopnih limesa. Primjerice, kod funkcija dvije varijable imamo sljedeća dva uzastopna limesa: $\lim\limits_{x \to x_0} \big(\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)\big)$ i $\lim\limits_{y \to y_0} \big(\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)\big)$. Svaki od ovih uzastopnih limesa sastoji se od dva limesa funkcije jedne varijable. U općem slučaju uzastopni limesi su međusobno različiti i razlikuju se od limesa $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$. Čak više, egzistencija dvaju od tih limesa općenito ne osigurava egzistenciju trećeg. Ipak, u slučaju kada postoji limes $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$, može se pokazati da tada postoje i oba uzastopna limesa te da su oni jednaki limesu $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$.

Primjer 3.75. *Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, y) : x + y = 0\} \to \mathbb{R}$ je zadana formulom*

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}.$$

Za njezine uzastopne limese u točki (x_0, y_0) *dobivamo:*

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big) = \lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\Big) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$
$$\lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big) = \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\Big) = \lim_{x\to 0}(-1) = -1.$$

Kako su uzastopni limesi različiti, funkcija f *nema limes u točki* $(0,0)$.

Zadaci

1. Dokazati da je u diskretnom topološkom prostoru X svako preslikavanje $f : X \to X$ neprekidno.

2. Neka $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ima svojstvo
$$\lim_{h\to 0}[f(x+h) - f(x-h)] = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Da li je f neprekidna na $\mathbb{R}$.

   (Uputa: Općenito ne. Funkcija $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Z} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\end{cases}$ ima navedeno svojstvo, ali je prekidna u svakoj točki iz skupa $\mathbb{Z}$.)

3. Neka su $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirane formulama
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^6}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
(a) Pokažite da je f omeđena na $\mathbb{R}^2$, ali nije neprekidna u točki $(0,0)$. (b) Pokažite da je g neomeđena na svakoj okolini točke $(0,0)$, pa stoga zbog leme 3.18. nije neprekidna u točki $(0,0)$. (c) Pokažite da su restrikcije funkcija f i g na bilo koji pravac neprekidne funkcije.

   (Uputa: (a) Kako je $x^2 + y^4 \geq 2xy^2$, to je $f(x,y) \leq 2$ za sve $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, što nam govori da je f omeđena na $\mathbb{R}^2$. Niz $\left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right)$ konvergira prema $(0,0)$, ali $f\left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right) \to \frac{1}{2} \neq f(0,0) = 0$, pa f nije neprekidna u točki $(0,0)$. (b) Niz $(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{k^3}, \frac{1}{k}\right)$ konvergira prema $(0,0)$. Kako je $g(x_k, y_k) = \frac{k}{2}$, g je neomeđena na svakoj okolini točke $(0,0)$. (c) Neka je pravac p pravac u ravnini. (c1) Pretpostavimo da je pravac p zadan jednadžbom $x = c$. Ako je $c \neq 0$, onda je $f_{|p}(x,y) = cy^2/(c^2+y^4)$, $g_{|p}(x,y) = cy^2/(c^2+y^6)$. Kako su $y \mapsto cy^2/(c^2+y^4)$, $y \mapsto cy^2/(c^2+y^6)$ neprekidne funkcije na $\mathbb{R}$, restrikcije $f_{|p}$ i $g_{|p}$ su neprekidne na p. Ako je $c = 0$, onda je $f_{|p}(x,y) = 0$, $g_{|p}(x,y) = 0$. (c2) Pretpostavimo da je pravac p zadan jednadžbom $y = ax+b$. Ako je $b \neq 0$, onda pravac p ne prolazi točkom $(0,0)$ pa je $f_{|p}(x,y) = x(ax+b)^2/(x^2+(ax+b)^4)$, $g_{|p}(x,y) = x(ax+b)^2/(x^2+(ax+b)^6)$. Funkcije $x \mapsto x(ax+b)^2/(x^2+(ax+b)^4)$,

$x \mapsto x(ax+b)^2/(x^2+(ax+b)^6)$ su neprekidne na $\mathbb{R}$, pa su zato restrikcije $f_{|p}$ i $g_{|p}$ neprekidne na p. Ako je $b=0$, onda je

$$f_{|p}(x,y) = \begin{cases} \frac{a^2x}{1+a^4x^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g_{|p}(x,y) = \begin{cases} \frac{a^2x}{1+a^6x^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Lako je pokazati da za svaki niz (x_k, ax_k) koji konvergira prema (x_0, ax_0) vrijedi $f_{|p}(x_k, y_k) \to f_{|p}(x_0, ax_0)$ i $f_{|p}(x_k, y_k) \to g_{|p}(x_0, ax_0)$. Prema Heineovoj karakterizaciji neprekidnosti restrikcije $f_{|p}$ i $g_{|p}$ su neprekidne na p.)

4. Pokažite da $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ako je } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ gdje su } p \neq 0 \text{ i } q \text{ relativno prosti brojevi} \\ 1, & \text{ako je } x = 0 \\ 0, & \text{ako je } x \text{ iracionalan broj,} \end{cases}$$

ima prekid u svakoj racionalnoj točki, te da je neprekidna u svakoj iracionalnoj točki.

(Uputa: Ako je $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, gdje su $p \neq 0$ i q relativno prosti brojevi, onda je $f(x_0) = \frac{1}{q}$. Odaberimo $\varepsilon > 0$ takav da je $0 < \frac{1}{q} - \varepsilon$. Za svaki $\delta > 0$ postoji iracionalan broj $x_\delta \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, pa zato $f(x_\delta) = 0$ ne leži u intervalu $\left(\frac{1}{q} - \varepsilon, \frac{1}{q} + \varepsilon\right)$. Preostaje pokazati da je f neprekidna u svakoj iracionalnoj točki x_0. Neka je $\varepsilon > 0$. Uočimo da postoji konačno mnogo racionalnih brojeva $p/q \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$ takvih da je $1/q \geq \varepsilon$. Odaberimo dovoljno malen $\delta > 0$ takav da $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ne sadrži ni jedan takav racionalan broj. Tada je $f(x) = 0$ za svaki $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.)

5. Pokažite da neprekidna funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ne može biti injekcija.

(Uputa: Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je neprekidna i svaka njezina restrikcija. Odaberimo bilo koje dvije točke $T_1, T_2 \in \mathbb{R}^2$, $T_1 \neq T_2$. Ako je $f(T_1) = f(T_2)$, tvrdnja je dokazana. Neka je nadalje $f(T_1) \neq f(T_2)$. Sa f_1 označimo restrikciju funkcije f na segment $[T_1, T_2] \subseteq \mathbb{R}^2$, tj. $f_1 = f_{|[T_1,T_2]}$. Na tu restrikciju možemo gledati kao na funkciju jedne realne varijable zadanu formulom $f_1(t) = f(T_1 + t(T_2 - T_1))$, $t \in [0,1]$. Prisjetimo se da neprekidna funkcija preslikava segment na segment (Korolar 3.33.). Neka je

$$[a,b] := f_1([0,1]) = f(\{T_1 + t(T_2 - T_1) : t \in [0,1]\}) \subseteq \mathbb{R},$$

$$c_0 := \frac{1}{2}[f_1(0) + f_1(1)] = \frac{1}{2}[f(T_1) + f(T_2)] \in (a,b).$$

Tada postoji $t_0 \in [0,1]$ takav da je $f_1(t_0) = f(T_1 + t_0(T_2 - T_1)) = c_0$. Kako je $f_1(0) \neq c_0$ i $f_1(1) \neq c_0$, to je $t_0 \in (0,1)$. Neka je $T_0 = T_1 + t_0(T_2 - T_1)$. Dakle, $f_1(t_0) = f(T_0) = c_0$. Sada odaberimo bilo koju točku $T_3 \in \mathbb{R}^2$ koja se nalazi izvan pravca koji prolazi točkama T_1 i T_2. Ako je $f(T_3) = f(T_0)$, funkcija f nije injekcija i dokaz je gotov. Stoga nadalje pretpostavljamo da je $f(T_3) \neq f(T_0)$. Neka je $f_2 := f_{|[T_0,T_3]}$ restrikcija funkcije f na segment $[T_0, T_3]$. Segment

$$[A, B] := f_2([0, 1]) = f(\{T_0 + \lambda(T_3 - T_0) : \lambda \in [0, 1]\}) \subseteq \mathbb{R}$$

sadrži točku c_0. Kako je $c_0 \in (a, b) \cap [A, B]$, presjek $[a, b] \cap [A, B]$ je pravi segment. Neka je $c_1 \in [a, b] \cap [A, B]$ bilo koja točka različita od c_0. Tada postoje $t_1 \in (0, 1)$ i $\lambda_1 \in (0, 1]$ takvi da je $c_1 = f_1(t_1) = f_2(\lambda_1)$, tj. $c_1 = f(T_1 + t_1(T_2 - T_1)) = f(T_0 + \lambda_1(T_3 - T_0)$. Kako je $T_1 + t_1(T_2 - T_1) \neq T_0 + \lambda_1(T_3 - T_0)$, funkcija f nije injekcija.)

6. Pokažite da svaka neprekidna funkcija $f : [a, b] \to [a, b]$ ima fiksnu točku.

   (Uputa: Neka je $g(x) = f(x) - x$. Treba pokazati da postoji $x \in [a, b]$ takav da je $g(x) = 0$. Ako je $g(a) = 0$ ili $g(b) = 0$, dokaz je gotov. Zato pretpostavimo da je $g(a) \neq 0$ i $g(b) \neq 0$. Tada je $g(a) = f(a) - a > 0$ i $g(b) = f(b) - b < 0$. Kako neprekidna funkcija preslikava segment na segment (Korolar 3.33.), mora postojati točka $x \in [a, b]$ takva da je $g(x) = 0$.)

7. Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori, $D \subseteq X$ i $f : D \to Y$ funkcija. Pokažite da je f neprekidna u točki $x_0 \in D$ onda i samo onda ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $K_X(x_0, \delta) \cap D \subseteq f^{-1}\Big(K_Y(f(x_0), \varepsilon)\Big)$.

8. Dokažite da su skupovi $(a, b]$ i $[a, b)$ povezani.

   (Uputa: Uočite da je $(a, b] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(a, b + 1/n)$, $[a, b) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(a - 1/n, b)$ i primjenite teorem 3.25.)

9. Neka je $A \subseteq X$ povezan skup u prostoru X. Dokažite da je povezan i svaki skup $B \subseteq X$ za koji je $A \subseteq B \subseteq \operatorname{Cl} A$.

   (Uputa: Neka su F_1 i F_2 disjunktni i zatvoreni u X skupovi takvi da je $B = (F_1 \cap B) \cup (F_2 \cap B)$. Treba pokazati da je $F_1 \cap B = \emptyset$ ili $F_2 \cap B = \emptyset$. Kako je $A \subseteq B$, zbog povezanosti skupa A je ili $A \subseteq F_1$ ili $A \subseteq F_2$. Ako je $A \subseteq F_1$, onda je $B \subseteq \operatorname{Cl} A \cap B \subseteq F_1 \cap B$, pa je $F_2 \cap B = \emptyset$.)

10. Pokažite da su segmenti $A = [a, b]$ i $I = [0, 1]$ homeomorfni.

    (Uputa: Za homeomorfizam se može uzeti funkcija $f : A \to I$ zadana sa $f(x) = a + (b - a)x$.)

11. Pokažite primjerom da biti Cauchyjev niz nije topološko svojstvo.

    (Uputa: Neka je $X = (0, \infty)$. Funkcija $f : X \to X$ zadana sa $f(x) = \frac{1}{x}$ je homeomorfizam. Niz $x_k = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$ je Cauchyjev, a niz $f(x_k) = k$ nije Cauchyjev.)

12. Pokažite da uniformno neprekidno preslikavanje "čuva" Cauchyjeve nizove. Preciznije, ako je $f : X \to Y$ uniformno neprekidno preslikavanje metričkih prostora, a (x_k) Cauchyjev niz u X, onda je $(f(x_k))$ Cauchyjev niz u Y.

(Uputa: Neka je (x_k) Cauchyjev niz u X, a $\varepsilon > 0$. Zbog uniformne neprekidnosti postoji $\delta > 0$ takav da je $d_Y(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$ za sve $x', x'' \in X$ za koje je $d_X(x', x'') < \delta$. Niz (x_k) je Cauchyjev, pa zato postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da je $d_X(x_m, x_k) < \delta$ za sve $k, m \geq k_0$. Zato za sve $k, m \geq k_0$ vrijedi $d_Y(f(x_m), f(x_k)) < \varepsilon$.)

13. Neka je $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ zadana formulom $f(x) = \frac{1}{x^2}$. (a) Pokažite da je f uniformno neprekidna na svakom skupu $[a, \infty)$, $a > 0$. (b) Pokažite da f nije uniformno neprekidna na intervalu $(0, 2)$.

   (Uputa: (a) Neka je zadan $\varepsilon > 0$. Kako je $|f(x) - f(y)| = \left|\frac{x+y}{x^2y^2}\right| \cdot |x - y|$, te kako za sve $x, y \geq a > 0$ vrijedi
   $$\left|\frac{x+y}{x^2y^2}\right| \leq \left|\frac{1}{xy^2}\right| + \left|\frac{1}{x^2y}\right| \leq \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^3} = \frac{2}{a^3},$$
   za $\delta > 0$ možemo uyeti bilo koji realan broj manji od $\varepsilon a^3/2$. (b) Niz $x_k := \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, je Cauchyjev niz iz $(0, 2)$. Kako je $|f(x_{2k}) - f(x_k)| = 3k^2 \geq 3$, $k \in \mathbb{N}$, niz $(f(x_k))$ nije Cauchyjev, pa zato f nije uniformno neprekidna na intervalu $(0, 2)$ (vidi 12. zadatak).

14. Pokažite da je funkcija sin Lipschitzova s konstantom $\lambda = 1$.

   (Uputa: Neka su $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$. Prema Lagrangeovu teoremu srednje vrijednosti postoji $\vartheta \in (0, 1)$ takav da je $\sin x - \sin y = \cos(x + \vartheta(y - x)) \cdot (x - y)$, odakle se dobiva $|\sin x - \sin y| \leq 1 \cdot |x - y|$.)

15. Neka je $A \subseteq X$ podskup metričkog prostora X, a $\varrho_A : X \to \mathbb{R}$ funkcija koja točki $x \in X$ pridružuje njezinu udaljenost od skupa A, tj. $\varrho_A(x) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$. Pokažite da je
   $$|\varrho_A(x) - \varrho_A(y)| \leq d(x, y), \qquad \forall\, x, y \in X.$$
   To će značiti da je ϱ_A Lipschitzova funkcija s konstantom $\lambda = 1$, pa je uniformno neprekidna.

   (Uputa: Za sve $x, y \in X$ i za svaki $a \in A$ je $\varrho_A(x) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$, odakle slijedi $\varrho_A(x) \leq d(x, y) + \varrho_A(y)$. Slično se pokaže da je $\varrho_A(y) \leq d(x, y) + \varrho_A(x)$.)

16. Neka je X topološki, a Y metrički prostor. Pretpostavimo da niz (f_k) neprekidnih funkcija $f_k : X \to Y$ uniformno konvergira prema funkciji $f : X \to Y$. Pokažite da je f neprekidna funkcija.

   (Uputa: Neka su $x_0 \in X$ i $\varepsilon > 0$. Kako (f_k) uniformno konvergira prema f, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(f_k(x), f(x)) < \varepsilon/3$ za sve $k \geq k_0$ i za sve $x \in X$. Nadalje, kako je f_k neprekidna u točki x_0, postoji otvorena okolina U točke x_0 u X takva da je $f_k(U) \subseteq K(f(x_0), \varepsilon/3)$. Zato za svaki $x \in U$ vrijedi
   $$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &\leq d(f(x), f_k(x)) + d(f_k(x), f_k(x_0)) + d(f_k(x_0), f(x_0)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Time je pokazano da je $f(U) \subseteq K(f(x_0), \varepsilon)$.)

17. Zadan je niz funkcija $f_k(x) = \frac{x}{1+kx^2}$, $k \in \mathbb{R}$, sa $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$. (a) Pronađite granične funkcije $f := \lim_{k\to\infty} f_k$ i $g := \lim_{k\to\infty} f_k'$. Pokažite da $f'(x)$ postoji za svaki $x \in \mathbb{R}$, ali da je $f'(0) \neq g(0)$. Za koje vrijednosti varijable x je $f'(x) = g(x)$? (b) Pokažite da niz funkcija (f_k) uniformno konvergira prema funkciji f. (c) Da li niz funkcija (f_k') uniformno konvergira prema funkciji g na $\mathbb{R}$? (d) Pokažite da niz funkcija (f_k') uniformno konvergira prema funkciji g na svakom segmentu $[a, b]$ koji ne sadrži 0.

(Uputa: (a) $f = 0$. Kako je $f_k'(x) = \frac{1-kx^2}{(1+kx^2)^2}$, dobiva se

$$g(x) = \lim_{k\to\infty} f_k'(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

(b) Iz nejednakosti $\frac{1+kx^2}{2} \geq \sqrt{k}|x|$ slijedi $\left|\frac{x}{1+kx^2}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$, pomoću čega je lako dokazati uniformnu konvergenciju. (c) Ne. Kada bi konvergencija bila uniformna, budući da su sve funkcije f_k' neprekidne na $\mathbb{R}$, tada bi bila neprekidna i granična funkcija g (vidi 16. zadatak). (d) Tvrdnju je lako dokazati pomoću nejednakosti $\left|\frac{1-kx^2}{(1+kx^2)^2}\right| \leq \frac{1}{1+kx^2} \leq \frac{1}{ka^2}$.)

18. Pokažite da se funkcija $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ zadana sa $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ne može neprekidno proširiti do funkcije definirane na cijelom skupu $\mathbb{R}$.

(Uputa: Nizovi $x_k = \frac{1}{2k\pi}$, $k \in \mathbb{N}$, i $y_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, $k \in \mathbb{N}$, konvergiraju prema 0. Kako $f(x_k) = 0 \to 0$, a $f(y_n) = 1 \to 1$, funkciju f nije moguće proširiti po neprekidnosti u točki 0 (vidi Heineovu karakterizaciju neprekidnosti).)

19. Dokažite: (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0$. (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|\cdot|y|}{|x|+|y|} = 0$.

(Uputa: (a) Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo $\delta < \varepsilon/2$. Kako je $|f(x,y)| \leq |x|+|y| \leq 2\|(x,y)\|$, za svaki $(x,y) \in K(\mathbf{0}, \delta) \subseteq \mathbb{R}^2$ će biti $|f(x,y) - 0| \leq 2\|(x,y)\| < 2\delta < \varepsilon$. (b) Neka je $\varepsilon > 0$. Nejednakost $|f(x,y) - 0| = \frac{|x|\cdot|y|}{|x|+|y|} \leq \frac{1}{2}|x|\cdot|y| \leq \frac{1}{4}(|x|^2+|y|^2)$ nam govori da za $\delta > 0$ možemo uzeti bilo koji realan broj manji od $2\sqrt{\varepsilon}$.)

20. Neka su $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirane formulama

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^4}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^2}{x^2+|y|}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Pokažite da f nema limes u točki $(0,0)$. (b) Pokažite da g ima limes u točki $(0,0)$.

(Uputa: (a) Za restrikciju funkcije f na krivulju $x \mapsto (x^2, \alpha x)$ imamo

$$\lim_{x\to0} f(x^2, \alpha x) = \lim_{x\to0} \frac{1-\alpha^4}{1+\alpha^4} = \frac{1-\alpha^4}{1+\alpha^4}.$$

(b) $|g(x,y)| = \left|\frac{x^4+y^2}{x^2+|y|}\right| \leq \left|\frac{x^4}{x^2+|y|}\right| + \left|\frac{y^2}{x^2+|y|}\right| \leq |x|^2 + |y|$. Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo $\delta > 0$ takav da je $\delta < \min\{\varepsilon/2, 1\}$. Tada za sve $(x,y) \in K((0,0),\delta)$ vrijedi $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta < \min\{\varepsilon/2, 1\}$, pa je zato $|g(x,y) - g(0,0)| \leq |x|^2 + |y| < |x| + |y| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. To znači da je g neprekidna u točki $(0,0)$ i zato je $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0) = 0$.)

21. Realna funkcija je zadana formulom $f(x,y) = \frac{3x-2y}{6x^2+y^2}$. Odrediti gomilišta domene funkcije f i ispitati ima li u njima limes.

(Uputa: Prirodna domena je skup $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)$, a skup gomilišta je čitav $\mathbb{R}^2$. Budući da je kao kvocijent polinoma neprekidna na cijeloj prirodnoj domeni, vrijedi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0), \qquad (x_0,y_0) \neq (0,0).$$

Preostaje ispitati ima li limes u točki $(0,0)$. Neka je (x_k, y_k) niz u $\mathbb{R}^2$ zadan s $x_k = \frac{1}{k}$, $y_k = 0$. Tada je $f(x_k, y_k) = \frac{k}{2} \to \infty$, pa f nema limes u $(0,0)$.)

Literatura

[1] S. Mardešić, *Matematička analiza*, 1. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1979.

[2] Š. Ungar, *Matematička analiza 3*, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 1994.

Sadržaj