1. Topologija na euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$

Euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ je okruženje u kojem ćemo izučavati realnu analizu. Kao skup $\mathbb{R}^n$ se sastoji od svih uređenih n-torki realnih brojeva:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Skup $\mathbb{R}^n$ je snabdjeven strukturom realnog vektorskog prostora. Osim vektorske strukture, za matematičku analizu su važne metrička i iz nje izvedena topološka struktura prostora $\mathbb{R}^n$. Te strukture će nam omogućiti da se mnogi osnovni pojmovi matematičke analize (npr. limes niza, neprekidnost funkcije i limes funkcije) puno jednostavnije definiraju i dalje izučavaju.

1.1. Euklidski prostor $\mathbb{R}^n$

Skup $\mathbb{R}^n$ zajedno sa sljedeće dvije operacije:

(i) *zbrajanje* $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definirano formulom

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

(ii) *množenje realnim brojevima* $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definirano formulom

$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

je realan vektorski prostor. Kratko ga označavamo s $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ (ili kraće: prostoru $\mathbb{R}^n$) uvodi se skalarni produkt kao preslikavanje $(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirano formulom

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) := \sum_{i=1}^{p} x_i y_i.$$

Prostor $\mathbb{R}^n$ s ovako definiranim skalarnim produktom zove se n-dimenzionalni euklidski prostor.

Skalarno množenje u $\mathbb{R}^n$ ima ova svojstva:

(U1) $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) \geq 0$ (pozitivna semidefinitnost)

(U2) $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (pozitivna definitnost)

(U3) $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{y}|\mathbf{x})$ (simetričnost)

(U4) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}|\mathbf{z}) = (\mathbf{x}|\mathbf{z}) + (\mathbf{y}|\mathbf{z})$ (aditivnost u odnosu na prvu varijablu)

(U5) $(\lambda\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ (homogenost u odnosu na prvu varijablu).

1.2. Euklidska norma na $\mathbb{R}^n$

Svakom vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ možemo pridružiti nenegativan realan broj

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})}.$$

Tako definirana funkcija $|| \cdot || : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zove se euklidska norma na $\mathbb{R}^n$ i ima ova svojstva:

(N1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ (pozitivna semidefinitnost)

(N2) $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (pozitivna definitnost)

(N3) $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \, \|\mathbf{x}\|$ (homogenost)

(N4) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (nejednakost trokuta).

Primjedba 1.1. *Lako je provjeriti svojstva (N1) - (N3). Nadalje, nejednakost trokuta možemo dokazati Bunyakovsky-CauchySchwarzove (BCS) nejednakosti:*

$$|(\mathbf{x}|\mathbf{y})| \leq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||, \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako su vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ kolinearni.

BSS nejednaksot se može dokazati na više načina. Jedan jednostavan i vrlo elegantan način je da se pođe od jednakosti:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 - \Big(\sum_{i=1}^n x_y y_i\Big)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (x_i y_j - x_j y_i)^2,$$

koju je lako provjeriti raspisivanjem desne strane. Napravite to!

Gore navedena svojstva euklidske norme uzimaju se za definiciju općeg pojma norme na vektorskom prostoru:

Definicija 1.2. *Neka je $(X, +, \cdot)$ bilo koji realan vektorski prostor.* Norma *na X je svako preslikavanje $|| \cdot || : X \to \mathbb{R}$ koje zadovoljava svojstva (N1)-(N4).*

Primjer 1.3. *Neka je $1 \leq p < \infty$. Definirajmo funkciju $|| \cdot ||_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ formulom:*

$$||\mathbf{x}||_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Lako je pokazati da je $|| \cdot ||_p$ norma na $\mathbb{R}^n$. Nejednakost trokuta nije ništa drugo nego li tzv. nejednakost Minkowskog:

Neka su $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Za $p > 1$ vrijedi

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Ako je $0 < p < 1$, onda vrijedi suprotna nejednakost. U oba slučaja jednakost nastupa onda i samo onda ako su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ proporcionalni vektori (vidi npr. [1])

I funkcija $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadana formulom

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

ima svojstva norme (N1)-(N4), pa je $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ jedan normirani prostor. Štoviše, vrijede nejednakosti

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty.$$

Naime, očito je $|x_i| = \sqrt{x_i^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} = \|\mathbf{x}\|_2$, odakle slijedi prva nejednakost. Druga nejednakost se dobiva ovako:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n (\max_j |x_j|)^2} = \sqrt{n\|\mathbf{x}\|_\infty^2} = \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty.$$

Definicija 1.4. *Neka su $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ norme na vektorskom prostoru $(X, +, \cdot)$. Kažemo da je norma $\|\cdot\|$* ekvivalentna *s normom $\|\cdot\|'$ ako postoje realni brojevi $m, M > 0$ takvi da za svaki $x \in X$ vrijedi*

$$m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|.$$

Lako je pokazati da je ekvivalencija normi relacija ekvivalencije. U primjeru 1.3. smo pokazali da su norme $\|\cdot\|_2$ i $\|\cdot\|_\infty$ ekvivalentne.

Ako u prostoru $\mathbb{R}^n$ ne specificiramo normu, onda uvijek mislimo na euklidsku normu, koju ćemo označavati s $\|\cdot\|$.

1.3. Euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$

Neka je $\|\cdot\|$ euklidska norma na $\mathbb{R}^n$. Preslikavanje $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadano formulom

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$$

zove se euklidska udaljenost ili euklidska metrika na skupu $\mathbb{R}^n$.

Euklidska metrika ima sljedeća svojstva:

(EM1) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$

(EM2) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$

(EM3) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (simetrija)

(EM4) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ (nejednakost trokuta).

Gore navedena svojstva euklidske metrike uzimaju se za definiciju općeg pojma metričkog prostora:

Definicija 1.5. *Neka je X bilo koji neprazan skup.* Metrika *na skupu X je bilo koja funkcija $d : X \times X \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi:*

(M1) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$

(M2) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$

(M3) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$

(M4) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$.

Par (X, d) zovemo metrički prostor.

Primjer 1.6. *Neka je $1 \leq p < \infty$. Definirajmo funkciju $d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ formulom:*

$$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}.$$

Pokazati da je d_p metrika na $\mathbb{R}^n$.

Primjer 1.7. *Neka je $X \neq \emptyset$ bilo koji skup, a $d : X \times X \to \mathbb{R}$ preslikavanje definirano formulom:*

$$d(x, y) := \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Pokazati da je d metrika na X, koja se inače zove diskretna metrika*, a (X, d)* diskretni metrički prostor.

Uputa: Lako je provjeriti da funkcija d ima svojstva (M1) - (M3). Svojstvo (M4) je lako provjeriti ako se posebno razmotre slučajevi $x \neq y$ i $x = y$.

Primjer 1.8. *Neka je $\varphi : X \to \mathbb{R}$ bilo koja nenegativna injekcija. Funkcija $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definirana formulom*

$$d(x, y) := \begin{cases} \max\{\varphi(x), \varphi(y)\}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

je metrika na X.

Uputa: Za provjeru svojstva (M4) posebno razmotrite slučajeve (a) $z = x$ ili $z = y$ i (b) $z \neq x$ & $z \neq y$.

Primjer 1.9. *Neka je preslikavanje $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirano formulom*

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_1 - x_2|.$$

Da li je d metrika na $\mathbb{R}^2$? Znaš li kako se definira pseudometrika*?*

1.4. Topologija na $\mathbb{R}^n$

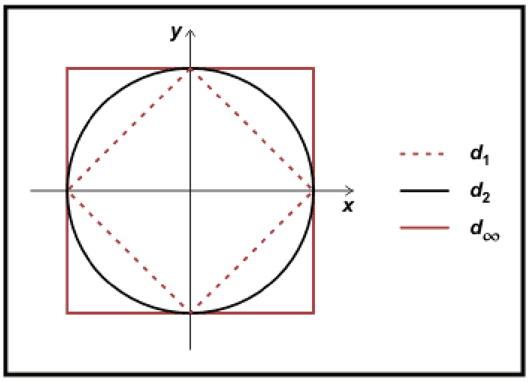
U ovoj točki ćemo pokazati kako se pojam metričkog prostora može još dalje poopćiti do pojma topološkog prostora. Pri tome najviše pažnje posvećujemo topologiji na euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1.10. *Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ točka i $r > 0$. Skup*

$$K(x_0, r) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

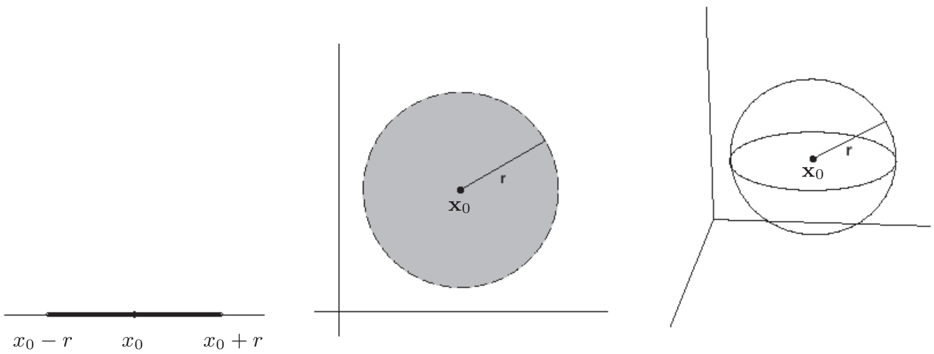
zovemo otvorena kugla sa središtem u točki x_0 radijusa r.

Na slici 1 su prikazane otvorene kugle u $\mathbb{R}^2$ u različitim metrikama d_1, d_2 i d_∞.



Slika 1.

Primjer 1.11. *Na Slici 2 su prikazane otvorene kugle $K(\mathbf{x}_0, r)$ u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$ za $n = 1, 2, 3$.*

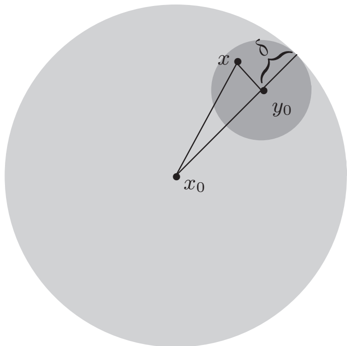


Slika 2. Otvorene kugle u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$

Definicija 1.12. *Skup $U \subseteq X$ iz metričkog prostora (X, d) je* otvoren *ako za svaku točku $\mathbf{x}_0 \in U$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x_0, r) \subseteq U$. Prazan skup $\emptyset$ također smatramo otvorenim.*

Propozicija 1.13. *Otvorena kugla $K(x_0, r)$ iz metričkog prostora (X, d) je otvoren skup.*

Dokaz. Neka je $y_0 \in K(x_0, r)$. Treba pokazati da postoji $\delta > 0$ takav da je $K(y_0, \delta) \subset K(x_0, r)$. U tu svrhu stavimo $\delta := r - d(x_0, y_0)$ (vidi Sliku 3).



Slika 3.

Za svaki $x \in K(y_0, \delta)$ je $d(x, y_0) < \delta$, pa pomoću nejednakosti trokuta dobivamo

$$d(x, x_0) \leq d(x, y_0) + d(y_0, x_0) < \delta + d(y_0, x_0) = r,$$

što dokazuje da je $K(y_0, \delta) \subset K(x_0, r)$. □

Sljedeći primjer nam govori da svojstvo otvorenosti ovisi o tome u kojem prostoru promatramo zadani skup.

Primjer 1.14. *Skup $(a, b) \cup (c, d) \subset \mathbb{R}$ je otvoren u $\mathbb{R}$, ali nije otvoren u $\mathbb{R}^2$ (s obzirom na euklidsku metriku).*

Primjer 1.15.
a) Skup $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ je otvoren u $\mathbb{R}^2$. Da li je taj skup otvoren u $\mathbb{R}^3$?
b) Je li skup $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ otvoren u $\mathbb{R}^2$?

Propozicija 1.16. *Skup $U \subseteq X$ iz metričkog prostora (X, d) je otvoren onda i samo onda ako se može prikazati kao unija neke familije otvorenih kugala.*

Dokaz. Neka je U otvoren skup. Prema definiciji otvorenog skupa za svaku točku $x \in U$ postoji otvorena kugla $K(x, r_x) \subseteq U$. Tada je očito $\bigcup_{x \in U} K(x, r_x) \subseteq U$. S druge strane je $U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in U} K(x, r_x)$. Dakle, $U = \bigcup_{x \in U} K(x, r_x)$.

Obrnuto, pretpostavimo da je $U = \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha$, gdje je $(K_\alpha, \alpha \in A)$ neka familija otvorenih kugala. Tada za svaki $x \in U$ postoje barem jedan $\alpha \in A$ takav da je $x \in K_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha = U$. □

Primjer 1.17. *Produkt intervala* $I := (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ *se zove* otvoreni paralelepiped.

Za točku $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in I$ *stavimo*

$$r := \min\{|x_i - a_i|, |x_i - b_i| \,:\, i = 1, \ldots, n\}.$$

Lako je pokazati da je $K(\mathbf{x}, r) \subseteq I$*, što povlači da je* I *otvoren skup.*

Propozicija 1.18. *Neka je* $\mathcal{U}$ *familija svih otvorenih skupova u metričkom prostoru* (X, d)*. Familija* $\mathcal{U}$ *ima sljedeća svojstva:*

(T1) Unija svake familije članova iz $\mathcal{U}$ *je član iz* $\mathcal{U}$*,*

(T2) Presjek konačno članova iz $\mathcal{U}$ *je član iz* $\mathcal{U}$*,*

(T3) $\emptyset, X \in \mathcal{U}$*.*

Dokaz. (T1) Ovo svojstvo je posljedica propozicije 1.16.

(T2) Neka su $U_1, \ldots, U_n$ otvoreni skupovi i $U := \bigcap_{i=1}^n U_i$. Nadalje, neka je $x_0 \in U$. Treba pokazati da postoji otvorena kugla oko x_0 koja će biti sadržana u U. Kako su skupovi $U_1, \ldots, U_n$ otvoreni, po definiciji postoje otvorene kugle

$$K(x_0, r_i) \subseteq U_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Neka je $r_0 := \min\{r_1, \ldots, r_n\}$. Tada je

$$K(x_0, r_0) \subseteq K(x_0, r_i) \subseteq U_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

pa je $K(x_0, r_0) \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i = U$.

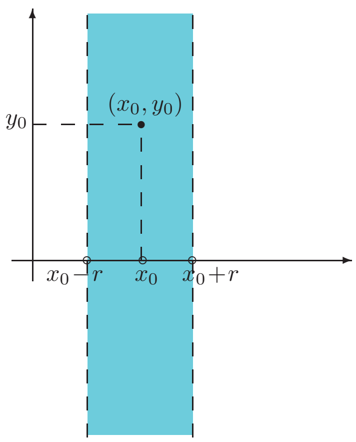
(T3) Prazan skup je otvoren po definiciji. Cijeli skup X je otvoren, jer je svaka otvorena kugla oko točke $x \in X$ sadržana u X. □

Familija $\mathcal{U}$ svih otvorenih skupova metričkog prostora (X, d) zove se topološka struktura ili topologija prostora (X, d).

Primjedba 1.19. *Ako je* (X, d) *pseudometrički prostor, otvorene kugle i otvorene skupove definiramo na isti način kao u slučaju metričkog prostora. Lako je vidjeti da Propozicija 1.18. vrijedi i za pseudometriku* d*.*

Primjer 1.20. *Neka je* $\varrho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_1 - x_2|$ *pseudometrika na* $\mathbb{R}^2$ *(vidi Primjer 1.9.). Na Slici 4 je prikazana otvorena kugla* $K((x_0, y_0), r)$ *u pseudometri-*

čkom prostoru (X, ϱ).



Slika 4.

Svojstva otvorenih skupova iz propozicije 1.18. uzimaju se za definiciju topološkog prostora:

Definicija 1.21. *Neka je X neprazan skup. Familija $\mathcal{U}$ podskupova od X sa svojstvima (T1) - (T3) se zove* topološka struktura *ili* topologija *na X. Uređeni par $(X,\mathcal{U})$ se zove* topološki prostor*. Članove familije $\mathcal{U}$ zovemo* otvoreni skupovi*.*

Primjer 1.22. *Neka je X bilo koji neprazan skup, a $\mathcal{U}$ njegov partitivni skup. Lako je provjeriti da familija $\mathcal{U}$ ima svojstva (T1) - (T3). Za ovaj topološki prostor kažemo da je* diskretan*.*

Interior skupa. Neka je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Najveći otvoreni skup iz X koji je sadržan u A zovemo interior ili nutrina skupa A i označavamo s $\mathrm{Int}\, A$. Uočimo da je $\mathrm{Int}\, A$ jednak uniji svih otvorenih skupova koji su sadržani u A.

Okolina točke $x_0 \in X$ je svaki skup $O \subseteq X$ čiji interior sadrži točku x_0, tj. $x_0 \in \mathrm{Int}\, O$.

Primjer 1.23.

1. $A = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $\mathrm{IntA} = (a, b)$; $A = [a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $\mathrm{IntA} = (a, b)$;
   $A = (a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $\mathrm{IntA} = (a, b)$; $A = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $\mathrm{IntA} = (a, b)$.
2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$, $\mathrm{Int}\, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
3. $A = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathrm{Int}\, A = \emptyset$.

Teorem 1.24. *Interior ima sljedeća svojstva:*

(a) $\operatorname{Int} A \subseteq A$

(b) $\operatorname{Int} X = X$

(c) $A \subseteq B \Longrightarrow \operatorname{Int} A \subseteq \operatorname{Int} B$

(d) Skup A je otvoren onda i samo onda ako je $A = \operatorname{Int} A$

(e) $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$

(f) $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$*.*

Dokaz. Očito vrijede svojstva (a)-(c).

(d) Ako je A otvoren skup, onda je A očito najveći otvoren skup sadržan u A pa je $\operatorname{Int} A = A$. Obrnuto, ako je $\operatorname{Int} A = A$, onda je A otvoren skup jer je $\operatorname{Int} A$ otvoren skup.

(e) slijedi iz (d).

(f) Prema (a) je $\operatorname{Int} A \subseteq A$ i $\operatorname{Int} B \subseteq B$, odakle dobivamo $\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \subseteq A \cap B$. Kako je $\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$ otvoren skup sadržan u $A \cap B$, prema definiciji interiora je

$$\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \subseteq \operatorname{Int}(A \cap B).$$

Nadalje, kako je $A \cap B \subseteq A$ i $A \cap B \subseteq B$, primjenom svojstva (c) dobivamo $\operatorname{Int}(A \cap B) \subseteq \operatorname{Int} A$ i $\operatorname{Int}(A \cap B) \subseteq \operatorname{Int} B$, odakle slijedi obratna inkluzija $\operatorname{Int}(A \cap B) \subseteq \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$. □

Primjedba 1.25. *Općenito je* $\operatorname{Int}(A \cup B) \neq \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B$*. Npr, ako je* $A = [0, 1]$ *i* $B = [1, 2]$*, onda je* $\operatorname{Int}(A \cup B) = (1, 2)$*, a* $\operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B = (0, 1) \cup (1, 2)$*.*

Zatvoreni skupovi. Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor. Za skup $F \subseteq X$ kažemo da je zatvoren, ako je njegov komplement $F^c = X \backslash F$ otvoren.

Primjer 1.26.

1. *U metričkom prostoru (X, d) svaka točka $x_0 \in X$ je zatvoren skup jer je skup $U := X \backslash \{x_0\}$ otvoren. To je zato jer za svaki $x \in U$ je $K(x, d(x, x_0)) \subseteq U$.*

   Specijalno, svaka točka u $\mathbb{R}^n$ je zatvoren skup.

2. *Svaki segment $[a, b]$ je zatvoren u $\mathbb{R}$.*

3. *Skup $\bar{K}(\mathbf{x}_0, r) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \leq r\}$ je zatvoren u $\mathbb{R}^n$. Zovemo ga* zatvorena kugla *sa središtem u $\mathbf{x}_0$ radijusa r.*

Pomoću de Morganovih formula

$$\Big(\bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha\Big)^c = \bigcap_{\alpha\in A} F^c \qquad \& \qquad \Big(\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha\Big)^c = \bigcup_{\alpha\in A} F^c$$

i svojstava (T1) - (T3) otvorenih skupova lako se dokaže sljedeći teorem:

Teorem 1.27. *Familija svih zatvorenih skupova ima sljedeća svojstva:*

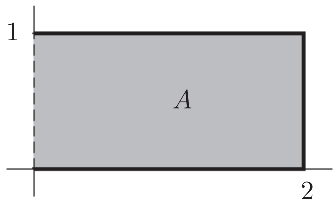
(T1)' Presjek svake familije zatvorenih skupova je zatvoren skup.

(T2)' Unija konačno zatvorenih skupova je zatvoren skup.

(T3)' $\emptyset$ *i* X *su zatvoreni skupovi.*

Primjedba 1.28. *Postoje skupovi koji nisu niti otvoreni niti zatvoreni:*

1. *Primjer jednog takvog skupa je poluotvoreni interval* $(a, b] \subseteq \mathbb{R}$. *S druge strane skupovi* $\emptyset$ *i* $\mathbb{R}$ *su i otvoreni i zatvoreni.*
2. *Skup* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ *nije zatvoren niti je otvoren.*



Slika 5.

Neka je $A \subseteq X$. Najmanji zatvoreni skup iz X koji sadrži A zovemo zatvarač ili zatvorenje (clausura) skupa A i označavamo s $\operatorname{Cl} A$. Uočimo da je $\operatorname{Cl} A$ jednak presjeku svih zatvorenih skupova koji sadrže A.

Primjer 1.29.

1. $A = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $\mathrm{ClA} = [a, b]$; $A = [a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $\mathrm{ClA} = [a, b]$;
   $A = (a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $\mathrm{ClA} = [a, b]$; $A = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $\mathrm{ClA} = [a, b]$.
2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$, $\operatorname{Cl} A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
3. $A = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\operatorname{Cl} A = \mathbb{R}$.

Teorem 1.30. *Zatvarač ima sljedeća svojstva:*

(a) $A \subseteq \operatorname{Cl} A$

(b) $\mathrm{Cl}\, X = X$

(c) $A \subseteq B \Longrightarrow \mathrm{Cl}\, A \subseteq \mathrm{Cl}\, B$

(d) Skup A je zatvoren onda i samo onda ako je $A = \mathrm{Cl}\, A$

(e) $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}\, A) = \mathrm{Cl}\, A$

(f) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}\, A \cup \mathrm{Cl}\, B.$

Primjedba 1.31. *Općenito je $\mathrm{Cl}(A \cap B) \neq \mathrm{Cl}\, A \cap \mathrm{Cl}\, B$. Npr, ako je $A = (0,1)$ i $B = (1,2)$, onda je $\mathrm{Cl}\,(A \cap B) = \emptyset$, dok je $\mathrm{Cl}\, A \cap \mathrm{Cl}\, B = \{1\}$.*

Teorem 1.32. *Neka je A podskup topološkog prostora X. Tada je $x_0 \in \mathrm{Cl}\, A$ onda i samo onda ako je*

$$A \cap O \neq \emptyset$$

za svaku okolinu O točke x_0.

Dokaz. Neka je $x_0 \in \mathrm{Cl}\, A$ i O bilo koja okolina od x_0. Treba pokazati da je $A \cap O \neq \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $A \cap O = \emptyset$. Zbog $\mathrm{Int}\, O \subseteq O$ tada je $A \cap \mathrm{Int}\, O = \emptyset$, pa je zato $A \subseteq X \backslash \mathrm{Int}\, O$. Kako je $X \backslash \mathrm{Int}\, O$ zatvoren skup, prema tvrdnjama (c) i (d) Teorema 1.30. je

$$\mathrm{Cl}\, A \subseteq \mathrm{Cl}(X \backslash \mathrm{Int}\, O) = X \backslash \mathrm{Int}\, O,$$

odakle slijedi $\mathrm{Cl}\, A \cap \mathrm{Int}\, O = \emptyset$. To je kontradikcija, jer je $x_0 \in \mathrm{Cl}\, A$ i $x_0 \in \mathrm{Int}\, O$.

Obratno, pretpostavimo da svaka okolina točke x_0 siječe skup A i pokažimo da je $x_0 \in \mathrm{Cl}\, A$. U suprotnom bi imali $x_0 \in X \backslash \mathrm{Cl}\, A$, pa bi skup $U := X \backslash \mathrm{Cl}\, A$ bio otvorena okolina točke x_0. To je kontradikcija, jer je

$$U \cap A \subseteq (X \backslash \mathrm{Cl}\, A) \cap \mathrm{Cl}\, A = \emptyset.$$

Dakle, $x_0 \in \mathrm{Cl}\, A$. □

Rub skupa. Neka je A podskup topološkog prostora X. Rub (granica ili fronta) skupa A je skup

$$\partial A = \mathrm{Cl}\, A \cap \mathrm{Cl}(X \backslash A).$$

Iz definicije vidimo da je $\partial A = \partial(X \backslash A)$.

Primjer 1.33.

1. *Ako je $X = \mathbb{R}$ i $A = (a, b]$, onda je*

$$\partial A = \mathrm{Cl}\,((a,b]) \cap \mathrm{Cl}((-\infty, a] \cup (b, \infty)) = [a,b] \cap ((-\infty, a] \cup [b, \infty)) = \{a, b\}.$$

2. *Ako je $X = \mathbb{R}$ i $A = \mathbb{Q}$, onda je $\partial A = \mathrm{Cl}\, \mathbb{Q} \cap \mathrm{Cl}(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.*

3. *Neka je $K(\mathbf{x}_0, r)$ otvorena kugla u $\mathbb{R}^n$. Tada je $\partial K(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = r\}$*

Gomilište skupa

Definicija 1.34. *Neka je* $(X,\mathcal{U})$ *topološki prostor i* $A \subseteq X$. *Točka* $x_0 \in X$ *je* gomilište *(ili* točka gomilanja*) skupa* A *ako svaka okolina točke* x_0 *sadrži barem jednu točku iz* A *različitu od* x_0.

Za točku skupa A *koja nije njegovo gomilište kažemo da je* izolirana točka *skupa* A.

Primjetimo da gomilište skupa A ne mora pripadati skupu A, dok izolirana točka mora.

Skup svih gomilišta skupa A označavat ćemo s A'.

Primjer 1.35.

1. *Ako je* $A = (0,1] \cup \{3\}$, *onda je* $A' = [0,1]$. *Točka* $x_0 = 3$ *je izolirana točka.*
2. *Jedino gomilište skupa* $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathbb{R}$ *je* 0.
3. *Jednočlan skup* $A = \{\mathbf{x}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *nema gomilišta.*
4. $A = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, $A' = \emptyset$.
5. $A = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $A' = \mathbb{R}$.

Sljedeći korolar je posljedica Teorema 1.32.:

Korolar 1.36.

$$\mathrm{Cl}\, A = A \cup A'.$$

Korolar 1.37. *Skup* A *je zatvoren onda i samo onda ako sadrži sva svoja gomilišta.*

Dokaz. Prema tvrdnji (d) Teorema 1.30. skup $A \subseteq X$ zatvoren onda i samo onda ako je $A = \mathrm{Cl}\, A$, a zbog Korolaru 1.36. to je onda i samo onda ako je $A' \subseteq A$. □

Definicija 1.38. *Neka je* (X,d) *metrički prostor. Za skup* $A \subseteq X$ *kažemo da je* omeđen *ili* ograničen *ako postoje točka* x_0 *i realan broj* $r > 0$ *takav da je* $A \subseteq K(x_0, r)$.

Lako je dokazati sljedeću propoziciju:

Propozicija 1.39. (Dokaz na vježbama)

(i) Skup A *iz metričkog prostora* (X,d) *je omeđen onda i samo onda ako za svaku točku* x_0 *postoji realan broj* $r > 0$ *takav da je* $A \subseteq K(x_0, r)$.

(ii) Unija konačno mnogo omeđenih skupova je omeđen skup.

(iii) Svaki podskup omeđenog skupa je i sâm omeđen.

Definicija 1.40. Dijametar *skupa A u metričkom prostoru (X,d) se definira kao*

$$\operatorname{diam} A := \sup\{d(x,y) : x,y \in A\}.$$

Propozicija 1.41. (Dokaz na vježbama) *Neka je (X,d) metrički prostor. Skup $A \subseteq X$ je omeđen onda i samo onda ako je $\operatorname{diam} A < \infty$.*

Zadaci

1. Za vektor $\mathbf{x} = (3,2,1) \in \mathbb{R}^3$ odredite $\|\mathbf{x}\|_1$, $\|\mathbf{x}\|_2$ i $\|\mathbf{x}\|_\infty$.

2. Neka je X realni vektorski prostor sa skalarnim produktom $(\cdot|\cdot)$. Dokažite da norma $\|\cdot\|$ inducirana tim skalarnim produktom zadovoljava tzv. jednakost paralelograma:
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$
(Uputa: $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = (x+y|x+y)+(x-y|x-y) = \ldots = 2\big(\|x\|^2+\|y\|^2$.)

3. Pokažite primjerom da jednakost paralelograma ne vrijedi za norme $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_\infty$?
(Uputa: Promotrite vektore $\mathbf{x} = (1,0,\ldots,0)$ i $\mathbf{y} = (0,1,0,\ldots,0)$.)

4. Neka je X realan vektorski prostor s normom $\|\cdot\|$ koja zadovoljava jednakost paralelograma. Dokažite da postoji skalarni produkt na X koji inducira normu $\|\cdot\|$, tj. takav da vrijedi $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.
(Uputa: Stavite $(x|y) = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$.)

5. Dokažite da u svakom unitarnom vektorskom prostoru $(X,+,\cdot)$ vrijedi Schwarzova nejednakost:
$$|(x|y)| \leq \|x\|\cdot\|y\|, \qquad x,y \in X.$$
Pri tome jednakost vrijedi onda i samo onda ako su x i y kolinearni vektori.
(Uputa: Lako je pokazati da za sve $x,y \in X$ i za sve $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$(\lambda x + \mu y|\lambda x + \mu y) = \lambda^2(x|x) + 2\lambda\mu(x|y) + \mu^2(y|y).$$
Specijalno za $\lambda = (x|y)$ i $\mu = -(x|x)$ se dobiva
$$(\lambda x + \mu y|\lambda x + \mu y) = (x|x)\Big((x|x)\cdot(y|y) - (x|y)^2\Big),$$
odakle je lako dokazati traženu nejednakost.)

6. Neka je $(X,\|\cdot\|)$ normiran vektorski prostor. Dokažite da je zatvorena jedinična kugla $\bar{K}(0,1) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ konveksan skup, tj.
$$\forall x,y \in \bar{K}(0,1),\ 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in \bar{K}(0,1).$$
(Uputa: $\|\lambda x+(1-\lambda)y\| \leq \|\lambda x\|+\|(1-\lambda)y\| = \lambda\|x\|_(1-\lambda)\|y\| \leq \lambda+(1-\lambda) = 1$.)

7. (a) Dokažite da su norme $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ na $\mathbb{R}^n$ ekvivalentne. (b) Dokažite da su norme $\|\cdot\|_\infty$ i $\|\cdot\|_1$ ekvivalentne.

   (Uputa: (a) Neka je $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Aritmetičko-kvadratna nejednakost daje
   $$\frac{|x_1| + \ldots + |x_n|}{n} \leq \sqrt{\frac{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}{n}},$$
   odakle slijedi $\|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_2$. Nadalje, iz nejednakosti $|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 \leq (|x_1| + \ldots + |x_n|)^2$ slijedi $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1$.
   (b) Ekvivalencija normi je relacija ekvivalencije. Tvrdnja slijedi iz (a) i Primjera 1.3.)

8. Dokazati da je formulom
   $$\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i|$$
   zadana metrika na $\mathbb{R}^n$.

   (Uputa: Lako je provjeriti svojstva (M1)-(M3). Za provjeru svojstva (M4) iskoristite nejednakost trokuta $|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$, koja vrijedi za sve $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pri tome jednakost vrijedi onda i samo onda ako se c nalazi između a i b.)

9. Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ i $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija. (a) Pronađite uvjete na funkciju f tako da formulom $\varrho(x, y) := |f(x) - f(y)|$ bude definirana metrika na X. (b) Za $x, y \in (0, \infty)$ definirajte $\varrho(x, y) = |1/x - 1/y|$. Da li je ϱ metrika na $(0, \infty)$? (c) Za $x, y \in \mathbb{R}$ definirajte
   $$\varrho(x, y) = \left|\frac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}} - \frac{y}{1 + \sqrt{1 + y^2}}\right|.$$
   Da li je ϱ metrika na $\mathbb{R}$?

   (Uputa: (a) Lako je provjeriti da ϱ ima svojstva (M1), (M3) i (M4). Nadalje, ako je $x = y$, onda je očito $\varrho(x, y) = 0$. Prema tome, ϱ će biti metrika na X onda i samo onda ako iz jednakosti $\varrho(x, y) = 0$ slijedi da je $x = y$, tj. ako je f injekcija. (b) Funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, \infty)$, strogo pada pa je injekcija. (c) Neka je $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$. Pokažite da je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.)

10. Neka je (X, ϱ) metrički prostor. Pokažite da je formulom
    $$d(x, y) = \frac{\varrho(x, y)}{1 + \varrho(x, y)}$$
    zadana nova metrika na X.

    (Uputa: Lako je provjeriti da d ispunjava uvjete (M1)-(M3). (M4) Funkcija $f(t) = \frac{t}{1+t}$ strogo raste na $[0, \infty)$, jer je $f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$. Zato je $f(\varrho(x, y)) \leq f(\varrho(x, z) + \varrho(z, y))$, tj.
    $$\frac{\varrho(x, y)}{1 + \varrho(x, y)} \leq \frac{\varrho(x, z) + \varrho(z, y)}{1 + \varrho(x, z) + \varrho(z, y)},$$

odakle pomoću nejednakosti $\varrho(x,y) \le \varrho(x,z) + \varrho(z,y)$ dobivamo

$$\frac{\varrho(x,y)}{1+\varrho(x,y)} \le \frac{\varrho(x,z)+\varrho(z,y)}{1+\varrho(x,z)+\varrho(z,y)} \le \frac{\varrho(x,z)}{1+\varrho(x,z)} + \frac{\varrho(z,y)}{1+\varrho(z,y)}.$$

Dakle, $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$.)

11. (a) Pokažite da je formulom

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{|x_1-x_2|} + \sqrt{|y_1-y_2|}$$

zadana metrika na $\mathbb{R}^2$. (b) Pokažite da funkcija $\|(x,y)\| = \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}$ nije norma na $\mathbb{R}^2$. (Uputa: (b) Funkcija $\| \ \|$ nema svojstvo (N3).)

12. Neka su x, y, u, z točke iz metričkog prostora (X,d). Dokažite:
(a) $|d(x,z) - d(y,u)| \le d(x,y) + d(z,u)$ (b) $|d(x,z) - d(y,z)| \le d(x,y)$.

(Uputa: (a) Nejednakost trokuta daje $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,u) + d(u,z)$, odakle je $d(x,z) - d(y,u) \le d(x,y) + d(u,z)$. Slično se pokaže da je $d(y,u) - d(x,z) \le d(x,y) + d(u,z)$. (b) Slijedi iz (a).)

13. Neka je X skup svih $m \times n$ realnih matrica. Dokažite da je formulom

$$d(A,B) = \max_{i,j} |a_{ij} - b_{ij}|$$

zadana metrika na X.

14. Dokažite da je skup $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ zatvoren u $\mathbb{R}^2$.

15. neka je $A = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Pokažite da se A može prikazati kao presjek otvorenih skupova.

(Rješenje: $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \Big)$.)

16. Neka je X topološki prostor, a $A \subseteq X$ proizvoljan podskup. Dokažite: (a) $\mathrm{Cl}\, A = X \backslash \mathrm{Int}\,(X \backslash A)$. (b) $\mathrm{Int}\, A = X \backslash \mathrm{Cl}\,(X \backslash A)$.

(Uputa: (a) Kako je $\mathrm{Int}\,(X\backslash A)$ otvoren skup i $\mathrm{Int}\,(X\backslash A) \subseteq (X\backslash A)$, to je $X\backslash\mathrm{Int}\,(X\backslash A)$ zatvoren skup koji sadrži A i zato je $\mathrm{Cl}\, A \subseteq X\backslash\mathrm{Int}\,(X\backslash A)$. Obratno, $X\backslash\mathrm{Cl}\, A$ je otvoren skup sadržan u $X\backslash A$. Zato je $X\backslash\mathrm{Cl}\, A \subseteq \mathrm{Int}\,(X\backslash A)$, odakle slijedi $\mathrm{Cl}\, A \supseteq X\backslash\mathrm{Int}(X\backslash A)$. (b) Postupite slično kao pod (a).)

17. Dokažite: (a) $\partial A = \mathrm{Cl}\, A \backslash \mathrm{Int}\, A$. (b) $\mathrm{Cl}\, A = A \cup \partial A$.

(Uputa: Iskoristimo li zadatak 16, dobivamo:
(a) $\partial A = \mathrm{Cl}\, A \cap \mathrm{Cl}(X\backslash A) = \mathrm{Cl}\, A \backslash (X \backslash \mathrm{Cl}(X\backslash A)) = \mathrm{Cl}\, A \backslash \mathrm{Int}\, A$.
(b) $\mathrm{Cl}\, A = X\backslash\mathrm{Int}\,(X\backslash A) = \big(A \cup (X\backslash A)\big)\backslash\mathrm{Int}\,(X\backslash A) = \big(A\backslash\mathrm{Int}\,(X\backslash A)\big) \cup \big((X\backslash A)\backslash\mathrm{Int}\,(X\backslash A)\big) = A \cup \partial(X\backslash A) = A \cup \partial A$.)

18. Neka je $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Pokažite da je $\partial A = [0,1]$.