

VJEROJATNOST

xxxxx.math.hr / ~ bbasrak

LITERATURA :

P. BILLINGSLEY : PROBABILITY AND MEASURE, WILEY (1995)

L. BREIMAN : PROBABILITY, ADDISON-WESLEY (1968)

J. S. CHOW, H. TEICHER : PROBABILITY THEORY, INDEPENDENCE, INTERCHANGEABILITY, MARTINGALES
SPRINGER, (1978)

R. DURRETT : PROBABILITY : THEORY AND EXAMPLES,
2nd ed. DUXBURY PRESS, (1996)

A. GUT : PROBABILITY : A GRADUATE COURSE,
SPRINGER (2004)

O. KALLENBERG : FOUNDATIONS OF MODERN
PROBABILITY, 2nd ed, SPRINGER (2001)

N. SARAPA : TEORIJA VJEROJATNOSTI, ŠK. (1987)

PRAVILA :

domaće zadatke (predati obavezno)

VJEŠTAJNOST

POČECI: Cardano (16. st.)

de Mere, Pascal, Fermat (17. st.)

C. Huygens (17. st.)

AKSIOMI: A. N. Kolmogorov (1933)

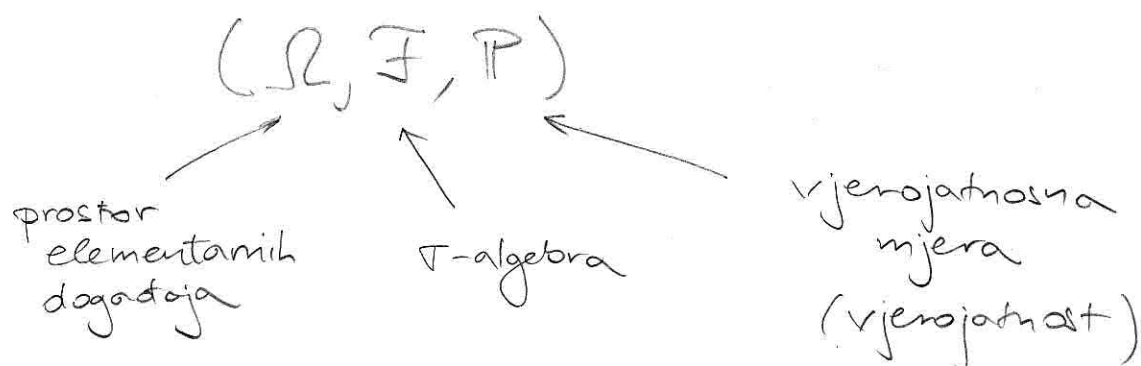
Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

PRIMJENE: - teorjska matematika
(teorja brojeva ili kombinatorika upr.)
- statistika
- financije, mreže, genetika, ...

KONTROVERZE: - interpretacija
- paradoksi
- položaj u odn. na ostatak matematike

I TEORIJA MJERE

Vjerojatnosni prostor



Ω : proizvoljan skup, teorija je jednostavnija ako je Ω prebrojiv (tj. konačan ili prebrojivo beskonačan, za nas)

DEF $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ je σ -algebra ako vrijedi:

i) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

ii) $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{F}$

DEF Par $(\Omega, \mathcal{F})$ se naziva izmjeniv prostor, a mjera je t.j. $\mu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ t.d.

i) $\mu(A) \geq \mu(\emptyset) = 0$ za sve $A \in \mathcal{F}$

ii) $\mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i)$ za sve nizove skupova $A_i \in \mathcal{F}$ koji su međ. disjunktni

Ako je $\mu(\Omega) = 1$ kažemo da je μ vjerojatnost.

Vjerojatnost = nenegativna, σ -aditivna, normirana fja na $\mathcal{F}$

DEF $\emptyset \neq \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ je algebra skupova ako vrijedi:

$$i) A \in \mathcal{F} \rightarrow A^c \in \mathcal{F}$$

$$ii) A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$$

Primjer (algebra koja nije σ -algebra)

$$\Omega = \mathbb{Z}, \mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{Z} : A \text{ ili } A^c \text{ je konačan}\}$$

DEF Ako je $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ definiramo

$\sigma(\mathcal{A})$ = najmanja σ -algebra koja sadrži sve skupove iz $\mathcal{A}$

Primjer

$$\mathcal{A} = \{A\} \Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$$

DEF $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ je π -sistem (sustav)
ako

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$$

$\mathcal{A}$ je λ -sustav (Dynkinov ili λ -sistem)

ako

i) $\Omega \in \mathcal{A}$

ii) $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{A}$

iii) $A_n \in \mathcal{A}, A_n \nearrow A \Rightarrow A \in \mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ je monotona klasa ako

i) $A_n \in \mathcal{A}, A_n \nearrow A \Rightarrow A \in \mathcal{A}$

ii) $A_n \in \mathcal{A}, A_n \searrow A \Rightarrow A \in \mathcal{A}$

Za proizvoljnu klasu $\mathcal{A}$ definiramo:

$\mathcal{D}(\mathcal{A}) =$ najmanji λ -sistem koji
sadrži $\mathcal{A}$

$\mathcal{M}(\mathcal{A}) =$ najmanja monot. klasa
koja sadrži $\mathcal{A}$

TEOREM 1

Ako je A algebra

$$\mathcal{M}(A) = \mathcal{T}(A)$$

KOROLAR 2

Ako je A algebra, a $\mathcal{G} \supseteq A$ monotona
klasa $\Rightarrow$
 $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{T}(A)$

TEOREM 3

Ako je A $\mathcal{T}$ -sistem na $\mathcal{R} \Rightarrow$

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{T}(A)$$

KOROLAR 4 ($\mathcal{T}$ - λ teorem)

Ako je A $\mathcal{T}$ -sistem & $\mathcal{L} \supseteq A$

λ -sistem $\Rightarrow$
 $\mathcal{T}(A) \subseteq \mathcal{L}$

LEMA 5

$\mathcal{A}$ je λ -system akkor

i) $\Omega \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

iii) $A_n \in \mathcal{A}$, disjunkti $\Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$

METATEOREM

Česta rečenica u vjerojatnosnim dokazima je "dovoljno je provjeriti da tvrdnja vrijedi za... npr. pravokutnike ili step funkcije", a razlog je

TEOREM 6 (METATEOREM)

- i) Neka monotona klasa $\mathcal{E}$ zadovoljava neko svojstvo. Ako je A algebra t.d.
 $\sigma(A) = \mathcal{G} \text{ \& } A \subseteq \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$
- ii) Neka λ -sistem $\mathcal{E}$ zadovoljava neko svojstvo. Ako je A Π -sistem i
 $\sigma(A) = \mathcal{G}, A \subseteq \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$

Teorem slijedi iz gornjih korolara,

a ii) se također naziva

Π - λ teoremom

DEF

Borelovi skupovi su elementi Borelove

σ -algebre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ koja je generirana otvorenim skupovima na $\mathbb{R}^d$.

Mjere na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ se mogu uvesti koristeći tzv. Stieltjesove funkcije mjere sa svojstvom

- i) $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je neopadajuća
- ii) F je zdesna neprekidna

TEOREM 7

Za svaku Stieltjesovu funkciju F postoji jedinstvena mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.d.

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$$

Ako je $F(x) = x$, pišemo $\mu = \lambda$ i zovemo je Lebesguova mjera

Dokaz gornjeg teorema je dug, a
zasniva se na sljedeća dva teorema

THEOREM 8 (Caratheodory)

Neka je μ σ -konačna mjera na
algebri skupova $\mathcal{A}$, tada postoji
jedinствено proširenje od μ na $\sigma(\mathcal{A})$

Podsjetimo se μ na $(A, \mathcal{A})$ je σ -konačna
ako postoje $A_i \in \mathcal{A}$, $\bigcup A_i = A$ i

$$\mu(A_i) < \infty$$

Također μ je mjera na algebri $\mathcal{A}$
ako

$$i) \mu(A) \geq \mu(\emptyset) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

$$ii) A_i \in \mathcal{A} \text{ disjunktne} \ \& \ \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i)$$

Mi bismo mjeru htjeli definirati na
pravokutnicima

$$[a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d] \in \mathbb{R}^d, \quad -\infty \leq a_i < b_i \leq \infty$$

Pravokutnici nažalost ne čine algebru, ali
čine polualgebru

DEF A je polualgebra ako

$$i) A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$$

$$ii) A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \quad \text{za neke}$$

disjunktne $B_i \in \mathcal{A}$
i neki $n \in \mathbb{N}$

TEOREM 9

Neka je $\mathcal{S}$ polualgebra i $\mu: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
zadovoljava $\mu(\emptyset) = 0$ te

$$i) S = \bigcup_{i=1}^n S_i, S, S_i \in \mathcal{S}, S_i \text{ disjunktne}$$

$$\Rightarrow \mu(S) = \sum_{i=1}^n \mu(S_i)$$

$$ii) S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i, S, S_i \in \mathcal{S}, S_i \text{ disjunktne}$$

$$\Rightarrow \mu(S) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(S_i)$$

Tada μ ima jedinstveno proširenje $\bar{\mu}$ na
algebru generiranu sa $\mathcal{S}$. Ako je
 $\bar{\mu}$ σ -konačna, tada postoji jedinstvena
mjera koja proširuje $\bar{\mu}$ na $\sigma(\mathcal{S})$.

Dokaz teorema 7 se zasniva na teoremima 8 i 9. Dokaz teorema 8 se izvodi tipično koristeći $\mathbb{T}-\lambda$ teorem, a iz njega slijedi posljednja tvrdnja teorema 9.

MJERE NA $\mathbb{R}^d$

- mogu se uvesti na analogan način
 no Stieltjesove funkcije $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$
 osim i) i ii) moraju zadovoljavati i

iii) $\Delta_A F \geq 0$ za svaki konačan pravokutnik $A = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d]$

Gdje je
$$\Delta_A(F) = \sum_{v \in V} \text{sgn}(v) F(v)$$

a $V =$ skup vrhova pravokutnika A

$$\text{sgn}(v) = (-1)^{\# \text{a-ova u vrhu } v}$$

RAZDILOBE

DEF Funkcija $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ je slučajna varijabla (vektor) na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ako je:

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \quad \text{za svaki Borelov skup } B$$

Primjer (indikatorna funkcija)

Za $A \in \mathcal{F}$ slučajni događaj I_A je slučajna varijabla

Uočite, slučajna varijabla (vektor također) inducira vjerojatnosni mjerni na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$$\mu(A) = P(X \in A), \quad A \text{ Borelov}$$

Pišemo $\mu = P \circ X^{-1}$ i nazivamo je razdoba slučajne varijable X . A funkciju $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ danu sa

$$F(x) = P(X \leq x)$$

zovemo funkcija distribucije od X .

TEOREM (svojstva fje distribucije)

- i) F je neopadajuća
- ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
- iii) F je zdesna neprekidna
- iv) Za $F(x-) = \lim_{y \uparrow x} F(y)$ je $F(x-) = P(X < x)$
- v) $P(X = x) = F(x) - F(x-)$.

Pokazuje se i da je svaka fja F sa svojstvima i)–iii) fja distribucije neke slučajne varijable (kako?)

DEF Ako sl. varijable X, Y zadovoljavaju $P(X \leq x) = P(Y \leq x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$ kažemo da X, Y imaju istu distribuciju,
$$X \stackrel{d}{=} Y$$

INTEGRALI

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor s mjerom
za $\mathcal{F}$ -mjerljivu realnu fn f želimo
definirati:

$$\int f d\mu$$

Postoji više puteva do definicije, no
prema Durrettu možemo je dobiti
u 4 koraka

KORAK 1 (JEDNOSTAVNE FUNKCIJE)

Za jednostavne funkcije

$$f(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{I}_{A_i}$$

gdje su $A_i \in \mathcal{F}$ disjunktne i $\mu(A_i) < \infty$

stavimo

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$$

LEMA 10

Za jednostavne φ i ψ , $a, b \in \mathbb{R}$

i) ako $\varphi \geq 0$ g.s. $\Rightarrow \int \varphi d\mu \geq 0$

monotonost

ii) $\int (a\varphi + b\psi) d\mu = a \int \varphi d\mu + b \int \psi d\mu$

linearnost

LEMA 11

Ako neki integral zadovoljava i) & ii)
tada vrijedi i

$$\text{iii)} \quad \varphi \leq \psi \Rightarrow \int \varphi d\mu \leq \int \psi d\mu$$

$$\text{iv)} \quad \varphi = \psi \text{ g.s.} \Rightarrow \int \varphi d\mu = \int \psi d\mu$$

$$\text{v)} \quad \left| \int \varphi d\mu \right| \leq \int |\varphi| d\mu$$

KORAK 2 (OGRAIČENE FUNKCIJE)

Neka je f ograničena funkcija koja
iščezava na E^c za neki izmjeniv
skup E t.d.
 $\mu(E) < \infty$

Definiramo

$$\int f d\mu = \sup_{\varphi \leq f} \int \varphi d\mu$$

I ovaj integral lako se vidi zadovoljava
svojstva i) - v)

KORAK 3 (NEGATIVNE FUNKCIJE)

Za $f \geq 0$ stavimo

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int h d\mu : 0 \leq h \leq f, h \text{ ograničena} \right. \\ \left. \text{ i } \mu(\{x: h(x) > 0\}) < \infty \right\}$$

I ovaj integral zadovoljava i) - v)

KORAK 4 (OPĆENITE FUNKCIJE)

Kazemo da je f integrabilna ako

$$\int |f| d\mu < \infty.$$

Definiramo

$$f^+ = f \vee 0 \quad f^- = (-f) \vee 0$$

$$\Rightarrow f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-$$

te

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

desna strana je konačna za integrabilne f , a dobro definirana ako bar jedan od dva integrala nije $+\infty$

TEOREM 12 (svojstva integrala)

Ako su f i g integrabilne, $a, b \in \mathbb{R}$

- i) $f \geq 0 \Rightarrow \int f d\mu \geq 0$
- ii) $\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu$
- iii) $g \leq f$ g.s.rada $\Rightarrow \int g d\mu \leq \int f d\mu$
- iv) $g = f$ g.s.rada $\Rightarrow \int f d\mu = \int g d\mu$
- v) $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$

• Za integral u odn. na Lebesgueovu mjeru pišemo

$$\int f(x) dx = \int f d\lambda$$

• također

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\lambda$$

• ako $\mu[a,b] = G(b) - G(a)$ za neku

Stieltjesovu f.ku G pišemo

$$\int f(x) dG(x) = \int f d\mu$$

• Za prebrojiv Ω s brojećom mjerom μ pišemo

$$\sum_{i \in \Omega} f(i) = \int f d\mu$$

NAP Ako je f Riemann integrabilna na $[a, b]$ tada je ona i Lebesgue integrabilna i integrali su jednaki

TEOREM 13 (Jensenova nejednakost)

Ako je φ konveksna f. $\forall x, y, \lambda \in [0, 1]$

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda \varphi(x) + (1-\lambda) \varphi(y),$$

a μ je vjerojatnost t.d. su f i $\varphi \circ f$ integrabilne u odn. na $\mu \Rightarrow$

$$\varphi\left(\int f d\mu\right) \leq \int \varphi(f) d\mu$$

Neka je

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

za neku f i $p \geq 1$

TEOREM 14 (Hölderova nejednakost)

Za $p, q \in (1, \infty)$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow$

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

12 Hölderove nejednakosti za $p=q=2 \rightarrow$

Cauchy - Schwarz nejednakost

Jedno od najvažnijih pitanja je odrediti uvjete td.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$$

DEF kažemo da $f_n \rightarrow f$ po mjeri μ ako $\forall \varepsilon > 0$

$$\mu(\{x: |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

Za konačne mjere (i ymjeratnost) to je slabiji zahtjev od $f_n \rightarrow f$ g.sruda.

TEOREM 15 (o ograničenoj konvergenciji)

Neka je $\mu(E) < \infty$ i f_n neka iščezavaju na E^c , ako $|f_n| \leq M$ i $f_n \rightarrow f$ po mjeri $\Rightarrow$

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

TEOREM 16 (Fatouova lema)

Ako $f_n \geq 0 \Rightarrow$

$$\liminf \int f_n d\mu \geq \int (\liminf f_n) d\mu$$

TEOREM 17 (o monotonoj konvergenciji)

Ako $f_n \geq 0$ & $f_n \uparrow f \Rightarrow$

$$\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu$$

TEOREM 18 (o dominiranoj konvergenciji)

Ako $f_n \rightarrow f$ g. svuda i $|f_n| \leq g$ $\forall n$
i neku integrabilnu $g \Rightarrow$

$$\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$$

OČEKIVANJE (MATEMATIČKO OČEKIVANJE)

Specijalan slučaj integrala na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i X koje su slučajne varijable

i odg. vrijede analogni rezultati.

TEOREM 19

X, Y slvar, $E|X|, E|Y| < \infty$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$i) E(aX + bY) = aEX + bEY$$

$$ii) X \geq Y \Rightarrow EX \geq EY$$

TEOREM 20 (Jensen. n.)

Za konveksne φ

$$E(\varphi(X)) \geq \varphi(EX)$$

ako su oba očekivanja konačna.

TEOREM 21 (Hölder. n.)

Za $p, q \in [1, +\infty]$ td. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\Rightarrow E|XY| = \|X\|_p \|Y\|_q$$

Ordgi:

$$\|X\|_r = (E|X|^r)^{1/r} \quad r \in [1, \infty)$$

$$\|X\|_\infty = \inf \{M : P(|X| > M) = 0\}$$

Uvedimo

$$E(X; A) = E(X I_A)$$

THEOREM 22 (Markovljeva nejednakost)

Za $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i_A = \inf \{\varphi(y) : y \in A\}$

$$\rightarrow i_A P(X \in A) \leq E(\varphi(X); X \in A) \leq E\varphi(X)$$

Dokaz

po definiciji zbog $\varphi \geq 0 \rightarrow$

$$i_A I_{\{X \in A\}} \leq \varphi(X) I_{\{X \in A\}} \leq \varphi(X)$$

uzmemo li očekivanja $\Rightarrow$ trdnja □

Za $\varphi(x) = x^2$, $A = \{x : |x| > a\} \Rightarrow$

$$a^2 P(|X| \geq a) \leq EX^2$$

č. Čebiševljeva nejednakost.

THEOREM 23 (Fatou's l.)

$$X_n \geq 0 \Rightarrow \liminf EX_n \geq E(\liminf X_n)$$

THEOREM 24 (o monot. conv.)

$$0 \leq X_n \nearrow X \Rightarrow EX_n \nearrow EX$$

THEOREM 25 (o dom. conv.)

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X, |X_n| \leq Y, EY < \infty \Rightarrow EX_n \rightarrow EX$$

PONOVO O SL. VARIJABLAMA

Neka je $(S, \mathcal{S})$ sad proizvoljni
mjerivi prostor, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ zadani
vj. prostor

$$X: \Omega \rightarrow S$$

je slučajni element ako je

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \text{ , za sve } B \in \mathcal{S}$$

Za $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ dobijemo
slučajne vektore (varijable za $d=1$).

TEOREM 26

Neka je $\mathcal{A}$ klasa koja generira $\mathcal{S}$ te
neka $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za sve $B \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow X$ je slučajni element.

D. Pokažite samo da je $\{B: X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$
 σ -algebra □

Primjer

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{A} = \{(-\infty, q) : q \in \mathbb{Q}\}$$

DEF

$$\mathcal{T}(X) = \{ \{X \in B\} : B \in \mathcal{F} \}$$

= najm. σ -algebra na $\mathcal{R}$ u odn.
na koju je X izmjeniva

TEOREM 27.

Ako su $X: (\mathcal{R}, \mathcal{F}) \rightarrow (S, \mathcal{S})$ i
 $f: (S, \mathcal{S}) \rightarrow (T, \mathcal{T})$ izmjeniva preslikavanja
tada je to i $f(X)$.

Posebno:

ako su $(X_1, \dots, X_n)$ sl. var. na $(\mathcal{R}, \mathcal{F}, P)$

i $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ izmjeniva $\Rightarrow$

$f(X_1, \dots, X_n)$ je sluč. var.

npr

$X_1 + \dots + X_n$ je sl. varijabla

TEOREM 28

$X_1, X_2, \dots$ slučajne varijable

$$\Rightarrow \inf_n X_n, \sup_n X_n, \limsup_n X_n, \liminf_n X_n$$

su također sl. varijable

Posebno

$$\Omega_0 = \{ \lim_n X_n \text{ postoji} \} \text{ je } \in \mathcal{F}$$

Ako $P(\Omega_0) = 1$ kažemo da X_n

konvergira gotovo sigurno

Limes definiramo npr. kao

$$X = \limsup_n X_n$$

koji je slučajna varijabla ali prima vrijednosti

$$\text{u } \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$$

DEF Kažemo da je slučajna varijabla X ,
odn. njena razdioba neprekidna (u
odn. na Lebesgueovu mjeru) ako
postoji nenegativna Lebesgue integrabilna
funkcija f t.d.

$$P(X \in (a, b]) = \int_a^b f(x) dx \quad \forall a < b$$

Tj. f nazivamo gustoća sl. var. X .

Primjer

i) uniformna razdioba $U(0,1)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

ii) eksponencijalna razdioba, $\text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

iii) standardna normalna razdioba, $N(0,1)$

$$f(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

TEOREM 29

Za sve $x > 0$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2} \leq \int_x^\infty e^{-y^2/2} dy \leq \frac{1}{x} e^{-x^2/2}$$

Dokaz

$$\int_x^\infty e^{-y^2/2} dy = \left(\begin{array}{l} \text{uz } y = x+z \\ i \\ \exp(-z^2/2) \leq 1 \end{array} \right) \leq e^{-x^2/2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = e^{-x^2/2} \frac{1}{x}$$

Za drugu nejednakost uočite:

$$\int_x^\infty \left(1 - \frac{3}{y^4}\right) e^{-y^2/2} dy = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2}$$

□

Primer (Cantorova razdioba)

Pisjetmosc

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

$$C_3 = \dots 8 \text{ segmenta}$$

$$C = \bigcap_{k \geq 1} C_k$$

← zatvoren, neprebrojiv skup
Leb. mjera 0

$$\left(\lambda(C) \leq \lambda(C_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k \rightarrow 0 \right)$$

Cantorova razdioba = unif. razdioba na
Cantorovom skupu

DEF Razdioba sl. var X je diskretna
ako postoji prebrojiv skup S t.d.

$$P(X \in S^c) = 0$$

Primer

i) $\Phi \circ X^{-1} = \delta_x \quad \leftarrow$ točkorna masa u 0

$$\Rightarrow F(t) = \begin{cases} 1 & t \geq x \\ 0 & t < x \end{cases}$$

ii) $Q = (q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ i $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ t.d. $\sum_1^\infty \alpha_i = 1, \alpha_i > 0$

$$\Rightarrow F(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot 1_{[q_i, \infty)}(x)$$

definira diskretnu razdiobu

RAČUNANJE OČEKIVANJA

Iako je očk. definirano kao integral na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mi ga češće računamo kao integral u odn. na razdiobu sl. varijable X

TEOREM 30 (zamjena varijable)

Neka je X slučaj. element na $(S, \mathcal{S})$ s razdiobom μ tj. $\mu(A) = P(X \in A)$. Ako je $f: (S, \mathcal{S}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ izmjeniva t.d. $f \geq 0$ ili $E|f(X)| < \infty$ tada

$$E f(X) = \int_S f(y) \mu(dy)$$

Dokaz

- Jasan za $f = 1_B$, $B \in \mathcal{S}$
- Pa onda i za jednostavne funkcije.
- Za nenegativne f , $f_n(x) = \frac{\lfloor 2^n f(x) \rfloor}{2^n} \wedge n$

$f_n \nearrow f$ su jednostavne $\Rightarrow$ t.m.k. $\Rightarrow$

$$E f(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} E f_n(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(y) \mu(dy) = \int f(y) \mu(dy)$$

- Općenito $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ pa iskombiniramo t.d.k.

□

PRODUKTNE MJERE. FUBINJEV TEOREM

Ako su $(X, \mathcal{A}, \mu_1)$ i $(Y, \mathcal{B}, \mu_2)$ dva prostora sa σ -konačnom mjerom definiramo

$$\Omega = X \times Y$$

$$\mathcal{S} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\} \quad (\text{produktima})$$

$\mathcal{S}$ je samo polualgebra, zato koristimo

$$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{S}) =: \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

TEOREM 31

Postoji jedinstvena mjera μ na $(\Omega, \mathcal{F})$

td.

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A) \mu_2(B)$$

Dokaz iz tv-a 9

Neka je npr $A \times B = \bigcup_i A_i \times B_i$ ($A_i \times B_i$ disjunkt.)

pokažimo

$$\mu(A \times B) = \sum \mu(A_i \times B_i)$$

$$x \in A, \quad I(x) = \{i : x \in A_i\}, \quad B(x) = \bigcup_{i \in I(x)} B_i \quad \leftarrow \text{disjunktne}$$

$$\Rightarrow 1_A(x) \mu_2(B) = \sum_i 1_{A_i}(x) \mu_2(B_i) \quad \leftarrow \text{mjer. f-je na } (X, \mathcal{A})$$

$$\Rightarrow \mu_1(A) \mu_2(B) = \sum \mu_1(A_i) \mu_2(B_i)$$

$$\Rightarrow \mu(A \times B) = \mu_1(A) \times \mu_2(B)$$

zadovoljava uvjete
tv. 9.



Pišemo $\mu = \mu_1 \times \mu_2$

a indukcijom to možemo učiniti i za n prostora
odn. mjera

Uz onake gornjeg teorema vrijedi

TEOREM 32 (Fubini)

Ako je $f \geq 0$ ili $\int |f| d\mu < \infty$ tada

$$\int \int_{X \times Y} f(x,y) \mu_2(dy) \mu_1(dx) = \int f d\mu = \int \int_{Y \times X} f(x,y) \mu_1(dx) \mu_2(dy)$$

Dokaz Za indikatorne funkcije slijedi iz
prethodnog teorema, koristeći $\mathbb{I} \rightarrow \lambda$ teorem.

Zatim to proširimo na jednostavne, nenegativne
i konačno općite integrabilne funkcije.

□

TEOREM 33 (o parc. integraciji)

Ako su F i G Stieltjesove fje bez zajedničkih
točaka prekid^{*}, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$$\int_a^b G(x) dF(x) = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F(x) dG(x)$$

NAP^{*} Formula u općenijem slučaju je u Durrettu.

DVA VAŽNA REZULTATA O MJERAMA

DEF Kažemo da je mjera λ na $(X, \mathcal{F})$ apsolutno neprekidna u odn. na mjeru μ na $(X, \mathcal{F})$ ako

$$\mu(E) = 0, E \in \mathcal{F} \Rightarrow \lambda(E) = 0$$

Oznaka $\lambda \ll \mu$

Dvije su mjere međusobno singularne na $(X, \mathcal{F})$ ako postoji skup $A \in \mathcal{F}$ t.d.

$$\lambda(A) = \mu(A^c) = 0$$

Oznaka $\lambda \perp \mu$

TEOREM 34 (Radon-Nikodym)

Neka su λ i μ σ -konačne mjere na $(X, \mathcal{F})$ t.d. $\lambda \ll \mu$ tada postoji nenegativna $\mathcal{F}$ -izmjeniva f.k.f. f t.d.

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu \quad \forall E \in \mathcal{F}$$

TEOREM 35 (Lebesgueov o dekompoziciji)

Neka su λ i μ σ -konačne mjere na $(X, \mathcal{F})$, tada postoje jedinstvene mjere λ_{rep} i λ_{sing} t.d.

$$\lambda = \lambda_{\text{rep}} + \lambda_{\text{sing}}, \quad \lambda_{\text{rep}} \ll \mu \quad \text{ i } \quad \lambda_{\text{sing}} \perp \mu.$$

Na taj osnovi se pokazuje

TEOREM 36

Ako je F f.k.a distribucije tada postoje f.k.e distribucije F_{ac} , F_d , F_{cs} i $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ t.d. $\alpha + \beta + \gamma = 1$

$$F = \alpha F_{ac} + \beta F_d + \gamma F_{cs}$$

gdje je

- F_{ac} apsolutno neprekidna u odu na λ
- F_d je diskretna
- F_{cs} je neprekidna i singularna tj.
 $F'_{cs}(x) = 0$ za gotovo sve x .

POTPUNOST

DEF Vj. prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je potpun ako

$$A \subseteq B \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(B) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{F}$$

Može se pokazati da se svaka σ -algebra može proširiti do potpunosti.

Mi ćemo podrazumijevati da su naše vj. prostore već potpune. Ovo svojstvo je od koristi kod proučavanja slučajnih procesa i stohastičkih integrala.

II ZAKONI VELIKIH BROJEVA

NEZAVISNOST

DEF $A, B \in \mathcal{F}$ su nezavisni događaji ako

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Sl. var X, Y su nezavisne ako $\forall C, D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P(X \in C) P(Y \in D) = P(X \in C, Y \in D)$$

σ -algebre $\mathcal{F}'$ i $\mathcal{G}'$ su nezavisne ako $\forall A \in \mathcal{F}', B \in \mathcal{G}'$

A i B su nezavisni

Jasno $\mathcal{F}', \mathcal{G}' \subseteq \mathcal{F}$.

...

DEF σ -algebre $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ su nezavisne ako

za sve $A_i \in \mathcal{F}_i, i=1, \dots, n$

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

Sl. var. $X_1, \dots, X_n$ su nezavisne ako

za sve $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), i=1, \dots, n$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in B_i\}\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in B_i)$$

Događaji $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ su nezavisni ako za

sve $I \subseteq \{1, \dots, n\}$

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

Beskonačna familija σ -algebri / sluč. varijabli / događaja je nezavisna ako to vrijedi za svaku njenu konačnu potfamiliju.

DEF Za familije $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{F}$ kažemo da su nezavisne ako za sve $A_i \in \mathcal{A}_i, i \in I$ gdje $I \subseteq \{1, \dots, n\}$

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

NAP Očito: ako su $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ nezavisne $\Rightarrow$
 $\mathcal{A}_1 \cup \{\Omega\}, \dots, \mathcal{A}_n \cup \{\Omega\}$ također nezavisne

TEOREM 1

Ako su $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ nezavisne i $\mathcal{A}_i$ je π -sistem za sve i , tada su i

$\sigma(\mathcal{A}_1), \dots, \sigma(\mathcal{A}_n)$ nezavisne

KOROLAR 2

Ako za sve $x_i \in (-\infty, +\infty]$ $i=1, \dots, n$ vrijedi:

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x_i)$$

$\Rightarrow X_1, \dots, X_n$ su nezavisne

Dokaz: Po tm, naime $\mathcal{A}_i = \{ \{X_i \leq x\} : x \in (-\infty, \infty] \}$ su

π -sistem za sve i .

$$A \cap (X_i) = \sigma(\mathcal{A}_i) \Rightarrow \text{trudnja}$$

□

ZAD 1) Ako $f(X_1, \dots, X_n)$ neprekidan ili diskretan sl. vektor ako se gustoba $f_{X_1, \dots, X_n}$ može

faktORIZIRATI sl. varij. $X_1, \dots, X_n$ su neprekidne

TEOREM 3

Ako su $\mathcal{F}_{ij}$, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m(i)$ nezavisne σ -algebre, tada su $\mathcal{G}_i = \sigma(\bigcup_{j=1}^{m(i)} \mathcal{F}_{ij})$ $i=1, \dots, n$ također nezavisne

TEOREM 4

Ako su X_{ij} , $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m(i)$ nezavisne, a $f_i: \mathbb{R}^{m(i)} \rightarrow \mathbb{R}$ izmjenive $\Rightarrow$

$f_i(X_{i1}, \dots, X_{im(i)})$ su nezavisne

NAP Za $X_i, i=1, \dots, n$ nezavisne $\Rightarrow$

npr. X_1 i $X_2 \dots X_n$ su nezavisne

i $\max(S_1, \dots, S_m)$ i $S_n - S_m$ su nezavisne ($m < n$)

gdje $S_m = X_1 + \dots + X_m, m \in \mathbb{N}$

NEZAVISNOST i OČEKIVANJE

TEOREM 5

Ako su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne sl. var. s
razdiobama $\mu_1, \dots, \mu_n$ tada $(X_1, \dots, X_n)$
ima razdiobu $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$.

Dokaz Po definiciji produktnog vj. prostora $\forall A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P((X_1, \dots, X_n) \in A_1 \times \dots \times A_n) = P(\bigcap_{i=1}^n (X_i \in A_i)) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i)$$

$$= \prod_{i=1}^n \mu_i(A_i) = \mu_1 \times \dots \times \mu_n (A_1 \times \dots \times A_n)$$

tm 31, Pog 1 $\Rightarrow$ tvrdnja

□

TEOREM 6 Ako su X, Y nezavisne s razdiobama μ odn. ν , a $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ razmjerna t.d. $h \geq 0$ i.e. $E|h(X, Y)| < \infty$ tada

$$Eh(X, Y) = \iint h(x, y) \mu(dx) \nu(dy)$$

Posebno, ako su f, g razmjerne i $f, g \geq 0$ i.e. $E|f(x)|, E|g(y)| < \infty$ tada

$$Ef(x)g(y) = Ef(x) \cdot Eg(y).$$

Dokaz tm 30 i 32 (Fubini) Pog 1 porlaće trdnju

□

KOROLAR 7 Ako su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne i $X_i \geq 0 \ \forall i$ ili $E|X_i| < \infty \ \forall i \Rightarrow$

$$E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n EX_i.$$

f. očekivanje na l.s postoji i zadovoljava jednakost

D. Jasno, prihvatite samo da su po napomeni

X_1 & $X_2 \dots X_n$ nezavisne

pa iskoristite indukciju

□

KONVOLUCIJA

TEOREM 8 Neka su X, Y nezavisne s fjanama distribucijama F odn G tada

$$P(X+Y \leq z) = \int F(z-y) dG(y)$$

Integral na d.s. se naziva konvolucija od F i G u točki z .

Dokaz Po kondanu 7 za $\mu \sim F, \nu \sim G$ razdiobe

$$\begin{aligned} P(X+Y \leq z) &= \iint 1_{\{x+y \leq z\}} \mu(dx) \nu(dy) \\ &= \int F(z-y) dG(y) \end{aligned}$$

□

TEOREM 9 Ako je X neprekidna i nezavisna od Y koja ima fjanu distrib G , tada $X+Y$ ima gustoću

$$h(x) = \int f(x-y) dG(y),$$

gdje je f gustoća od X . Ako Y ima gustoću g tada je

$$h(x) = \int f(x-y) g(y) dy$$

Primjer (gama razdioba)

$\Gamma(\alpha, \lambda)$ ima gustoću

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Pokazuje se : tm 3 $\Rightarrow$

$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda), Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$ nezavisne

tada $X+Y \sim \Gamma(\alpha+\beta, \lambda)$

$\Downarrow$

$X_1, \dots, X_n$ nezavisne $\sim \text{Exp}(\lambda)$

tada $X_1 + \dots + X_n \sim \Gamma(n, \lambda)$

7

Primjer (normalna razdioba)

$N(\mu, \sigma^2)$ ima gustoću

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

tm 3 $\Rightarrow$

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ nezavisne

tada $X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

Primjer (Poissonova razdioba)

$X, Y \sim P(\lambda_1), P(\lambda_2)$ nezavisne

$\Rightarrow X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

8

KONSTRUKCIJA NEZAVISNIH SL. VAR.

Postoje li $X_1, \dots, X_n$ t.d. $X_i \sim F_i$ te da su X_i nezavisne?

Nadamo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ t.d. stavimo

$$\Omega = \mathbb{R}^n, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})^n, X_i(\omega_1, \dots, \omega_n) = \omega_i \quad i$$

$$P([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]) = (F_1(b_1) - F_1(a_1)) \cdot \dots \cdot (F_n(b_n) - F_n(a_n)).$$

gdj. $P = \mu_1 \times \dots \times \mu_n$ gdje je

μ_i razdioba s fjom. dist. F_i

Ako želimo napraviti beskonačan niz (X_i) nezavisnih sl. var. postavimo

$$\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_i \in \mathbb{R}\} \quad \text{skup svih realnih nizova}$$

Produktna σ -algebra $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ neka je generirana skupovima (cilindrima)

$$A_{B_1, \dots, B_n} = \{\omega : \omega_i \in B_i \quad i=1, \dots, n\} \quad \text{za proizvoljne } B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Ako želimo $X_i \sim F_i$, možemo opet postaviti

$$X_i(\omega) = \omega_i. \quad \text{Htjeli bismo}$$

$$P(A_{B_1, \dots, B_n}) = \mu_n(B_1 \times \dots \times B_n) \quad \text{gdje je}$$

μ_n razdioba sl. vek. $(X_1, \dots, X_n)$.

TEOREM 10 (Kolmogorovljevi tm. o proširenju)

Neka su μ_n razdiobe na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ koje su konzistentne tj.

$$\mu_{n+1}([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \times \mathbb{R}) = \mu_n([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n])$$

Tada postoji jedinstvena vjeroj. mjera na $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ t.d.

$$P(\omega : \omega_i \in [a_i, b_i], i=1, \dots, n) = \mu_n([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n])$$

9

Za općeniti metrički prostor s pripadnom Borelovom σ -algebrom $(S, \mathcal{S})$ možemo na isti način definirati $S^{\mathbb{N}}$ i $\mathcal{S}^{\mathbb{N}}$

Ako je S separabilan, tada je

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ sluč. element u $(S^{\mathbb{N}}, \mathcal{S}^{\mathbb{N}})$

$\Leftrightarrow \xi_i$ su sluč. elementi u $(S, \mathcal{S})$

To inače ne mora vrijediti, pa vezano s tim ni Kolmogorovljevi teorem ne vrijedi u općenitim metričkim prostorima.

Prostor $(S, \mathcal{S})$ je zgodan (standardni Borelov prostor) ako postoji bijekcija sa S u $\mathbb{R}$ t.d. su f i f^{-1} izmjenice

TEOREM 11 Ako je S Borelov podsкуп potpunog separabilnog metr. prostora M , a $\mathcal{S}$ je Borelova σ -algebra na S , tada je $(S, \mathcal{S})$ zgodan.

SLABI ZAKONI VELIKIH BROJEVA

DEF Kažemo Y_n konvergira ka Y po vjerojatnosti ako $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|Y_n - Y| > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

oznaka

$$Y_n \xrightarrow{P} Y$$

Prisjetimo se: prvi slabi zakoni slijede iz Čebiševljeve nejed. i činjenice da za $X_i, i=1, \dots, n$ nekorelirane, t.d. $EX_i^2 < \infty$

⇓

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)$$

LEMA 12 Ako $E|Z_n|^p \rightarrow 0$ za $p > 0$ tada

$$Z_n \xrightarrow{P} 0, n \rightarrow \infty$$

Dokaz

Markovljeva nejedn. $\Rightarrow$

$$P(|Z_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|Z_n|^p}{\varepsilon^p} \rightarrow 0 \quad \square$$

$$\text{Var}(X) = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$$

$$\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var} X$$

TEOREM 13 (L^2 slabi zakon)

Ako su $X_1, X_2, \dots$ nekorelirane t.d. $EX_i = \mu$

i $\text{Var} X_i \leq C < \infty \quad \forall i$. Tada

$$S_n/n \xrightarrow{P} \mu \quad \text{i} \quad S_n/n \xrightarrow{L^2} \mu$$

~~Dokaz~~ Dokažimo L^2 konvergenciju

$$E\left(\frac{S_n}{n} - \mu\right)^2 = \text{Var} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n^2} \text{Var} S_n \leq \frac{C}{n} \rightarrow 0$$

sad konv. po rjnoj. slijedi iz Čebiš. nejedn.

□

11

Najvažniji specijalni slučaj je kada su X_i također n.j.d., pokazat ćemo da je za $S_n/n \xrightarrow{P} \mu$ dovoljno tada i $E|X_i| < \infty$

Primjer (visokodimenzionalna kocka je "skoro sfera")

Neka su $X_i \stackrel{\text{njd}}{\sim} U(-1, 1)$, $Y_i = X_i^2$ jasno

$$\text{Var} Y_i < \infty, \quad EY_i = 1/3 \Rightarrow \frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n} \xrightarrow{P} 1/3$$

$$\Rightarrow A_{n,\varepsilon} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (1-\varepsilon)\sqrt{n/3} < \|x\|_2 < (1+\varepsilon)\sqrt{n/3} \right\}, \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\text{Zaključava} \quad \lambda(A_{n,\varepsilon})/2^n \rightarrow 1 \quad \uparrow$$

$$P((X_1, \dots, X_n) \in A_{n,\varepsilon})$$

$\Rightarrow$ najveći dio volumena kocke dolazi od $A_{n,\varepsilon}$ koji je "približno" sfera radijusa $\sqrt{n/3}$

TROKUTASTI NIZOVI

$$\bullet (X_{n,k}) \quad k=1, \dots, n, n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet S_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,n}$$

← čest objekt ganihila
teorema u vjerojatnosti
(tipično nezavisni
po redima)

THEOREM 14

Za proizvoljan niz sl.var. (S_n) t.d. $\sigma_n^2 = \text{Var} S_n < \infty$
i $\mu_n = ES_n$, ako $\sigma_n^2 / b_n^2 \rightarrow 0$ tada

$$\frac{S_n - \mu_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0$$

NAP 12 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \geq \int_1^n \frac{dx}{x} \geq \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \Rightarrow$
 $\log n \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq 1 + \log n$

Primjer (coupon's collector problem)

$X_i \stackrel{\text{njed}}{\sim}$ uniformne na $\{1, 2, \dots, n\}$

$$T_k^n = \inf \{m: |\{X_1, \dots, X_m\}| = k\}$$

$$T_n = T_n^n, \text{ stavimo: } T_0^n = 0$$

Za $X_{n,k} = T_k^n - T_{k-1}^n$ jasno vrijedi:

$X_{n,k} \sim$ geometrijska s par. $1 - \frac{(k-1)}{n} = p_k^n$
& nezavisna od $X_{n,1}, \dots, X_{n,k-1}$

$$\Rightarrow EX_{n,k} = 1/p_k^n \quad \text{Var } X_{n,k} \leq 1/(p_k^n)^2$$

$$\Rightarrow ET_n = \sum_1^n \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^{-1} = n \sum_1^n \frac{1}{m} \sim n \log n$$

$$\text{Var} T_n \leq \sum_1^n \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^{-2} = n^2 \sum_1^n \frac{1}{m^2} \leq n^2 \sum_1^\infty \frac{1}{m^2}$$

Iskonistimo tm za $b_n = n \log n$

$$\Rightarrow \frac{T_n - n \sum_1^n \frac{1}{m}}{n \log n} \xrightarrow{P} 0$$

$$\Rightarrow T_n / n \log n \xrightarrow{P} 1$$

REZANJE

Ako je X sl. var., a $M > 0$ za

$$\bar{X} = X \cdot \mathbb{1}_{(|X| \leq M)}$$

kažemo da je X odrezana na nivou M

THEOREM 15 (S.Z. ZATROKUTASTE NIZOVE) Neka su za n

$X_{n,k}$ $k=1, \dots, n$ nezavisne i neka $b_n > 0$, $b_n \rightarrow \infty$, te

$\bar{X}_{n,k} = X_{n,k} \mathbb{1}_{|X_{n,k}| < b_n}$. Pretpostavite

i) $\sum_1^n P(|X_{n,k}| > b_n) \rightarrow 0$

ii) $b_n^{-2} \sum_1^n E \bar{X}_{n,k}^2 \rightarrow 0$

Tada $\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0$, za $a_n = \sum_1^n E \bar{X}_{n,k}$

TEOREM 16 (SLABI ZAKON VELIKIH BROJEVA)

Neka su $X_1, X_2, \dots$ ijd i neka

$$x P(|X_i| > x) \rightarrow 0 \quad x \rightarrow \infty$$

Za $\mu_n = E(X_i 1_{|X_i| \leq n})$ i $S_n = X_1 + \dots + X_n$ vrijedi:

$$S_n/n - \mu_n \xrightarrow{P} 0$$

NAP Uvjet u tm-u je nužan za postojanje niza a_n t.d. $S_n/n - a_n \xrightarrow{P} 0$

Dokaz Ispolisticimo prethodni tm za $X_{n,k} = X_n$, $b_n = n$
uocite $\sum_1^n P(|X_{n,k}| > n) = n P(|X_i| > n) \rightarrow 0 \quad \checkmark$

LEMA 17 Za $y \geq 0$, $p > 0$

$$E y^p = \int_0^\infty p y^{p-1} P(|Y| > y) dy$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty p y^{p-1} P(Y > y) dy &= \int_0^\infty \int_0^\infty p y^{p-1} 1_{y > y} dP dy = \text{Fubini} \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty p y^{p-1} 1_{y > y} dy dP = \int_0^\infty y^p dP = E y^p \quad \square \end{aligned}$$

Za dokaz tm-a ostaje vidjeti još ii) iz prethodnog tm-a tj.

$$\underbrace{\bar{n}^2 \cdot n \cdot E \bar{X}_{n,1}^2}_{= 1/n} \rightarrow 0$$

TEOREM 18 Neka su $X_1, X_2, \dots$ njd t.d. $E|X_1| < \infty$

za $\mu = EX_1$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ vrijedi

$$S_n/n - \mu \xrightarrow{P} 0 \quad \& \quad S_n/n \xrightarrow{P} \mu$$

Dokaz Tm o.d.k. $\Rightarrow$

$$x P(|X_1| > x) \leq E(|X_1| 1_{|X_1| > x}) \rightarrow 0 \quad x \rightarrow \infty$$

$$i \quad \mu_n = E(X_1 1_{|X_1| \leq n}) \rightarrow \mu = EX_1 \quad n \rightarrow \infty$$

$\Downarrow$

$$P(|S_n/n - \mu| > \varepsilon) \leq P(|S_n/n - \mu_n| > \varepsilon/2) + P(|\mu_n - \mu| > \varepsilon/2)$$

$\downarrow$
0 po J.Z.V.B.

$\downarrow$
0 $\mu_n \rightarrow \mu$

□

NAP Uocite da po lemi 17 $E|X_1|^{1-\varepsilon} < \infty \quad \forall \varepsilon > 0$

$$\text{tj.} \quad x P(|X_1| > x) \rightarrow 0$$

Dakle postojanje 1. momenta i nije puno jači zahtjev u odn. na tm prije.

Primjer (Cauchyeva razdioba)

$$P(|X_1| > x) = \frac{2}{\pi} \int_x^\infty \frac{dt}{1+t^2} \sim \frac{2}{\pi} \int_x^\infty \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{x} \quad x \rightarrow \infty$$

Po nap. o nužnosti $\Rightarrow$ ~~$\nexists$~~ a_n t.d. $S_n/n - a_n \xrightarrow{P} 0$

Pokazuje se

$$S_n/n \stackrel{d}{=} X_1$$

BOREL-CANTELLIJEVA LEMMA

(A_n) niz u $\mathcal{F}$

$$\limsup A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_m A_n = \{ \omega : \omega \in A_n \text{ b.c.} \}$$

$$\liminf A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_m A_n = \{ \omega : \omega \in A_n \text{ z.s.o.k.m.} \}$$

Uočište

$$\mathbb{1}_{\limsup A_n} = \limsup \mathbb{1}_{A_n}$$

$$\mathbb{1}_{\liminf A_n} = \liminf \mathbb{1}_{A_n}$$

$$X_n \xrightarrow{p.s.} 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P\{|X_n| > \varepsilon \text{ b.c.}\} = 0$$

TEOREM 19 (prva Borel-Cantelli lemma)

$$\text{Ako } \sum_1^\infty P(A_n) < \infty \Rightarrow P(\limsup A_n) = 0$$

Dokaz Za $N = \sum_1^\infty \mathbb{1}_{A_n}$ Fubinijev tm. postaci:

$$EN = \sum_1^\infty P(A_n) < \infty \Rightarrow P(N = +\infty) = 0 \quad \square$$

TEOREM 20 $X_n \xrightarrow{p} X \Leftrightarrow$ za svaki podniz $X_{n(m)}$,

postoji podpodniz $X_{n(m_k)}$ t.d. $X_{n(m_k)} \xrightarrow{p.s.} X$

(NAP) Tvrdnja vrijedi i za sluč. elemente, a i dokaz je u suštini isti.

DEF Za slučajne elemente $(X_n), X$ u metričkom prostoru (S, ρ) kažemo $X_n \xrightarrow{P} X$ ako

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(\rho(X_n, X) > \varepsilon) \rightarrow 0$$


- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \text{ t.d. } \forall n \geq n_0$



$$P(\rho(X_n, X) > \varepsilon) < \varepsilon$$

- $E[\rho(X_n, X) \wedge 1] \rightarrow 0$

THEOREM 21 Slučajni elementi $(X_n), X$ zadovoljavaju $X_n \xrightarrow{P} X \iff$ za svaki podniz $(X_{n(m)})$ postoji podpodniz $(X_{n(m_k)})$ t.d. $X_{n(m_k)} \xrightarrow{g.s.} X$

NAP Iz teorema 20 i 21 je jasno da konvergencija po vjerojatnosti ovisi samo o topologiji na (S, ρ) a ne o konkretnoj metnici.

Također je očito sada da i za slučajne elemente $X_n \xrightarrow{g.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$

TEOREM 22 Ako $X_n \xrightarrow{P} X$, a f je neprekidna
 $\Rightarrow f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$. Ako je f još ograničena
 $\Rightarrow Ef(X_n) \rightarrow Ef(X)$.

Dokaz Ako je $X_{n(n)}$ podniz $\Rightarrow \exists (X_{n(n_k)})$ t.d. $X_{n(n_k)} \xrightarrow{a.s.} X$
 $\Rightarrow f(X_{n(n_k)}) \xrightarrow{a.s.} f(X) \Rightarrow f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$ jer je

$n(n)$ proizvoljan
 Druga tvrdnja je posledica tn. o dom. konv. $\square$

TEOREM 23 Ako su $X_1, X_2, \dots$ n.j.d. $EX_i = \mu, EX_i^4 < \infty$
 $\Rightarrow S_n/n = (X_1 + \dots + X_n)/n \xrightarrow{a.s.} \mu \quad \Rightarrow$ prva teorema
 J.Z.V.B.

TEOREM 24 (druga Borel-Cantelli lemma)

Ako su događaji A_n nezavisni

$$\sum P(A_n) = +\infty \Rightarrow P(\limsup A_n) = 1$$

Dokaz Za $M < N < \infty$, iz $1 - x \leq e^{-x} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{n=M}^N A_n^c\right) &= \prod_{n=M}^N (1 - P(A_n)) \leq \prod_{n=M}^N \exp(-P(A_n)) \\ &= \exp\left(-\sum_{n=M}^N P(A_n)\right) \rightarrow 0 \quad \text{za } N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n=M}^{\infty} A_n\right) &= 1 \quad \forall M \quad \text{kako } \bigcup_{n=M}^{\infty} A_n \supset \limsup A_n \\ &\Rightarrow P(\limsup A_n) = 1 \end{aligned}$$

TEOREM 27 Ako su $X_1, X_2, \dots$ n.j.d. t.d. $E|X_i| = +\infty$,
 tada $P(|X_n| \geq n \text{ b.č.}) = 1$. Tada vrijedi i

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \text{ postoji u } (-\infty, \infty)\right) = 0$$

~~Dokaz~~ Iz leme 17 $\Rightarrow$

$$E|X_1| = \int_0^{\infty} P(|X_1| > x) dx \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(|X_1| > n)$$

Iz $E|X_1| = +\infty$, X_i n.j.d. & 2.3-C leme $\Rightarrow P(|X_n| \geq n \text{ b.č.}) = 1$

Uočimo

$$\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1} = \frac{S_n}{n(n+1)} - \frac{X_{n+1}}{n+1}$$

Neka je $C \equiv \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \text{ postoji u } (-\infty, \infty) \right\}$

Na C vrijedi $\frac{S_n}{n(n+1)} \xrightarrow{\text{j.s.}} 0$

Dakle na $C \cap \{|X_n| \geq n \text{ b.č.}\}$

$$\Rightarrow \left| \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1} \right| > 2/3 \text{ b.č.}$$

$\Rightarrow \frac{S_n}{n}$ nije C -niz i ne konvergira u $(-\infty, \infty)$

$$\Rightarrow C \cap \{|X_n| \geq n \text{ b.č.}\} = \emptyset$$

Kako je $P(|X_n| \geq n \text{ b.č.}) = 1$

$$\Rightarrow P(C) = 0$$

□

NAP Dakle za j.z.v.b. nužno je $E|X_i| < \infty$,
 vidjet ćemo da je taj uvjet i dovoljan.

TEOREM 25 (profinjena 2.B.-C. lema)

Ako su događaji $A_1, A_2, \dots$ po parovima nezavisni

i $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, tada za $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\sum_{m=1}^n 1_{A_m}}{\sum_{m=1}^n P(A_m)} \xrightarrow{\text{j.s.}} 1$$

(NAP) Iz dokaza $\Rightarrow$ ako $\exists$ podniz n_k t.d. $\frac{c_{n_k m}}{c_{n_k}} \rightarrow 1$

$$\& \frac{X_{n_k}}{c_{n_k}} \xrightarrow{\text{j.s.}} 1 \Rightarrow \frac{X_n}{c_n} \xrightarrow{\text{j.s.}} 1$$

Primjer (rekordi)

Neka su $X_1, X_2, X_3, \dots$ n.j.d. i neprekidne sl. var., te

$$A_k = \{X_k > \sup_{j < k} X_j\}$$

Vnijedi: A_k su nezavisni dog., $P(A_k) = 1/k$

$$\text{Kako } \sum_{i=1}^n 1/i \sim \log n \Rightarrow$$

TEOREM 26 Za $R_n = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}$ (broj rekorda do trenutka n) vnijedi:

$$R_n / \log n \xrightarrow{\text{j.s.}} 1$$

(NAP) Iz dokaza $\Rightarrow$ za X_i n.j.d. neprekidne i

$$Y_i = \#\{j \leq i : X_j > X_i\} \Rightarrow$$

Y_i su nezavisne i $P(Y_i = k) = \frac{1}{i}$ $k=0, \dots, i-1$

Primjer (niz uspjeha ; Erdős-Rényi)

Neka su $X_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, za $i \in \mathbb{Z}$

$$l_n = \max \{ m : X_{n-m+1} = \dots = X_n = 1 \}$$

$$L_n = \max_{1 \leq m \leq n} l_m \leftarrow \text{najdulji niz uspjeha do } n$$

$\Rightarrow P(l_n = k) = 1/2^{k+1}$, za $k \geq 0$. Pokazuje se

da
$$L_n / \log_2 n \xrightarrow{\text{j.s.}} 1$$

i u slučaju $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ s istom raspodjelom i prilagođenom definicijom od l_n .

JAKI ZAKON VELIKIH BROJEVA

TEOREM 28 (JZVB) Neka su $X_i, i \geq 1$ po parovima nezavisne i jedn. distrib. sl. var. t.d. $E|X_i| < \infty$. Za $\mu = EX_1$ i $n \rightarrow \infty$ vrijedi:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{j.s.}} \mu$$

Prva (Etemadi, 1981)

Prvo trebamo tri leme

LEMA 29 Za $Y_k = X_k \mathbb{1}_{|X_k| \leq k}$ i $T_n = Y_1 + \dots + Y_n$

$$\text{iz } T_n/n \xrightarrow{\text{j.s.}} \mu \Rightarrow S_n/n \xrightarrow{\text{j.s.}} \mu$$

LEMA 30 Za $y \geq 0$ $2y \sum_{k \geq y} k^{-2} \leq 4$

LEMA 31 $\sum_{k=1}^{\infty} \text{Var}(Y_k)/k^2 \leq 4 E|X_1| < \infty$

Rezultati i gornje leme su standardne u dokazima, no Etemadi je uočio da tako X^+, X^- zadovoljavaju uvjete teorema,

b.s.o.m.p. $X_n \geq 0$.

Također dokazat ćemo da $\frac{T_{k(n)}}{k(n)} \xrightarrow{\text{g.s.}} EX_1$ za podniz $k(n)$ t.d.

$k(n) = \lfloor \alpha^n \rfloor$ za proizvoljan $\alpha > 1$

Za $\varepsilon > 0$, Čebiševljeva n. $\Rightarrow$

$$\sum_1^{\infty} P(|T_{k(n)} - ET_{k(n)}| > \varepsilon k(n)) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_1^{\infty} \text{Var}(T_{k(n)}) \cdot \frac{1}{k(n)^2}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{k(n)^2} \sum_{m=1}^{k(n)} \text{Var} Y_m = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{m=1}^{\infty} \text{Var} Y_m \sum_{n: k(n) \geq m} \frac{1}{k(n)^2}$$

Fubini

12 $k(n) = \lfloor \alpha^n \rfloor$ i $\lfloor \alpha^n \rfloor \geq \alpha^n/2 \Rightarrow$

$$\sum_{n: \alpha^n \geq m} \lfloor \alpha^n \rfloor^{-2} \leq 4 \sum_{n: \alpha^n \geq m} \alpha^{-2n} \leq 4(1 - \alpha^{-2})^{-1} \cdot \frac{1}{m^2}$$

$$\Downarrow \sum_1^{\infty} P(|T_{k(n)} - ET_{k(n)}| > \varepsilon k(n)) \leq \frac{4(1 - \alpha^{-2})^{-1}}{\varepsilon^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{Var} Y_m}{m^2} < \infty$$

$$\Rightarrow (T_{k(n)} - ET_{k(n)})/k(n) \xrightarrow{\text{g.s.}} 0 \quad \text{po 1. B.C. lemi}$$

Tim o dominiranoj konvergenciji $\Rightarrow EY_k \rightarrow EX_1$

$\Rightarrow \frac{ET_{k(n)}}{k(n)} \rightarrow EX_1$ također (Cesaro means)

$\Rightarrow \frac{T_{k(n)}}{k(n)} \xrightarrow{\text{j.s.}} EX_1$

Za $m \in [k(n), \dots, k(n+1))$ jasno iz $Y_i \geq 0 \Rightarrow$

$$\frac{T_{k(n)}}{k(n+1)} \leq \frac{T_m}{m} \leq \frac{T_{k(n+1)}}{k(n)}$$

kako $k(n+1)/k(n) \rightarrow \alpha \Rightarrow$

$$\frac{1}{\alpha} EX_1 \leq \liminf \frac{T_m}{m} \leq \limsup \frac{T_m}{m} \leq \alpha EX_1$$

Za sve $\alpha > 1$

□

TEOREM 32 Neka su (X_i) njd t.d. $EX_i^+ = \infty$

i $EX_i^- < \infty$, tada $S_n/n \xrightarrow{\text{j.s.}} +\infty$

Prvo Za $M > 0$, stavimo $X_i^M = X_i \wedge M$, $\Rightarrow X_i^M$ njd

i $E|X_i^M| < \infty \Rightarrow$ (JZVB)

$$S_n^M/n = (X_1^M + \dots + X_n^M)/n \xrightarrow{\text{j.s.}} EX_1^M$$

iz $S_n \geq S_n^M \Rightarrow$

$$\liminf S_n/n \geq \lim S_n^M/n = EX_1^M \quad \text{j.s.}$$

Tim o monoton. konverg $\Rightarrow E(X_i^M)^+ \nearrow EX_i = +\infty$

$\Rightarrow EX_i^M \nearrow +\infty$

□

Primjer (teorija obnavljanja)

(X_i) n.j.d., $X_i > 0$, $T_n = X_1 + \dots + X_n$, $T_0 = 0$

$N_t = \sup \{n : T_n \leq t\}$ $\leftarrow$ "broj žarulja zamijenjenih do t "

TEOREM 33 Ako $EX_1 = \mu < +\infty$, za $t \rightarrow \infty$

$$N_t/t \xrightarrow{\text{g.s.}} 1/\mu \quad (1/\infty = 0)$$

Za (X_i) n.j.d. s fkom distribucije F , definiramo

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n 1_{(X_m \leq x)}$$

J.Z.V.B. $\Rightarrow \hat{F}_n(x) \xrightarrow{\text{g.s.}} F(x)$ po svj. i uniformna konvergencija

TEOREM 34 (Glivenko Cantelli)

Za $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)| \xrightarrow{\text{g.s.}} 0$$

Primjer (Shannonov teorem)

Neka su $X_i \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ p(1) & p(2) & & p(r) \end{pmatrix}$

$$\pi_n = p(X_1) \cdots p(X_n) \leftarrow \text{vjeroj. danog uzorka}$$

$$\stackrel{\text{JZVB}}{\Rightarrow} -\frac{\log \pi_n}{n} \xrightarrow{\text{g.s.}} H = -E \log p(X_i) \\ = -\sum_{k=1}^r p(k) \cdot \log p(k)$$

entropija
izvora (koji odasijeljuje niz (X_i))

$$\Rightarrow P(e^{-n(H+\varepsilon)} \leq \pi_n \leq e^{-n(H-\varepsilon)}) \rightarrow 1$$

za sve $\varepsilon > 0$.

KONVERGENCIJA SLUČ. REDOVA

Za niz sl. var. (X_i) definiramo

$$\mathcal{F}_n' = \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$$

$$\& \quad \mathcal{I} = \bigcap \mathcal{F}_n' \quad \leftarrow \text{nepna } \sigma\text{-algebra} = \text{"dogodaji koji ne ovise o konačnom broju } X_i \text{eva"}$$

Npr.

$$\bullet \quad B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \{X_n \in B_n \text{ b.č.}\} \in \mathcal{I}$$

$$\bullet \quad \begin{aligned} &\{ \lim S_n \text{ postoji} \} \in \mathcal{I} \\ &\{ \limsup S_n > 0 \} \notin \mathcal{I} \\ &\{ \limsup \frac{S_n}{c_n} > x \} \in \mathcal{I} \quad \text{ako } c_n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

TEOREM 35 (Kolmogorovljev 0-1 zakon)

Ako su (X_i) nezavisne, $A \in \mathcal{I} \Rightarrow P(A) = 0$ ili 1

TEOREM 36 (Kolmogorovljeva nejednakost za maksimume)

Ako su (X_i) nezavisne t.d. $EX_i = 0$, $\text{Var } X_i < \infty$
tada

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x\right) \leq \frac{1}{x^2} \text{Var } S_n$$

TEOREM 37 Neka su (X_i) nezavisne, $EX_i = 0$,

ako $\sum_1^\infty \text{Var } X_n < \infty$ tada
 $\sum_1^\infty X_n$ konvergira g.s.

Dokaz

$$P\left(\max_{M \leq m \leq N} |S_m - S_M| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}(S_N - S_M) = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=M+1}^N \text{Var } X_n$$

$$\Rightarrow P\left(\sup_{m \geq M} |S_m - S_M| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=M+1}^{\infty} \text{Var } X_n \xrightarrow{\text{za } M \rightarrow \infty} 0$$

Neka

$$W_M = \sup_{n, m \geq M} |S_m - S_n| \Rightarrow W_M \text{ pada za } M \uparrow$$

$$P(W_M > 2\varepsilon) \leq P\left(\sup_{m \geq M} |S_m - S_M| > \varepsilon\right) \rightarrow 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

$\Rightarrow W_M \rightarrow 0$ g.s. za $M \rightarrow \infty \Rightarrow S_n$ je C-niz g.s. $\square$

TEOREM 38 (Kolmogorovljevo 3. reda)

Neka su (X_i) nezavisne, $A > 0$, $Y_i = X_i \cdot 1_{|X_i| \leq A}$

Da bi $\sum_1^\infty X_n$ konvergirao g.s. nužno je i dovoljno da

- i) $\sum_1^\infty P(|X_n| > A) < \infty$
- ii) $\sum_1^\infty EY_n$ konvergira
- iii) $\sum_{n=1}^\infty \text{Var } Y_n < \infty$

TEOREM 39 (Kroneckerova lema)

Ako $a_n \nearrow +\infty$, $\sum_{k=1}^\infty X_k/a_k$ konvergira tada

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n X_k \rightarrow 0$$

Iz zadnja dva teorema slijedi:

TEOREM 40 (JZVB ponovo)

Neka su (X_i) n.j.d. i $E|X_i| < \infty$. Za $\mu = EX_1$ i $n \rightarrow \infty$

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{g.s.}} \mu$$

BRZINA KONVERGENCIJE

TEOREM 41 Za (X_i) n.j.d. t.d. $EX_i = 0, EX_i^2 = \sigma^2 < \infty$,
 $\forall \varepsilon > 0$

$$\frac{S_n}{\sqrt{n} (\log n)^{1+\varepsilon}} \xrightarrow{\text{g.s.}} 0$$

(NAP) Pokazuje se (upr. konstanti: Brownovo gibanje kao aproks. setuje)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n \log \log n}} = \sigma \sqrt{2} \quad \text{g.s.}$$

(zakon ponovljenog algoritma, Kolmogorov)

TEOREM 42 (Marcinkiewicz - Zygmund)

Za (X_i) n.j.d. i $EX_i = 0, EX_i^p < \infty \quad p \in (1, 2)$

$$\frac{S_n}{n^{1/p}} \xrightarrow{\text{g.s.}} 0 \quad (1)$$

Dakle, čak i za X_i t.d. $EX_i^2 = +\infty$, možemo reći nešto o brzini konvergencije $S_n/n \xrightarrow{\text{g.s.}} 0$.

(1) znači: $S_n = o(n^{1/p}) \quad \text{g.s.}$

$$\text{tj. } \frac{S_n}{n} = o(n^{1/p-1}) \quad \text{g.s.}$$

BESKONAČNO OČEKIVANJE

TEOREM 43 (Feller)

Neka je (X_n) n.j.d. niz t.d. $E|X_1| = +\infty$, a (a_n) niz pozitivnih brojeva t.d. a_n/n raste, tada

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n|}{a_n} = \begin{cases} 0 & \text{ako } \sum P(|X_1| > a_n) < \infty \\ \infty & \text{ako } \sum P(|X_1| > a_n) = \infty \end{cases}$$

Dakle, ako $E|X_1| = +\infty$, S_n/a_n ne može konvergirati g.s. ka konačnom limesu.

VELIKE DEVIJACIJE

• $X_1, X_2, \dots$ n.j.d. $EX_i = \mu$

• za $a > \mu \Rightarrow$

$$P(S_n > na) \rightarrow 0 \quad (1)$$

no pitanje je koliko brzo.

DEF Za sluč. varijablu X definiramo funkciju izvodnica momenata kao

$$\varphi(v) = Ee^{vX}$$

za sve v za koje je ovo očekivanje konačno

Pokazuje se: ako $E e^{uX_1} = \varphi(u) < \infty$ za neki $u > 0$. Vjerojatnosti u (1) opadaju eksponencijalno brzo, čak ćemo odrediti:

$$\gamma(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(P(S_n \geq na)) \leq 0$$

Uočimo: $\pi_n = P(S_n \geq a \cdot n)$ zadovoljavaju

$$\pi_{m+n} \geq P(S_m \geq m \cdot a, S_{n+m} - S_m \geq na) = \pi_m \cdot \pi_n$$

← nezavisne →

tj. niz $\gamma_n = \log \pi_n$ je superaditivan

LEMA 44 Ako $\gamma_{m+n} \geq \gamma_m + \gamma_n$, tada

$$\gamma_n/n \rightarrow \sup_m \gamma_m/m$$

Lema povlači:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(S_n \geq n \cdot a) = \gamma(a) \quad \text{postoji i } \leq 0$$

te $\frac{\gamma_m}{m} \leq \gamma(a) \quad \forall m$ tj.

$$P(S_n \geq na) \leq e^{n\gamma(a)}$$

Jasno sad (D.2.)

$$\gamma(a) = -\infty \Leftrightarrow P(|X_1| > a) = 0 \Leftrightarrow P(S_n \geq na) = 0 \quad \forall n$$

U nastavku pretpostavljamo

$$(\#1) \quad \varphi(v) = E e^{vX_1} < \infty \quad \text{za neki } v > 0$$

uredimo

$$v_+ = \sup \{v : \varphi(v) < \infty\}, \quad v_- = \inf \{v : \varphi(v) < \infty\}.$$

]osno

$$v \in (v_-, v_+) \Rightarrow \varphi(v) < \infty$$

$$(\#1) \Rightarrow EX_1^+ < \infty \Rightarrow EX_1 = EX_1^+ - EX_1^- \in [-\infty, \infty)$$

||
 μ

Markovljeva nejednakost $\rightarrow$

$$e^{vna} P(S_n \geq na) \leq E e^{vS_n} = \varphi(v)^n$$

pa za $K(v) = \log \varphi(v)$

$$P(S_n \geq na) \leq \exp(-n(av - K(v))) \quad (2)$$

LEMA 45 Za $a > \mu$ i $v > 0$ dovoljno mali

$$av - K(v) > 0$$

(2) predstavlja gornju ogradu za svaki v , no korisno je uoči najmanju od njih tj.

$$\max_v \{av - K(v)\}$$

Uočimo

$$\frac{d}{dv} \{av - \kappa(v)\} = a - \frac{\ell'(v)}{\ell(v)}$$

pa bismo mogli očekivati da optimalni v zadovoljava

$$\ell'(v)/\ell(v) = a$$

Definiramo

$$F_v(x) = \frac{1}{\ell(v)} \int_{-\infty}^x e^{vx} dF(y) \quad \text{za } v \in (v_-, v_+)$$

← FUNKCIJE DISTRIBUCIJE

Iz dokaza leme $\Rightarrow$

$$\int x dF_v(x) = \frac{1}{\ell(v)} \int x e^{vx} dF(x) = \frac{\ell'(v)}{\ell(v)}$$

Koristeći tu o dom. konvergenciji funkciju ℓ možemo derivirati dva puta za $v \in (v_-, v_+)$ i tada

$$\ell''(v) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{vx} dF(x)$$

⇓

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv} \frac{\ell'(v)}{\ell(v)} &= \frac{\ell''(v)}{\ell(v)} - \left(\frac{\ell'(v)}{\ell(v)} \right)^2 = \int x^2 dF_v(x) - \left(\int x dF_v(x) \right)^2 \\ &= \text{Var} \text{ u } F_v \geq 0 \end{aligned}$$

ako F nije degenerirana

$$\Rightarrow \frac{\ell'(v)}{\ell(v)} \text{ je striktno rastuća}$$

$$\Rightarrow av - \kappa(v) \text{ je konkavna funkcija}$$

LEMA 46

$$X_1 + \dots + X_n \sim F^n, \quad X_1^\lambda + \dots + X_n^\lambda \sim F_\lambda^n$$

$$\frac{dF^n}{dF_\lambda^n}(\lambda) = e^{-\lambda x} \ell(\lambda)^n$$

TEOREM 47 (Cramér)

Pretpostavite $E e^{v x_i} < \infty$, za neki $v > 0$, a razdioba od X_i nije koncentrirana u μ , ako postoji $v_n \in (0, v_+)$ t.d. $a = \ell'(v_n) / \ell(v_n)$, tada

$$\frac{1}{n} \log P(S_n \geq na) \rightarrow -a v_n + \log \ell(v_n)$$

...

III CENTRALNI GRANIČNI TEOREMI

DE MOIVRE - LAPLACE.

$$X_i \stackrel{\text{njed}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

stirlingova formula

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

LEMA 1 a) $a_j \rightarrow \infty, a_j c_j \rightarrow \lambda \Rightarrow (1 + c_j)^{a_j} \rightarrow e^\lambda$

b) $\max_j |c_{j,n}| \rightarrow 0, \sum_1^n c_{j,n} \rightarrow \lambda, \sup \sum_1^n |c_{j,n}| < \infty \Rightarrow$

$$\prod_1^n (1 + c_{j,n}) \rightarrow e^\lambda$$

12 Stirlingove formule i lema 1 $\Rightarrow$

$$2k/\sqrt{2n} \rightarrow x \Rightarrow P(S_{2n} = 2k) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{-x^2/2}$$

i končno uz malo truda $\Rightarrow$

THEOREM 2 (de Moivre - Laplace)

Za $a < b$, $n \rightarrow \infty$

$$P\left(a \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq b\right) \rightarrow \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

SLABA KONVERGENCIJA

DEF Niz funkcija distribucije konvergira slabo,
pišemo $F_n \xrightarrow{w} F$ (ili $F_n \Rightarrow F$) prema
nekoj funkciji distribucije F ako

$$F_n(x) \rightarrow F(x) \quad \forall x \in C(F),$$

$C(F)$ = skup točaka neprekidnosti od F

NAP Uočite F je potp. određena vrijednostima
na $C(F)$ jer je $C(F)^c$ najviše prebrojiv,
a F je zdesna neprekidna.

DEF Niz slučajnih varijabli $(X_n)_n$ konvergira
po distribuciji prema slučaj. varijabli X
 ako $F_{X_n} \xrightarrow{w} F_X$, pišemo

$$X_n \xrightarrow{d} X \quad \text{ili} \quad X_n \Rightarrow X$$

Primer $X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, po tmu 2 $\Rightarrow$

$$P(S_n/\sqrt{n} \leq y) \rightarrow \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

$$\text{tj.} \quad S_n/\sqrt{n} \xrightarrow{d} Z \quad Z \sim N(0,1)$$

Primer Neka je X_p geometr. sl. var. s
 parametrom p tj. $P(X_p \geq n) = (1-p)^{n-1} \quad n \in \mathbb{N}$

Promotimo φX_p , za $p \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} P(\varphi X_p > x) &= P(X_p > \frac{x}{p}) = P(X_p \geq \lfloor \frac{x}{p} \rfloor + 1) \\ &= (1-p)^{\lfloor \frac{x}{p} \rfloor} \longrightarrow e^{-x} \quad (\text{Lem 1}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi X_p \xrightarrow{d} X \quad \text{gdje} \quad X \sim \text{Exp}(1)$$

SCHÉFFÉova LEMA

Ako su $(f_n)_n, f$ gustoće sl. var t.d.
 $f_n \rightarrow f$ po točkama tada za $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\left| \int_B f_n(x) dx - \int_B f(x) dx \right| \leq \int_B |f_n(x) - f(x)| dx \leq$$

$$\int |f_n(x) - f(x)| dx = 2 \int (f(x) - f_n(x))_+ dx \rightarrow 0$$

po t.d. i d.m. konv.

⇓

Odgovarajuće f.d. distribucije odn. sl. varijable konvergiraju slabo odn. po distribuciji.

3

Za niz (vjerov.)mjera $(\mu_n)_n$ kažemo da konvergira prema mjeri μ u normi potpune varijacije ako

$$\|\mu_n - \mu\|_{TV} := \sup_B |\mu_n(B) - \mu(B)| \rightarrow 0$$

Dakle za $\mu_n(B) = \int_B f_n(x) dx$ i $\mu(B) = \int_B f(x) dx$ vrijedi:

$$\|\mu_n - \mu\|_{TV} \rightarrow 0$$

⇒ pripadne distribucije konvergiraju tj.

$$F_{\mu_n} \xrightarrow{w} F_{\mu}$$

$$F_{\mu_n}(y) = \int_{-\infty}^y f_n(x) dx, \quad F_{\mu}(y) = \int_{-\infty}^y f(x) dx$$

$$= \mu_n((-\infty, y]) \quad = \mu((-\infty, y])$$

Uočite ne rjeđi: obrat

$$F_{\mu_n} \xrightarrow{w} F_{\mu} \quad \not\Rightarrow \quad \|\mu_n - \mu\|_{TV} \rightarrow 0$$

$$\text{tj. } \mu_n \xrightarrow{w} \mu$$

npr.

$$\mu_n = \delta_{1/n}, \quad \mu = \delta_0$$

Primer (središnja uređajna statistika)

Neka je V_{n+1} $(n+1)$ -va po veličini od $(2n+1)$ točaka nez. i unif. distribuiranih na intervalu $(0,1)$.

Pokazuje se V_{n+1} ima gustocu

$$f_{V_{n+1}}(x) = (2n+1) \binom{2n}{n} x^n (1-x)^n$$

$$\text{Za } Y_n = 2(V_{n+1} - \frac{1}{2}) / \sqrt{2n} \Rightarrow$$

$$f_{Y_n}(y) = \frac{\binom{2n}{n} 2^{-2n} \left(1 - \frac{y^2}{2n}\right)^n}{= P(S_{2n}=0)} \frac{2n+1}{2n} \sqrt{\frac{n}{2}}$$

za sim. jedn. slučaj. četnju.

Prema tvrdnji ispred Tm 2 $\Rightarrow$

$$P(S_{2n}=0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

$\Downarrow$

$$f_{S_n}(y) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$$

d. po Scheffeovoj lemi:

$$Y_n \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

5

Primer (razdiobe ekstremnih vrijednosti)

Ako su $X_1, X_2, \dots$ njd s fjom distrib. F

a $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ postavlja se

pitanje: postojanja granicne razdiobe u

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} ?$$

za dobro odabrane nrove $(a_n), (b_n)$.

Tj. fje distribucije G td.

$$P(M_n \leq a_n x + b_n) \rightarrow G(x) \quad , \quad x \in C(G)$$

LEMA 3 Neka je $\tau \in [0, +\infty]$ i (u_n)
niz tada vrijedi:

$$P(M_n \leq u_n) \rightarrow e^{-\tau} \Leftrightarrow n \bar{F}(u_n) \rightarrow \tau$$

Dakle $\tau \in [0, \infty)$

$$P(M_n \leq u_n) = F^n(u_n) = (1 - \bar{F}(u_n))^n$$

$\Leftarrow$ sledi po lemi 1, a

$\Rightarrow$ sledi jer tada $\bar{F}(u_n) \rightarrow 0$, pa logaritmiranjem
dobijemo

$$-n \ln(1 - \bar{F}(u_n)) \rightarrow \tau \quad \left| \begin{array}{l} -\ln(1-x) \sim x \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow n \bar{F}(u_n) \rightarrow \tau$$

($\tau = +\infty$ za D.Z.)

6

Dakle

$$P(M_n \leq a_n x + b_n) \rightarrow G(x)$$

(*)

$$\Leftrightarrow n \bar{F}(a_n x + b_n) \rightarrow -\log G(x)$$

Pokazuje se da parcij. maksimumi mogu
imati graničnu razdiobu koja je jednoga
od sledećih tri tipa

$$\Phi_\alpha(x) = e^{-x^{-\alpha}}, \quad \begin{array}{l} \alpha > 0 \\ x > 0 \end{array}$$

Fréchet

$$\Psi_\alpha(x) = e^{-(-x)^\alpha}, \quad \begin{array}{l} \alpha > 0 \\ x \leq 0 \end{array}$$

Weibull

$$\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Gumbel

To j'izv. Fisher-Tippettov theorem
 (dokazao ga j' tek Gnedenko, a de Haan
 j' takoder dao dopnuos)

(*) $\Rightarrow$

$$i) \quad \bar{F}(x) = x^{-\alpha}, \quad x \geq 1, \quad \alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad P(M_n / n^{1/\alpha} \leq y) \rightarrow \bar{\Phi}_\alpha(y) \quad y > 0$$

$$ii) \quad \bar{F}(x) = |x|^\beta, \quad x \in [-1, 0], \quad \beta > 0 \quad \Rightarrow \quad P(n^{1/\beta} M_n \leq y) \rightarrow \Psi_\beta(y) \quad y < 0$$

$$iii) \quad F \sim \text{Exp}(1) \quad \Rightarrow \quad P(M_n - \log n \leq y) \rightarrow \Lambda(y) \quad y \in \mathbb{R}$$

TEOREM 4 Ako $F_n \xrightarrow{d} F$ tada postoji n.j.
 prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i sluć. varijable Y_n, Y
 t.d. $F_{Y_n} = F_n, F_Y = F$ & $Y_n \xrightarrow{p.d.} Y$.

DEF) Ako je F funkcija distribucije, tada funkciju
 $F^{\leftarrow}(x) = \sup \{y : F(y) \leq x\}$, $F^{\leftarrow} : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$
 nazivamo generalizirani inverz funkcije F .

Alternativno:

$$F^{\leftarrow}(x) = \inf \{y : F_n(y) \geq x\}$$

$F^{\leftarrow}$ je naravno monotono rastuća.

Im Neka je $\Omega = (0,1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(0,1)$, $P = \text{Leb. m.j.}$

Definiramo

$$Y_n(x) = F_n^{\leftarrow}(x) \quad x \in (0,1)$$

$$Y(x) = F^{\leftarrow}(x) \quad x \in (0,1)$$

Direktno se provjeri da: $F_Y = F, F_{Y_n} = F_n$.

Poćazat ćemo

$$Y_n(x) \rightarrow Y(x)$$

za sve osim najviše prebrojivo x .

Neka

$$a_x = \sup \{y : F(y) < x\}$$

$$b_x = \inf \{y : F(y) > x\} \quad x \in (0,1)$$

$$\Omega_0 = \{x: (a_x, b_x) \neq \emptyset\} \quad \text{tj. za } x \in \Omega_0$$

F raste striktno
oko $F^{\leftarrow}(x)$

$\Downarrow$

$\Omega_0^c =$ najviše prebrojiv

(svaki $x \in \Omega_0^c$ određuje jedan otv. interval
disjunktan sa ostalima)

$$\text{Za } x \in \Omega_0, \quad F(y) < x \Rightarrow y < F^{\leftarrow}(x)$$

$$F(z) > x \Rightarrow z > F^{\leftarrow}(x)$$

Pokažimo

$$x \in \Omega_0 \Rightarrow F_n^{\leftarrow}(x) \rightarrow F^{\leftarrow}(x), \text{ u 2 koraka}$$

$$a) \quad \liminf F_n^{\leftarrow}(x) \geq F^{\leftarrow}(x)$$

Nastimo $y < F^{\leftarrow}(x)$, td. F neprekidna u y

$$\text{Kako } x \in \Omega_0 \Rightarrow F(y) < x$$

$$\Rightarrow \text{za sve } n \text{ dovoljno velike} \quad F_n(y) < x$$

$$\Rightarrow F_n^{\leftarrow}(x) \geq y \quad \forall \text{ takav } y \text{ i } n \quad \checkmark$$

pa onda i $\forall y < F^{\leftarrow}(x)$

$$b) \quad \limsup F_n^{\leftarrow}(x) \leq F^{\leftarrow}(x)$$

Nastimo $y > F^{\leftarrow}(x)$ td. F neprekidna u y

$$\text{Kako } x \in \Omega_0 \Rightarrow F(y) > x$$

$$\Rightarrow \text{za sve } n \text{ dovoljno velike} \quad F_n(y) > x$$

$$\Rightarrow F_n^{\leftarrow}(x) \leq y \quad \forall \text{ takav } y \text{ i } n \quad \checkmark$$

pa onda i $\forall y > F^{\leftarrow}(x) \quad \square$

Posljedica tm 4 je npr sljedeće poopćenje
Fatouove leme

$$g \text{ neprk.}, X_n \xrightarrow{d} X \Rightarrow \liminf E g(X_n) \geq E g(X)$$

te sljedeća karakterizacija konvergencije po
distribuciji

TEOREM 5 $X_n \xrightarrow{d} X \iff$ za svaku
ograničenu neprekidnu funkciju g vrijedi
 $E g(X_n) \rightarrow E g(X)$.

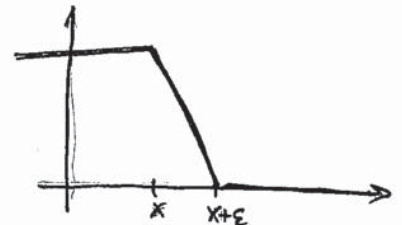
Idem
② Po tm 5 $\exists Y_n, Y$ td. $X_n \stackrel{d}{=} Y_n, X \stackrel{d}{=} Y$ & $Y_n \xrightarrow{p.d.} Y$

Kako je g neprk., tm o dom.in. konv. poslaot:

$$E g(X_n) = E g(Y_n) \rightarrow E g(Y) = E g(X)$$

③

$$g_{x,\varepsilon}(y) = \begin{cases} 1 & y \leq x \\ 0 & y \geq x+\varepsilon \\ \text{linearno} & \text{između} \end{cases}$$



$$\limsup P(X_n \leq x) \leq \limsup E g_{x,\varepsilon}(X_n) = E g_{x,\varepsilon}(X)$$

$$\downarrow \leq P(X \leq x+\varepsilon) \quad \text{pustimo } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\limsup P(X_n \leq x) \leq P(X \leq x)$$

za obrnutu nejednakost uočimo

$$\liminf_n P(X_n \leq x) \geq \liminf E g_{x-\varepsilon, \varepsilon}(X_n) = E g_{x-\varepsilon, \varepsilon}(X) \\ \geq P(X \leq x - \varepsilon)$$

Ako je x točka neprekidnosti od F_X

puštimo $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\liminf P(X_n \leq x) \geq P(X \leq x). \quad \square$$

THEOREM 6 (o neprek. preslikavanju)

Neka je g izmj. funkcija, $D_g = \{x: g \text{ ima prekid u } x\}$. Ako $X_n \xrightarrow{d} X$ & $P(X \in D_g) = 0$,
tada $g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$;
ako je g ogr. vrijedi i $Eg(X_n) \rightarrow Eg(X)$.

~~Idu~~ Uočimo D_g je izmjeriv skup (v.z.)

Opet konstruiramo $X_n \stackrel{d}{=} Y_n \xrightarrow{g.s.} Y \stackrel{d}{=} X$.

Ako je f neprek. $D_{f \circ g} \subseteq D_g$

$$\Rightarrow P(Y \in D_{f \circ g}) = 0$$

$$\Rightarrow f(g(Y_n)) \xrightarrow{g.s.} f(g(Y))$$

Ako je f ogr. tm. o dom. konv. $\Rightarrow Ef(g(Y_n)) \rightarrow Ef(g(Y))$

Zadnja tvrdnja također slijedi iz tm. o dom. konvergenciji

$\square$

TEOREM 7

Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne

- i) $X_n \xrightarrow{d} X$
- ii) $\forall$ otvoreni G $\liminf_n P(X_n \in G) \geq P(X \in G)$
- iii) $\forall$ zatvoreni K $\limsup P(X_n \in K) \leq P(X \in K)$
- iv) $\forall$ skup A td. $P(X \in \partial A) = 0$
 $\lim P(X_n \in A) = P(X \in A)$

Dokaz i) $\Rightarrow$ ii) uzmemo opet $\overset{d}{X_n} \xrightarrow{d} \overset{d}{X}$
 $y_n \xrightarrow{d} y$

ako $y \in G \Rightarrow$ za sve dovoljno velike n $y_n \in G$ s vjeroj. 1
 $\Rightarrow \liminf 1_G(y_n) \geq 1_G(y)$, Fatou $\Rightarrow$ ii)

—

Pokazuje se još ii) $\Leftrightarrow$ iii) ; iii) & ii) $\Rightarrow$ iv) ; iv) $\Rightarrow$ i) (D.Z.)
 $\square$

NAP Da bismo zapamtili nejednakosti u ii), iii)

prim. $X_n \equiv X_n \stackrel{1/n}{\rightarrow} X \equiv 0$, $G = (0, \infty)$

kad $X_n \in G$, $X_n \rightarrow X \in \partial G$

$$P(X_n \in G) = 1 \quad \forall n, \quad P(X \in G) = 0.$$

Za iii) stavimo $K = (-\infty, 0]$

TEOREM 8 (Hellyjev teorem)

Za svaki niz fja distribucija $(F_n)_n$ postoji podniz $(F_{n(k)})_k$ i zdesna neprek. monot. rastuća fja F t.d.

$$F_{n(k)}(y) \rightarrow F(y) \quad \text{za } \forall y \in C(F)$$

Jasno F ne mora biti fja distribucije (no je Stieltjesova funkcija, pa određuje mjeru), npr

$$F_n \sim U(n-1, n) \rightarrow F \equiv 0$$

naime vj.
masa
pobjegne
 $n \rightarrow \infty$!!

Ako $F_n \xrightarrow{w} F$ kažemo da i pripadne mjere zadovoljavaju $\mu_{F_n} \xrightarrow{w} \mu_F$

U gornjem primjeru i općenito i u tm 8 dio vjerojatnosne mase može pobjeći $n \rightarrow \infty$ beskonačno, kažemo da za pripadne mjere vrijedi

$$\mu_{F_n} \xrightarrow{v} \mu_F$$

vague
convergence

~~Pre~~ $Q = \{q_1, q_2, \dots\}$ nr $\{F_m(q_1)\}_m$ je omeđen

$\Rightarrow \exists$ podniz $m_1(i) \rightarrow +\infty$ t.d.

$$F_{m_1(i)}(q_1) \rightarrow G(q_1) \leftarrow \begin{array}{l} \text{oznaka} \\ \text{za limes} \end{array}$$

nastavimo induktivno

$\forall k > 1$ $\{F_m(q_k)\}_m$ je omeđen pa

$\Rightarrow \exists$ podniz $m_k(i) \rightarrow \infty$ podniz od $m_{k-1}(i)$

$$\text{t.d.} \quad F_{m_k(i)}(q_k) \rightarrow G(q_k) \quad i \rightarrow \infty$$

Stavimo $n(k) = m_k(k)$ $\leftarrow$ dijagonalni podniz

$$\Rightarrow F_{n(k)}(q) = F_{m_k(k)}(q) \rightarrow G(q) \quad \forall q \in Q$$

Definiramo $F(x) = \inf \{G(q) : q \in Q, q > x\}$

Jada je F neopadajuća, zdesna neprek.

Zaista

$$\begin{aligned} \lim_{x_n \nearrow x} F(x_n) &\stackrel{*}{=} \inf \{G(q) : q \in Q, q > x_n \text{ za nek. } n\} \\ &= \inf \{G(q) : q \in Q, q > x\} = F(x) \end{aligned}$$

Preostaje pokazati:

$$F_{n(k)}(x) \rightarrow F(x) \quad x \in C(F)$$

uzmimo $r_1, r_2, s \in \mathbb{Q}$ t.d. $r_1 < r_2 < x < s$
i $\varepsilon > 0$

$$F(x) - \varepsilon < F(r_1) \leq F(r_2) \leq F(x) \leq F(s) < F(x) + \varepsilon$$

kako $F_{n(k)}(r_2) \rightarrow G(r_2) \geq F(r_1)$ i

$$F_{n(k)}(s) \rightarrow G(s) \leq F(s)$$

$\Downarrow$
za dovoljno veliki k

$$F(x) - \varepsilon < F_{n(k)}(r_2) \leq F_{n(k)}(x) \leq F_{n(k)}(s) \leq F(x) + \varepsilon$$

□

NAPETOST

Ako želimo spriječiti gubitak vjeroj. mase
u nizu (F_n) treba nam dodatna
pretpostavka

DEF Kažemo da je niz funkcija distribucije
(vjeroj. mjera) napet ako za $\forall \varepsilon > 0$
 $\exists M_\varepsilon > 0$ t.d.

$$\begin{aligned} \limsup \mu_{F_n}^{(-M_\varepsilon, M_\varepsilon]^c} &= \\ &= \limsup [F_n(M_\varepsilon) + F_n(-M_\varepsilon)] \leq \varepsilon \end{aligned}$$

tj. $\limsup P(|X_n| \geq M_\varepsilon) \leq \varepsilon$

TEOREM 9 Svaki podniz niza funkcija distribucije (F_n) koji konvergira (vaguely), konvergira prema nekoj funkciji distribucije (i vaguely i weakly) $\Leftrightarrow$ je niz $(F_n)_n$ napet.

Dokaz Ako je (F_n) napet niz i $F_{n(k)} \xrightarrow{v} F$ uzmimo $r < -M_\varepsilon$ i $s > M_\varepsilon$, $r, s \in C(F)$

$$\Rightarrow F_{n(k)}(r) \rightarrow F(r), F_{n(k)}(s) \rightarrow F(s)$$

$$\begin{aligned} \overline{F}(s) + F(r) &= \lim \left(\overline{F_{n(k)}}(s) + F_{n(k)}(r) \right) \\ &\leq \limsup \left(\overline{F_n}(M_\varepsilon) + F_n(-M_\varepsilon) \right) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Dakle

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \overline{F}(x) + F(-x) \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$\Rightarrow F$ je f.a. distribucije

$\Rightarrow$ Pretp. (F_n) nije napet niz

$\exists \varepsilon > 0$: $n(k) \rightarrow \infty$ t.d.

$$\overline{F_{n(k)}}(k) + F_{n(k)}(-k) \geq \varepsilon$$

tm 8 $\Rightarrow F_{n(k_j)} \xrightarrow{v} F$ za neki pseudodistribuciju F

za $\forall r < 0 < s \in C(F) \Rightarrow$

$$\overline{F}(s) + F(r) = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\overline{F_{n(k_j)}}(s) + F_{n(k_j)}(r) \right)$$

$$\geq \liminf \left(\overline{F_{n(k_j)}}(k_j) + F_{n(k_j)}(-k_j) \right) \geq \varepsilon$$

$\Rightarrow F$ nije f.a. distri., jer s, r su po volji veliki.

□ 11

KARAKTERISTIČNE FUNKCIJE

DEF Ako je $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sluč. varijabla, karakteristična funkcija od X je f.k. $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dana sa

$$\varphi(t) = \varphi_X(t) = E e^{itX} = E(\cos tX + i \sin tX)$$

TEOREM 10 (elementarna svojstva karak. f.k.)

- a) $\varphi(0) = 1$
- b) $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$
- c) $|\varphi(t)| = |E e^{itX}| \leq E |e^{itX}| \leq 1$

d) $|\varphi(t+h) - \varphi(t)| \leq E |e^{ihX} - 1| \Rightarrow \varphi$ je uniformno neprekidna na $\mathbb{R}$

e) $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \varphi_X(at)$

f) X_1, X_2 nezavisne $\Rightarrow \varphi_{X_1+X_2} = \varphi_{X_1} \cdot \varphi_{X_2}$

Primer (normalna razdioba)

$$Z \sim N(0,1) \Rightarrow \varphi_Z(t) = e^{-t^2/2}$$

"dokaz fizičera"

$$\int e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = e^{-t^2/2} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} dx = e^{-t^2/2}$$

↖ gustota $N(it, 1)$ razdiobe

Primjer (eksponencijska raspodoba)

$$T \sim \text{Exp}(1) \Rightarrow \ell_T(t) = 1/(1-it)$$

$$\int_0^\infty e^{itx} e^{-x} dx = \frac{e^{(it-1)x}}{it-1} \Big|_0^\infty = \frac{1}{1-it}$$

LEMA 11

Ako fje. dist. $F_1, F_2, \dots, F_n$ imaju karakteristične funkcije $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, a $\lambda_i \geq 0$ zadovoljavaju $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i F_i$ ima karakt. fju

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i$$

NAP Ako je φ kar. fja $\Rightarrow$ to su i $\text{Re } \varphi$ i $|\varphi|^2$ oz

THEOREM 12 (teorem inverzije)

Neka je $\varphi(t) = \int e^{itx} \mu(dx)$ za neku vjeroj. mjeru na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, za $a < b$ vrijedi:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt = \mu(a, b) + \frac{1}{2} \mu(\{a, b\})$$

NAP Integral ne mora konvergirati apsolutno

npr $\mu = \delta_0$, $a = -1, b = 1 \Rightarrow \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} = \frac{2 \sin t}{t}$

$\varphi \equiv 1$, dakle podintegralna fja nije aps. integrabilna.

$$I_t := \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-ib}}{it} \ell(t) dt = \int_{-T}^T \int \frac{e^{-ita} - e^{-ib}}{it} e^{itx} \mu(dx) dt$$

Uočimo $\int \frac{e^{-ita} - e^{-ib}}{it} = \int_a^b e^{-ity} dy \Rightarrow$

$$\left| \frac{e^{-ita} - e^{-ib}}{it} \right| \leq \int_a^b |e^{-ity}| dy = b - a$$

Fubinijev tm $\Rightarrow$

$$I_t = \int \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-ib}}{it} e^{itx} dt \mu(dx)$$

$$= \int \left[\int_{-T}^T \frac{\sin t(x-a)}{t} dt - \int_{-T}^T \frac{\sin t(x-b)}{t} dt \right] \mu(dx) \quad (*)$$

$$R(v, T) := \int_{-T}^T \frac{\sin vt}{t} dt \Rightarrow$$

$$I_t = \int [R(x-a, T) - R(x-b, T)] \mu(dx)$$

Stavimo li $S(t) = \int_0^T \frac{\sin x}{x} dx$, za $v > 0$, uz

zamjenom varijabli: $vt = x \Rightarrow$

$$R(v, T) = 2 \int_0^{Tv} \frac{\sin x}{x} dx = 2S(Tv)$$

za $v < 0$

$$R(v, T) = -R(|v|, T) \Rightarrow$$

$$R(v, T) = 2 \operatorname{sgn} v S(T|v|)$$

Nadalje:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} S(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R(\vartheta, T) = 2 \operatorname{sgn} \vartheta \cdot \frac{\pi}{2} = \operatorname{sgn} \vartheta \cdot \pi$$

$$\Downarrow \\ R(x-a, T) - R(x-b, T) \rightarrow \begin{cases} 2\pi & a < x < b \\ \pi & x = a \text{ ili } b \\ 0 & x < a, x > b \end{cases}$$

Kako $|R(\vartheta, T)| \leq 2 \sup_y S(y) < \infty$, a konstanta je integrabilna u odn. na μ , teorem o dom konv. $\rightarrow$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} I_T = \frac{1}{2\pi} \int \lim_{T \rightarrow \infty} (R(x-a, T) - R(x-b, T)) \mu(dx) = \mu(a, b) + \frac{1}{2} \mu(\{a, b\}) \quad \square$$

NAP)

i) Formula inverzije $\Rightarrow$ distribucija je jednodimenzionalno određena karakt. f.ion

ii) formula inverzije je jednostavnija za integrabilne ℓ tj. ako postoji gustoća raspolože

iii) iz dokaza $\Rightarrow$ $\mu\{a\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T e^{-ita} \ell(t) dt$

iv) ℓ realna $\Rightarrow X \stackrel{d}{=} -X$

TEOREM 13 (formula inverzije za neprek. vardiobu)

Ako $\int |\varphi(t)| dt < \infty \Rightarrow \mu$ ima ograničen neprekidnu fju gustoće

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ity} \varphi(t) dt$$

Pr 12 $\left| \frac{e^{-ita} - e^{-ib}}{it} \right| = \left| \int_a^b e^{-ity} dy \right| \leq |b-a| \Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{e^{-ita} - e^{-ib}}{it} \right| |\varphi(t)| dt < \infty \quad \text{pa smo dom konv} \Rightarrow$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ita} - e^{-ib}}{it} \varphi(t) dt$$

Th 12 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mu(a, b) + \frac{1}{2} \mu(\{a, b\}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ita} - e^{-ib}}{it} \varphi(t) dt \leq \\ &\leq \frac{b-a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt \end{aligned}$$

Za $b \rightarrow a$ desna strana ide u 0 $\Rightarrow \mu(\{a\}) = 0$
 $\forall a \in \mathbb{R}$ tj. μ nema diskretnu komponentu.

Nadalje: $\mu(x, x+h) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{-itx} - e^{-it(x+h)}}{it} \varphi(t) dt$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \left(\int_x^{x+h} e^{-ity} dy \right) \varphi(t) dt$$

$$= \int_x^{x+h} \left(\frac{1}{2\pi} \int e^{-ity} \varphi(t) dt \right) dy \quad (\text{Fubini})$$

Dakle μ ima funkciju gustoće

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ity} \ell(t) dt$$

Jako je $|\ell(y)| \leq \frac{1}{2\pi} \int |\ell(t)| dt < \infty$, a
neprekidnost sledi iz tm o dom. kont. □

(NAP) Pokazite da je moguće da μ bude neprekidna,
a ipak $\int |\ell(t)| dt = \infty$. (02)

Ako $\ell(t) \rightarrow 0$ za $t \rightarrow \infty$, već znamo da
 μ nema diskretne komponente (02.)

KARAKTERISTIČNE FUNKCIJE I SLABA KONVERGENCIJA

TEOREM 14 (teorem neprekidnosti)

Neka su $\mu_n, n \geq 1$, vj. mjere s karakter. funkcijama ℓ_n , tada

- i) Ako $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ tada $\ell_n(t) \rightarrow \ell(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- ii) Ako $\ell_n(t)$ konvergira po točkama prema limesu $\ell(t)$ koji je neprekidan u 0, tada je niz distribucija (μ_n) napet i
 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ gdje $\ell_n = \ell$.

Dokaz
 i) je lako dobiti $x \mapsto e^{itx}$ je omeđena i neprekidna $\Rightarrow \int e^{itx} \mu_n(dx) \rightarrow \int e^{itx} \mu(dx)$

ii) Pokazat ćemo prvo napetost.

$$\begin{aligned} \text{Uočite } \int_{-u}^u (1 - e^{itx}) dt &= 2u - \int_{-u}^u (\cos tx + i \sin tx) dt \\ &= 2u - \frac{2 \sin ux}{x} \quad / : u \text{ \& } \int \mu_n(dx) \end{aligned}$$

Fubini $\Rightarrow$

$$\frac{1}{u} \int_{-u}^u (1 - \ell_n(t)) dt = 2 \int \left(1 - \frac{\sin ux}{ux}\right) \mu_n(dx) \quad \text{■}$$

Kako je $|\sin x| \leq \left| \int_0^x \cos(y) dy \right| \leq |x| \quad \forall x$

↓

$$1 - \frac{\sin ux}{ux} \geq 0$$

Na d.s. u $\blacksquare$ možemo ograničiti integral na $|x| \geq 2/u$ i iskoristiti $|\sin ux| \leq 1$ da bismo dobili donju ogradu

$$\geq 2 \int_{|x| \geq 2/u} \left(1 - \frac{1}{|ux|}\right) \mu_n(dx) \geq \mu_n(\{x : |x| \geq 2/u\}) \quad \blacktriangle$$

Kako $\varphi(t) \rightarrow 1$ za $t \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{u} \int_{-u}^u (1 - \varphi(t)) dt \rightarrow 0 \quad \text{za } u \rightarrow 0$$

No $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t) \quad \forall t$ po l.e.m.

$$\int_{-u}^u \varphi_n(t) dt \rightarrow \int_{-u}^u \varphi(t) dt \quad \text{po t.d.k.}$$

Stoga $\frac{1}{u} \int_{-u}^u (1 - \varphi_n(t)) dt \rightarrow \frac{1}{u} \int_{-u}^u (1 - \varphi(t)) dt \quad u \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon \quad \exists u > 0. \quad \frac{1}{u} \int_{-u}^u (1 - \varphi(t)) dt < \varepsilon$$

ali $\exists N \in \mathbb{N}$ t.d. $\forall u \geq N$

$$2\varepsilon \geq \frac{1}{u} \int_{-u}^u (1 - \varphi_n(t)) dt \geq \blacksquare \& \blacksquare \mu_n(\{x : |x| \geq \frac{2}{u}\})$$

Budući je $\varepsilon > 0$ proizvoljan $\Rightarrow$
 niz (μ_n) je napet

Nadalje ako $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ prema i)

μ ima karakt. fju φ , tj. pokazali smo
 i jedinstvenost

□

(NTP) $\mu(\{x: |x| > 2/n\}) \leq \frac{1}{n} \int_{-n}^n (1 - \varphi(t)) dt$

jasno ukazuje da glatkoća od φ oko 0
 utiče na brzinu opadanja vj. mase od μ .
 To se može i dalje istraživati.

MOMENTI I DERIVACIJE

PROPOZICIJA 15

Ako je $\int |x|^n \mu(dx) < \infty$ (tj. $E|X|^n < \infty$)
 tada φ ima neprekidnu derivaciju reda n
 danu formulom

$$\varphi^{(n)}(t) = \int (ix)^n e^{itx} \mu(dx)$$

Dokaz t.d.k. omogućuje derivaciju uvesti pod integral.

Posebno je: dakle

$$\varphi^{(n)}(0) = E[(iX)^n]$$

LEMA 16

$$\left| e^{ix} - \sum_{m=0}^n \frac{(ix)^m}{m!} \right| \leq \min \left\{ \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|x|^n}{n!} \right\}$$

Jez v knjigi, ora gornja ograda je končna
za velike $|x|$ posebno jer tada je
drugi član na d.s. bitno manji.

Primjenimo li gornju lemu na $x = tX \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \left| E e^{itX} - \sum_0^n E \frac{(itX)^m}{m!} \right| &\leq E \left| e^{itX} - \sum_0^n \frac{(itX)^m}{m!} \right| \\ &\leq E \min \left\{ \frac{|tX|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|tX|^n}{n!} \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

TEOREM 17

Ako je $E|X|^n < \infty$ tada

$$\varphi(t) = \sum_{m=0}^n \frac{E(itX)^m}{m!} + o(t^n) = \sum_{m=0}^n \frac{t^m}{m!} \varphi^{(m)}(0) + o(t^n)$$

Je

$$\left| \varphi(t) - \sum_{m=0}^n \frac{E(it^m X)}{m!} \right| \leq t^n E \min \left\{ 1 + \frac{|X|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|X|^n}{n!} \right\}$$

Izraz u zagradi je za $t \rightarrow 0$ ograničen sa integrabilnom sl. var. $2|X|^n$, pa ~~aktiviranje~~ ide k 0 za $t \rightarrow 0$ (t.d.k. opet) $\square$

NAP U c.g.t. bit će vrlo korisno što nam je za aproksimaciju kar. fje 2. reda dovoljan 2. moment.

TEOREM 18 (slabi zakon i karakt. fje)

Neka su $X_1, X_2, \dots$ n.j.d. s karakterističnom fjom φ . Ako postoji $\varphi'(0) = ia$ tada

$$S_n/n \xrightarrow{P} a.$$

Obrnuto ako $S_n/n \xrightarrow{P} a$ tada $\varphi(\frac{t}{n})^n \rightarrow e^{iat}$ i postoji $\varphi'(0) = ia$

NAP Kako sl. z.v.b. vrijedi ponekad i ako $E|X| = \infty$ postojanje $\varphi'(0)$ ne implicira $E|X| < \infty$.

CENTRALNI GRANIČNI TEOREM

TEOREM 19

Ako $c_n \rightarrow c \in \mathbb{C}$ tada $(1 + \frac{c_n}{n})^n \rightarrow e^c$.

TEOREM 20

Ako su $X_1, X_2, \dots$ n.j.d. t.d. $EX_i = \mu$ i $\text{Var} X_i = \sigma^2$
 $\sigma^2 \in (0, \infty)$, tada

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

Prav. 3.s.o.m.p. $EX_i = 0$ (inače $X_i' = X_i - \mu \dots$)

$$\varphi(t) = Ee^{itX_1} = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2) \quad \text{p.m. 17}$$

$$\Downarrow$$
$$E e^{itS_n/\sigma\sqrt{n}} = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o(1/n)\right)^n = \left(1 - \frac{\frac{t^2}{2} + o(1)}{n}\right)^n$$
$$\rightarrow e^{-t^2/2} \quad \checkmark \quad \text{p.m. 19} \quad \square$$

Primjer (c.g.t. za sume do slučajnog indeksa)

Neka su X_i n.j.d., $EX_i = 0$, $\text{Var } X_i = \sigma^2 \in (0, \infty)$

(a_n) niz u $\mathbb{N}$ t.d. $a_n \rightarrow \infty$

(N_n) niz sl. varijabli u $\mathbb{N}$ t.d. $N_n/a_n \xrightarrow{P} 1$

$$\Rightarrow \frac{S_{N_n}}{\sqrt{a_n}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad (*)$$

Najjednostavniji argument je preko teorema

THEOREM 21 (Slutsky)

$$a) \quad X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{d} c \Rightarrow (X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, c)$$

$$b) \quad X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{d} c \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$$

$$c) \quad X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{d} c \Rightarrow X_n \cdot Y_n \xrightarrow{d} c \cdot X$$

Teorem 21 ćemo diskutirati u kontekstu konvergencije slučajnih vektora. U istom i nizovi $(X_n), (Y_n)$ mogu biti višedimenzionalni, najvažnija (najčešća) primjena od b) je

$$d) \quad X_n \xrightarrow{d} X, Z_n - X_n \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow Z_n \xrightarrow{d} X$$

Prema formuli (*)

Kako $a_n \rightarrow \infty$

$$\frac{S_{a_n}}{\sqrt{a_n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$\text{No} \quad |S_{N_n} - S_{a_n}| \leq \underbrace{\left| \sum_{i=1}^{N_n} X_i \right|}_{A_n} \mathbb{1}_{N_n > a_n} + \underbrace{\left| \sum_{i=N_n+1}^{a_n} X_i \right|}_{B_n} \mathbb{1}_{a_n > N_n}$$

Jasno je sad za A_n vrijedi ogran

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{N_n} |X_i|}{\sqrt{a_n}} > \varepsilon\right) \leq P\left(\frac{N_n - a_n}{a_n} > \varepsilon/k\right) + P\left(\frac{\sum_{i=1}^{a_n + \varepsilon k a_n} |X_i|}{\sqrt{a_n}} > \varepsilon\right) \leq C \cdot \frac{1}{k} = \frac{\text{Var}|X_i|}{k}$$

$\nearrow 0$ za $n \rightarrow \infty$
 po pretpostavci i fiksni k

Izaberemo li veliki k ovaj izraz možemo učiniti proizvoljno malim $\Rightarrow$

$\frac{A_n}{\sqrt{a_n}} \xrightarrow{P} 0$ u prethodnoj formuli, a

slično: $\frac{B_n}{\sqrt{a_n}} \xrightarrow{P} 0$

$$\Rightarrow \frac{S_{N_n} - S_{a_n}}{\sqrt{a_n}} \xrightarrow{P} 0 \stackrel{\text{Tm 2.1}}{\Rightarrow} \frac{S_{N_n}}{\sqrt{a_n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Primer (c.g.t. za proces obnavljanja)

Neka su (Y_i) n.j.d. pozitivne t.d.

$$\mu = EY_i, \quad \sigma^2 = \text{Var } Y_i \in (0, \infty)$$

$$S_n = Y_1 + \dots + Y_n$$

$$N(t) = \sup \{m : S_m \leq t\} \quad \text{tada}$$

$$\frac{N_t - t/\mu}{\sigma \sqrt{t \cdot \mu^3}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

prema prethodnom primjeru, konstatirajmo $X_i = Y_i - \mu$

LINDBERG - FELLEROV TEOREM

THEOREM 22 (Lindeberg-Feller)

Za svaki $n \in \mathbb{N}$, neka su $X_{n,m}$ $1 \leq m \leq n$ nezavisne sl. var. t.d. $EX_{n,m} = 0$. Pretpostavimo

$$i) \quad \sum_{m=1}^n EX_{n,m}^2 \longrightarrow \sigma^2 > 0$$

$$ii) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n E(|X_{n,m}|^2; |X_{n,m}| > \varepsilon) = 0$$

$$\rightarrow S_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,n} \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

NKP

Uočimo ii) $\Rightarrow$

$$\text{iii)} \quad \lim \sum_1^n P(|X_{n,m}| > \varepsilon) = 0$$

Feller: ako pretpostavimo i) & iii) tada je ii)
i nužan uvjet za konvergenciju u tm.

32

247

$$\varphi_{n,m} = E e^{itX_{n,m}} \quad \sigma_{n,m}^2 = EX_{n,m}^2$$

po tmu neprekidnosti dovoljno je vidjeti.

$$\prod_{m=1}^n \varphi_{n,m}(t) \longrightarrow e^{-t^2 \sigma^2 / 2} \quad \forall \text{ fiksni } t$$

$$\text{Stavimo} \quad z_{n,m} = \varphi_{n,m}(t)$$

$$w_{n,m} = 1 - \frac{t^2 \sigma_{n,m}^2}{2}$$

Prema lemi 16 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} |z_{n,m} - w_{n,m}| &= \left| E e^{itX_{n,m}} - \left(1 + \frac{E(i^2 X_{n,m}^2)}{2} \right) \right| \leq \\ &\leq E \left(\frac{|tX_{n,m}|^3}{3!} \wedge \frac{2|tX_{n,m}|^2}{2!} \right) \leq \end{aligned}$$

$$\leq E\left(\frac{|tX_{n,m}|^3}{6}; |X_{n,m}| \leq \varepsilon\right) + E(|tX_{n,m}|^2; |X_{n,m}| > \varepsilon)$$

$$\leq \frac{\varepsilon t^3}{6} E(|X_{n,m}|^2; |X_{n,m}| \leq \varepsilon) + t^2 E(|X_{n,m}|^2; |X_{n,m}| > \varepsilon) \Rightarrow$$

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow 1} \sum_{m=1}^n |z_{n,m} - w_{n,m}| \leq \frac{\varepsilon t^3}{6} \overline{\lim}_{m \rightarrow 1} \sum_1^n E(|X_{n,m}|^2; |X_{n,m}| \leq \varepsilon) + t^2 \overline{\lim}_{m \rightarrow 1} \sum_1^n E(|X_{n,m}|^2; |X_{n,m}| > \varepsilon) \leq \frac{\varepsilon t^3}{6} \sigma^2 + t^2 \cdot 0$$

zgod i) & ii)

No $\varepsilon > 0$ je proizvoljan $\Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n |z_{n,m} - w_{n,m}| = 0$$

Nadalje:

$$|z_{n,m}| = |E e^{itX_{n,m}}| \leq 1$$

$$\sigma_{n,m}^2 = E|X_{n,m}|^2 \leq \varepsilon^2 + E(|X_{n,m}|^2; |X_{n,m}| > \varepsilon)$$

$$ii) \rightarrow \overline{\lim}_n \sup_{1 \leq m \leq n} \sigma_{n,m}^2 \leq \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \sup_{1 \leq m \leq n} \sigma_{n,m}^2 \rightarrow 0$$

za $n \rightarrow \infty$ za vsakega ε proizvoljnega

Pa za dovoljno velik n

$$1 - \frac{t^2 \sigma_{n,m}^2}{2} > -1 \quad \forall m = 1, \dots, n$$

pa za take n i $|X_{n,m}| \leq 1 \quad \forall m = 1, \dots, n$

Sad je $\left| \prod_1^n C_{n,m}(t) - \prod_1^n \left(1 - \frac{t^2 \sigma_{n,m}^2}{2} \right) \right| =$

$$\left| \prod_1^n Z_{n,m} - \prod_1^n W_{n,m} \right| \leq \sum_{m=1}^n |Z_{n,m} - W_{n,m}| \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

Na $\prod_1^n \left(1 - \frac{t^2 \sigma_{n,m}^2}{2} \right) \rightarrow e^{-t^2 \sigma^2 / 2} \quad n \rightarrow \infty$

po Lemi 16) uz

$$C_{n,m} = \frac{-t^2 \sigma_{n,m}^2}{2}$$

□

3

Primer (rekordi / sl. permutacije)

$X_1, X_2, \dots$ neka su nji s neprekidnom razdiobom F

$$A_m = \{ X_m > \sup_{j < m} X_j \}, \quad R_n = \sum_1^n 1_{A_m} = \text{broj rekorda do } n$$

Pokazali smo

$$\mathbb{P}(A_m) = \frac{1}{m}, \quad \text{a } A_m \text{ čine niz nezavisnih}$$

dogadaja, te smo vidjeli i

$$\frac{R_n}{\log n} \xrightarrow{\text{g.s.}} 1$$

Neka su sada $Y_1, Y_2, \dots$ nez. sl. varijable +1.

$$P(Y_m = 1) = \frac{1}{m} \quad P(Y_m = 0) = 1 - \frac{1}{m}$$

$$\text{npr. } Y_m = 1_{A_m}, \quad EY_m = \frac{1}{m}, \quad \text{Var } Y_m = \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2}$$

$$\text{nela je } S_n = Y_1 + \dots + Y_n \stackrel{d}{=} R_n, \text{ tada}$$

$$ES_n \sim \log n, \quad \text{Var } S_n \sim \log n \text{ stasimo}$$

$$X_{n,m} := \frac{Y_m - \frac{1}{m}}{\sqrt{\log n}} \quad m = 1, \dots, n \Rightarrow$$

$$EX_{n,m} = 0, \quad \sum_{m=1}^n EX_{n,m}^2 = \frac{\text{Var } S_n}{\log n} \rightarrow 1 \quad n \rightarrow \infty$$

3

te je: $\forall \varepsilon > 0$

$$\sum_{m=1}^n E(|X_{n,m}|^2; |X_{n,m}| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

Lindeberg-Feller $\Rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{\log n}} \left(S_n - \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \right) \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

$$\text{Kako } \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \geq \int_1^n \frac{1}{x} dx = \log n \geq \sum_{m=2}^n \frac{1}{m} \Rightarrow$$

$$|\log n - \sum_{m=1}^n \frac{1}{m}| \leq 1 \Rightarrow$$

GONCHAROVYER
THEOREM

$$\frac{1}{\sqrt{\log n}} (S_n - \log n) \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

(Slutsky)

Primer C.g.t. uz beskonačnu varijancu)

Neka su $X_1, X_2, \dots$ n.j.d. simetrične sl. var.

$$\text{t.j. } P(|X_i| > x) = x^{-2}, \quad x \geq 1$$

$$E|X_1|^2 = \int_0^{\infty} 2x P(|X_1| > x) dx = +\infty$$

Pokažat ćemo da S_n dobro normalizirane
ipak konvergira ka $N(0,1)$ razdobi.

36

Stavimo

$$Y_{n,m} = X_m \cdot \mathbb{1}_{(|X_m| \leq \sqrt{n} \log \log n)} \stackrel{c_n}{=}$$

Nivo rezanja je takav da

$$\begin{aligned} \sum_1^n P(Y_{n,m} \neq X_m) &= \sum_1^n P(|X_m| > c_n) \\ &= n \cdot P(|X_1| > c_n) = n \cdot c_n^{-2} = \frac{1}{(\log \log n)^2} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (**)$$

Pokažimo $EY_{n,m}^2 \sim \log n$

$$\begin{aligned} \text{Iz } P(|Y_{n,m}| > x) &\leq P(|X_m| > x) \Rightarrow \\ EY_{n,m}^2 &\leq \int_0^{c_n} 2y P(|X_1| > y) dy = 1 + \int_1^{c_n} \frac{2}{y} dy = 1 + 2 \log c_n \end{aligned}$$

$$\text{No } 1 + 2 \log c_n \sim \log n \Rightarrow E Y_{n,m}^2 \lesssim \log n$$

No vnjedi i obrnuta nejednakost

$$P(|Y_{n,m}| > x) = P(|X_1| > x) - P(|X_1| > c_n)$$

$$= P(|X_1| > x) \cdot \left(1 - \frac{P(|X_1| > c_n)}{P(|X_1| > x)}\right)$$

$$= P(|X_1| > x) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{n(\log \log n)^2}\right) \geq$$

$$\geq P(|X_1| > x) \cdot \left(1 - \frac{1}{(\log \log n)^2}\right) \quad \text{za } x \leq \sqrt{n} \Rightarrow$$

$$E Y_{n,m}^2 = \int_0^{\infty} 2x P(|Y_{n,m}| > x) dx$$

$$\geq \int_1^{\sqrt{n}} P(|X_1| > x) \cdot (1 - (\log \log n)^{-2}) dx$$

$$= (1 - (\log \log n)^{-2}) \cdot \int_1^{\sqrt{n}} \frac{2}{x} dx \sim \log n$$

Stavimo $S_n' = Y_{n,1} + \dots + Y_{n,n}$

$$\Rightarrow \text{Var } S_n' \sim n \log n$$

$$X_{n,m} = \frac{Y_{n,m}}{(n \log n)^{1/2}} \quad \text{zadovoljavaju}$$

$$\sum_{m=1}^n E X_{n,m}^2 = \frac{1}{n \log n} \text{Var } S_n' \rightarrow 1 \quad n \rightarrow \infty$$

$$\sum_1^n E(|X_{n,m}|^2; |X_{n,m}| > \varepsilon) = \sum_1^n E(|X_{n,m}|^2 \cdot \frac{|Y_{n,m}|}{\sqrt{n \log n}} > \varepsilon)$$

meotutim $Y_{n,m} \leq \sqrt{n} \cdot \log \log n$

pa je za dani $\varepsilon > 0$

$$|Y_{n,m}| \leq \varepsilon \sqrt{n \log n} \quad \text{za sve dovoljno velike } n$$

Slog-je gornja suma 0.

$$\text{Lin. Fell.} \Rightarrow \frac{S_n'}{\sqrt{n \log n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$(**) \rightarrow P(S_n \neq S_n') \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{S_n}{\sqrt{n \log n}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

THEOREM 23 (Lévy)

Neka su $X_1, X_2, \dots$ njd $S_n = X_1 + \dots + X_n$

Postoje nizovi konstanti a_n i $b_n > 0$ t.d.

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2 P(|X_1| > y)}{E(|X_1|^2; |X_1| \leq y)} \rightarrow 0 \quad y \rightarrow \infty$$

12 teorema 22 sledi i dovoljnost
Ljapunovljevog usjeta za c.g.t.

• pretpostavite $E|X_{n,k}|^{2+\delta} < \infty$ za neki $\delta > 0$
i sve n, k

• (Lj.2)

$$\lim_n \sum_{k=1}^n E|X_{n,k}|^{2+\delta} = 0$$

Sad Lindebergov usjet (tm 22 ii) vrijedi jer

$$\sum_n E(|X_{n,m}|^2; |X_{n,m}| > \varepsilon) \leq \sum_1^n \frac{E|X_{n,m}|^{2+\delta}}{\varepsilon^\delta} \rightarrow 0$$

3

BRZINA KONVERGENCIJE

Ako su X_i n.j.d. $EX_i = 0$, $\text{Var } X_i = \sigma^2 \in (0, \infty)$

sad znamo

$$S_n / \sigma \sqrt{n} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

†₁. Iza distrib $F_n(x) = P\left(\frac{S_n}{\sigma \sqrt{n}} \leq x\right) \rightarrow \Phi(x) \forall x$

no postavljaju se pitanje brzine te
konvergenije

THEOREM 24 (Berry-Esseen)

Ako $E|X_i|^3 = \rho < \infty \Rightarrow$

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq 3 \frac{\rho}{\sigma^3 \sqrt{n}}$$

LOKALNI GRANIČNI TEOREM

Def Sl. var. X ima razdiob. konzentriranu
na rešetci ako postoji $b \in \mathbb{R}, h > 0$ t.d.

$$\mathbb{P}(X \in b + h\mathbb{Z}) = 1$$

[engl. lattice distribution]

Mi imamo da prije de-Moivre Laplaceovog teorema
možemo nešto reći o konvergenciji
(diskretnih) gustoća prema normalnoj
gustoći!

TEOREM 25

Za $\varphi(t) = E e^{itX}$ uvijek vrijedi jedna
od sljedeće tri mogućnosti:

i) $|\varphi(t)| < 1 \quad \forall t \neq 0 \quad \rightarrow \text{nonlattice}$

ii) $\exists \lambda > 0$ t.d. $|\varphi(\lambda)| = 1$ & $|\varphi(t)| < 1$
za $t \in (0, \lambda)$, tada je X koncentrirana
na rešetci širine $2\pi/\lambda \rightarrow \text{lattice}$

iii) $|\varphi(t)| = 1 \quad \forall t$, tada je $X = b$ g.s.
 $\rightarrow \text{degenerate case}$

Neka su $X_1, X_2, \dots$ n.j.d. $EX_i = 0$

$0 < \text{Var } X_i = \sigma^2 < \infty$ i imaju razbirobu koncentriranu na rešetci širine h

$$\Rightarrow P(X_i \in b+h\mathbb{Z}) = 1 \Rightarrow P(S_n \in nb+h\mathbb{Z}) = 1$$

$$\varphi_n(x) = P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} = x\right) \quad x \in \left\{ \frac{nb+h\mathbb{Z}}{\sqrt{n}}, z \in \mathbb{Z} \right\} =: I_n$$

THEOREM 26

$$\sup_{x \in I_n} \left| \frac{\sqrt{n}}{h} \cdot \varphi_n(x) - \varphi_{\sigma}(x) \right| \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

U "neresetkastom slučaju", pretpostavimo

$X_1, X_2, \dots$ n.j.d. $EX_i = 0$, $0 < \text{Var } X_i = \sigma^2 < \infty$

te $|\varphi(t)| < 1 \quad \forall t \neq 0$

THEOREM 27

Pretpostavite $X_n/\sqrt{n} \rightarrow x$, te $a < b$

$$\sqrt{n} P(S_n \in (x_n + a, x_n + b)) \rightarrow (b-a) \varphi_{\sigma}(x)$$

||

$$\sqrt{n} P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \in \left(\frac{x_n}{\sqrt{n}} + \frac{a}{\sqrt{n}}, \frac{x_n}{\sqrt{n}} + \frac{b}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

POISSONOVA APROKSIMACIJA

Neka je $\mathcal{S}$ prebrojiv, a μ i ν dve razdiobe na $\mathcal{S}$ udaljenost totalne / potpune varijacije između μ i ν definišamo kao

$$\|\mu - \nu\| = \|\mu - \nu\|_{TV} \equiv \frac{1}{2} \sum_z |\mu(z) - \nu(z)| \stackrel{*}{=} \sup_{A \in \mathcal{S}} |\mu(A) - \nu(A)|$$

* je posledica od

$$\begin{aligned} \sum |\mu(z) - \nu(z)| &\geq |\mu(A) - \nu(A)| + |\mu(A^c) - \nu(A^c)| \quad \forall A \in \mathcal{S} \\ &= 2 |\mu(A) - \nu(A)| \end{aligned}$$

a za $A = \{z : \mu(z) \geq \nu(z)\}$ imamo i jednakost

—

TEOREM 28 (zakon velikih događaja / slabi zakon malih brojeva)

Neka su $X_{n,m}$ $m=1, \dots, n$ nezavisne za svaki n i t.d. $X_{n,m} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p_{n,m} & p_{n,m} \end{pmatrix}$. Pretpostavimo

$$i) \quad \sum_{m=1}^n p_{n,m} \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$$

$$ii) \quad \max_{1 \leq m \leq n} p_{n,m} \rightarrow 0$$

$$\text{Za } S_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,n} \Rightarrow S_n \xrightarrow{d} Z \quad Z \sim \text{Pois}(\lambda).$$

LEMA 29 Ako je $\mu_1 \times \mu_2$ produktna
mjera na $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tad. $(\mu_1 \times \mu_2)(x, y) = \mu_1(x) \cdot \mu_2(y)$
tada

$$\|\mu_1 \times \mu_2 - \nu_1 \times \nu_2\| \leq \|\mu_1 - \nu_1\| + \|\mu_2 - \nu_2\|$$

Pr

$$\begin{aligned} 2 \|\mu_1 \times \mu_2 - \nu_1 \times \nu_2\| &= \sum_{x, y} |\mu_1(x) \mu_2(y) - \nu_1(x) \nu_2(y)| \\ &\leq \sum_{x, y} |\mu_1(x) \mu_2(y) - \nu_1(x) \mu_2(y)| + \sum_{x, y} |\nu_1(x) \mu_2(y) - \nu_1(x) \nu_2(y)| \\ &\leq \sum_y \mu_2(y) \cdot 2 \|\mu_1 - \nu_1\| + \sum_x \nu_1(x) \cdot 2 \|\mu_2 - \nu_2\| \end{aligned}$$

□

LEMA 30 Ako je $\mu_1 * \mu_2$ konvolucija
rozdjela μ_1 i μ_2 tj.

$$\mu_1 * \mu_2(x) = \sum_y \mu_1(x-y) \mu_2(y)$$

tada

$$\|\mu_1 * \mu_2 - \nu_1 * \nu_2\| \leq \|\mu_1 \times \mu_2 - \nu_1 \times \nu_2\|$$

Pr

$$\begin{aligned} 2 \|\mu_1 * \mu_2 - \nu_1 * \nu_2\| &= \sum_x \left| \sum_y \mu_1(x-y) \mu_2(y) - \sum_y \nu_1(x-y) \nu_2(y) \right| \\ &\leq \sum_x \sum_y |\mu_1(x-y) \mu_2(y) - \nu_1(x-y) \nu_2(y)| \\ &= 2 \|\mu_1 \times \mu_2 - \nu_1 \times \nu_2\| \end{aligned}$$

□

LEMA 31 Ako je μ vj.mjera td.

$\mu(1) = p$, $\mu(0) = 1-p$, a V Poissonova razdioba s parametrom p tada

$$\|\mu - V\| \leq p^2$$

Još $2 \|\mu - V\| = |\mu(0) - V(0)| + |\mu(1) - V(1)| + \sum_{n \geq 2} V(n)$

$$= |(1-p - e^{-p})| + |p - p e^{-p}| + 1 - e^{-p}(1+p)$$

12 $1-x \leq e^{-x} \leq 1 \quad \text{za } x \geq 0 \Rightarrow$

$$= e^{-p} - 1 + p + p(1 - e^{-p}) + 1 - e^{-p} - p e^{-p}$$

$$= 2p(1 - e^{-p}) \leq 2p^2$$

□

Dejstvo 28

Neka je μ_n razdioba od $X_{n,m}$
 $\mu_n \xrightarrow{\quad} S_n$

$V_{n,m}$ Poiss. razdioba s param. $p_{n,m}$

$V_n \xrightarrow{\quad} \lambda_n = \sum_{m=1}^n p_{n,m}$

kako je $\mu_n = \mu_{n,1} * \dots * \mu_{n,n}$, $V_n = V_{n,1} * \dots * V_{n,n}$

Lemma 23-31 $\Rightarrow$

$$\|\mu_n - V_n\| \leq \sum_{m=1}^n \|\mu_{n,m} - V_{n,m}\| \leq 2 \cdot \sum_{m=1}^n p_{n,m}^2$$

(A)

$$\leq 2 \cdot \max p_{n,m} \sum_{m=1}^n p_{n,m} \rightarrow 0$$

Kako $V_n \xrightarrow{w} V \sim \text{Pois}(\lambda)$

traženi rezultat slijedi.

POISSONOVSKA APROKSIMACIJA ZA ZAVISNE POGODAJE

Primer

r kuglica slučajno stavljamo u n kutija
(svih n^r rasporeda su jednako vjerovatni)

$$A_i = \{i\text{-ta kutija prazna}\}$$

$$N_n = \# \text{ praznih kutija} = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}$$

$$\text{Jako } P(A_i) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^r, \quad E N_n = n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^r$$

jer A_i nisu nezavisni događaji

—

a) pretpostavimo

$$\frac{r}{n} \rightarrow c, \text{ tada } \frac{E N_n}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^r$$

$$\rightarrow \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{r}{n}} \rightarrow e^{-c}$$

Moze se pokazati:

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow{P} e^{-c}$$

$$\begin{aligned} E(N_n^2) &= E\left(\sum_{i=1}^n 1_{A_i}\right)^2 = \sum_{1 \leq k, m \leq n} P(A_k \cap A_m) = \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i) + \sum_{k \neq m} P(A_k \cap A_m) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^r \\ &\quad + n(n-1)\left(1 - \frac{2}{n}\right)^r \end{aligned}$$

$$\text{Var}(N_n) = EN_n^2 - (EN_n)^2$$

$$= \dots = n(n-1) \left[\left(1 - \frac{2}{n}\right)^r - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2r} \right] + n \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^r - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2r} \right]$$

↓

$$\text{Var} \frac{N_n}{n} = \frac{1}{n^2} \text{Var} N_n \rightarrow e^{-2c} - (e^{-c})^2 + 0 = 0$$

↓

$$P\left(\left|\frac{N_n - EN_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var} \frac{N_n}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow{P} e^{-c}$$

—

Fiksirajmo sada praznu kutiju.

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{ako } j\text{-ta kuglica u toj kutiji} \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Uočište $X_j \stackrel{\text{njd}}{\sim} \text{Ber}\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\sum_{j=1}^r EX_j = \frac{r}{n} \rightarrow c$$

Teorem 28 $\Rightarrow \sum_{j=1}^r X_j \xrightarrow{d} \text{Poi}(c)$

Spec. $P(\text{kutija je prazna}) \rightarrow e^{-c}$

h.

b) neka sada $n e^{-r/n} \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$

$$\Rightarrow \log n - \frac{r}{n} \rightarrow \log \lambda$$

$$\text{tj. } \frac{r}{n} - \log n + \log \lambda \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow r = n \log n - n \log \lambda + o(n)$$

Tvrdimo: broj praznih kutija konvergira
Poissonovoj razdiobi s parametrom λ

Intuitivno: i -ta kutija je prazna s vjeroj.

$e^{-r/n} \approx \lambda/n$, kad bi ti događaji bili nezavisni
rezultat bi slijedio po tm 2.8

⇒

gornj

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^r = \left(\frac{n-k}{n}\right)^r$$

$\varphi_m(r, n) = P(\text{točno } m \text{ kutija prazno})$

$$\begin{aligned} \varphi_0(r, n) &= 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \sum P(A_i) + \sum P(A_i \cap A_j) - \dots \\ &= 1 - n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^r + \binom{n}{2}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^r + \dots + (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}\right)^r \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^r \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\phi_m(r, n) = \binom{n}{m} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^r \phi_0(r, n-m)$$

broj #
izbora m
praznih kutija

vj. da je i -th
 m kutija
prazno

vjeroj. da
niti jedna od
ostalih
nije prazna

Ako $n \cdot e^{-r/n} \rightarrow \lambda \Rightarrow$

$$\binom{n}{m} \cdot \left(1 - \frac{m}{n}\right)^r \rightarrow \frac{\lambda^m}{m!}$$

—

Ako u

$$\phi_0(r, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^r$$

postavimo $n \rightarrow \infty$ i d. $n e^{-r/n} \rightarrow \lambda$

ϕ_0 t.j. o dom. konv.

$$\lim \phi_0(r, n) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}$$

za fiksni m

$$(n-m) e^{-r(n-m)} \rightarrow \lambda$$

i d.

$$\phi_m(r, n) = \binom{n}{m} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^r \phi_0(r, n-m) \rightarrow \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad m \geq 1.$$

—

POISSONOV PROCES

Th o Poissonovoj aproksimaciji ima puno raznih generalizacija, no pojava Poissonove razdiobe u primjenama usko je vezana i uz pojam Poissonovog procesa

Neka $(N(s,t])_{s \leq t}$ predstavljaju familiju sl. varijabli koja modelira broj dolazaka / incidenta / šteta / ... u intervalu $(s,t]$; neka

- i) # dolazaka u disp. intervalima budu nezavisne sl. var.
- ii) razdioba $N(s,t]$ ovisi samo o $t-s$.
- iii) $P(N(0,h]=1) = \lambda h + o(h)$
- iv) $P(N(0,h] \geq 2) = o(h)$

THEOREM 32 Uz uvjete i) - iv), $N(0,t]$ imaju Poiss. razdiobu s parametrom λt .

g.k. $X_{n,m} = N(\frac{m-1}{n}t, \frac{m}{n}t]$ $m=1,2,\dots,n$, iskonstru-
irajmo teorem o Poissonovoj aproksimaciji, za
 $X'_{n,m} = X_{n,m} \wedge 1$, $S'_n = X'_{n,1} + \dots + X'_{n,n} \leq N(0,t]$

No

$$X_{n,1} + \dots + X_{n,n} = S_n$$

$$P(S_n \neq S'_n) \rightarrow 0 \quad \text{po iv)}$$

□

def Familija sl. varijabli $N(t)$ koja zadovoljava

i) $\forall t_0 < t_1 < \dots < t_n$, $(N(t_k) - N(t_{k-1}))_{k=1, \dots, n}$ su nezavisne sl. var.

ii) $N(t) - N(s) \sim P(\lambda(t-s))$ $s \leq t$

se naziva (homogeni) Poissonov proces s intenzitetom λ .

Dakle imamo dvije karakterizacije ovog procesa no postoji i treća, za

$\xi_1, \xi_2, \dots$ n.j.d. $\sim \text{Exp}(\lambda)$, $T_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$

$N(t) = \sup \{n \geq 1 : T_n \leq t\}$ je Poissonov proces

Na prostoru s mjerom $(S, \mathcal{S}, \mu)$

opet možemo definirati Poissonov proces kao slučajnu mjeru $(N(A))_{A \in \mathcal{S}}$ tak.

i) za sve disjunktne $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$

$N(A_1), \dots, N(A_n)$ su nezavisne sl. var.

ii) $N(A) \sim P(\mu(A))$.

Tipično kažemo da je N Poissonova slučajna mjera sa srednjom mjerom μ

[PRM w. mean measure μ]

STABILNE RAZDIOBE

Za $X_1, X_2, \dots$ n.j.d. t.d. $EX_i = \mu$; $\text{Var } X_i = \sigma^2 \in (0, \infty)$

$$\Rightarrow \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

Pitanje: što ako $\text{Var } X_i = +\infty$, tj. $EX_i^2 = +\infty$?

postoje li nizovi (b_n) (a_n) t.d.

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} y$$

za neku nedegeneriranu sl. varijablu y ?

Primjer

Neka je X_i simetrična sl. var. t.d. za $\alpha \in (0, 2)$

$$P(|X_i| > x) = x^{-\alpha}, \quad x \geq 1 \Rightarrow$$

$$P(X_i < -x) = P(X_i > x) = \frac{1}{2} x^{-\alpha}, \quad x \geq 1$$

Za $\varphi(t) = Ee^{itx}$ vrijedi

$$1 - \varphi(t) = \int_1^{\infty} (1 - e^{itx}) \frac{\alpha}{2|x|^{\alpha+1}} dx + \int_{-\infty}^{-1} (1 - e^{itx}) \frac{\alpha}{2|x|^{\alpha+1}} dx$$

$$= \alpha \int_1^{\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{x^{\alpha+1}} dx = \left(\begin{array}{l} tx = u \\ dx = du/t \end{array} \right)$$

$$= t^{\alpha} \cdot \alpha \cdot \int_t^{\infty} \frac{1 - \cos u}{u^{\alpha+1}} du$$

$$\text{Za } u \rightarrow 0, \quad 1 - \cos u \sim u^2/2 \Rightarrow \frac{1 - \cos u}{u^{\alpha+1}} \sim u^{-\alpha+1}/2$$

što je integrabilno jer $\alpha < 2 \Leftrightarrow -1 < -\alpha + 1$

Ako je

$$C = \alpha \int_0^\infty \frac{1 - \cos u}{u^{\alpha+1}} du < \infty$$

$$\Rightarrow 1 - \ell(t) \sim C \cdot |t|^\alpha \quad \text{za } t \rightarrow 0$$

(jer $\ell(t) = \ell(-t)$ zbog simetrije).

$$\text{Za } X_i \text{ n.j.d. i } S_n = X_1 + \dots + X_n \Rightarrow$$

$$\mathbb{E} e^{itS_n/n^{1/\alpha}} = (\ell(t/n^{1/\alpha}))^n = \left(1 - \underbrace{(1 - \ell(t/n^{1/\alpha}))}_{\sim C|t|^\alpha}\right)^n \Rightarrow$$

$$\mathbb{E} e^{itS_n/n^{1/\alpha}} \rightarrow e^{-C|t|^\alpha}$$

što je prema tmu 33.6. u knjizi

karakteristična funkcija

ili direktno po tmu o neprekidnosti

$$\Rightarrow \exists \text{ nedegenerirana } Y, \quad \mathbb{E} e^{itY} = e^{-C|t|^\alpha} \text{ td.}$$

$$S_n/n^{1/\alpha} \xrightarrow{d} Y$$

Dokazimo to i alternativnim načinom

Za $0 < a < b$, t.d. $a n^{1/\alpha} > 1$

$$P(a n^{1/\alpha} < X_1 < b n^{1/\alpha}) = \frac{1}{2} (a^{-\alpha} - b^{-\alpha}) \cdot \frac{1}{n} \quad (1)$$

Po t.m. o Poiss. aproksimaciji

$$N_n(a, b) \equiv \# \{m \leq n : X_m / n^{1/\alpha} \in (a, b)\} \xrightarrow{d} N(a, b)$$

gdje: $N(a, b) \sim P\left(\frac{1}{2}(a^{-\alpha} - b^{-\alpha})\right)$

$$(1) \Rightarrow \forall A \in \mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta), \delta n^{1/\alpha} > 1$$

$$P(X_1 / n^{1/\alpha} \in A) = \frac{1}{n} \int_A \frac{\alpha}{2|x|^{\alpha+1}} dx$$

$$\Rightarrow N_n(A) \equiv \# \{m \leq n : X_m / n^{1/\alpha} \in A\} \xrightarrow{d} N(A) \sim P(\mu(A))$$

gdje definiramo mjeru μ sa

$$\mu(A) = \int_A \frac{\alpha}{2|x|^{\alpha+1}} dx < \infty$$

Famcija sluč. varijabli $(N(A))_A$ predstavlja Poissonov proces ili preciznije PRM sa srednjom mjerom μ .

Uočite

$$\mu(x, \infty) = \frac{1}{2} x^{-\alpha} \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow N(x, \infty) < \infty \quad \text{g.s.}$$

Dakle slučajni skup

$$X_n = \{ X_m / n^{1/\alpha} : 1 \leq m \leq n \}$$

kao "limes" ima FRM N.

Opišimo limes za $S_n / n^{1/\alpha}$ tj. sumirajmo
točke skupa X_n

Za $\varepsilon > 0$

$$I_n(\varepsilon) = \{ m \leq n : |X_m| > \varepsilon n^{1/\alpha} \}$$

$$\hat{S}_n(\varepsilon) = \sum_{m \in I_n(\varepsilon)} X_m \quad \bar{S}_n(\varepsilon) = S_n - \hat{S}_n(\varepsilon)$$

Pokazat ćemo da je doprinos od $\bar{S}_n$
relativno mali za male ε .

—

$$\bar{X}_m(\varepsilon) = X_m \cdot \mathbb{1}_{(|X_m| \leq \varepsilon n^{1/\alpha})}, \Rightarrow E \bar{X}_m(\varepsilon) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{zbog} \\ \text{simetrije} \end{array}$$

$$\Rightarrow E(\bar{S}_n(\varepsilon)^2) = n E \bar{X}_1(\varepsilon)^2$$

$$\begin{aligned} E \bar{X}_1(\varepsilon)^2 &= \int_0^{\varepsilon n^{1/\alpha}} 2y P(|\bar{X}_1(\varepsilon)| > y) dy \leq \int_0^1 2y dy + \\ &+ \int_1^{\varepsilon n^{1/\alpha}} 2y y^{-\alpha} dy = 1 + \frac{2}{2-\alpha} \varepsilon^{2-\alpha} n^{2/\alpha-1} - \frac{2}{2-\alpha} \leq \\ &\leq \frac{2 \varepsilon^{2-\alpha}}{2-\alpha} n^{2/\alpha-1} \quad (\text{jer } 0 < \alpha < 2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E(\bar{S}_n(\varepsilon) / n^{1/\alpha})^2 \leq \frac{2 \varepsilon^{2-\alpha}}{2-\alpha} \quad (*) \text{ što je proizvoljno} \\ \text{malo za male } \varepsilon.$$

Da bismo računali limes od $\hat{S}_n(\varepsilon)/n^{1/\alpha}$

uočimo

$$\text{card } I_n(\varepsilon) \sim \text{Bin}(n, \frac{\varepsilon^{-\alpha}}{n})$$

ako $\text{card } I_n(\varepsilon) = m$, $\hat{S}_n(\varepsilon)/n^{1/\alpha}$ je suma m nezavisnih
sl. varijabli s fkom. distrib. F_n^ε koja
je simetrična i

$$1 - F_n^\varepsilon(x) = P(X_1/n^{1/\alpha} > x \mid |X_1|/n^{1/\alpha} > \varepsilon) = \frac{x^{-\alpha}}{2\varepsilon^{-\alpha}}, x \geq \varepsilon$$

to je distribucija jednaka onoj od εX_1 , pa
ako $\varphi(t) = E e^{itX_1}$, F_n^ε ima karak. fku
 $\varphi(\varepsilon t)$

⇓

$$E(\exp(it\hat{S}_n(\varepsilon)/n^{1/\alpha})) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \left(\frac{\varepsilon^{-\alpha}}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\varepsilon^{-\alpha}}{n}\right)^{n-m} \varphi(\varepsilon t)^m$$

Vrijedi: $\binom{n}{m} \cdot \frac{1}{n^m} = \frac{1}{m!} \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1)}{n^m} \leq \frac{1}{m!}$,

$$\left(1 - \frac{\varepsilon^{-\alpha}}{n}\right)^n \leq e^{-\varepsilon^{-\alpha}}$$

Ima o don. konv $\Rightarrow$

$$E(\exp(it\hat{S}_n(\varepsilon)/n^{1/\alpha})) \rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\varepsilon^{-\alpha}} (\varepsilon^{-\alpha})^m \varphi(\varepsilon t)^m / m!$$

$$= \exp[-\varepsilon^{-\alpha} (1 - \varphi(\varepsilon t))]$$

nije još u traženom obliku

LEMA 33 Ako $h_n(\varepsilon) \rightarrow g(\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$ i
 $g(\varepsilon) \rightarrow g(0)$ za $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \exists$ niz (ε_n) tak. $\varepsilon_n \rightarrow 0$ i
 $h_n(\varepsilon_n) \rightarrow g(0)$

Stavimo

$$h_n(\varepsilon) = \overline{E} e^{it \hat{S}_n(\varepsilon)/n^{1/2}}, \quad g(\varepsilon) = e^{-\varepsilon^\alpha (1 - \ell(\varepsilon t))}$$

Kako $1 - \ell(t) \sim C|t|^\alpha$ za $t \rightarrow 0 \Rightarrow$
 $g(\varepsilon) \rightarrow e^{-C|\varepsilon|^\alpha}$ za $\varepsilon \rightarrow 0$

prema gornjoj lemi $\exists$ niz $\varepsilon_n \rightarrow 0$ tak.

$$h_n(\varepsilon_n) \rightarrow \exp(-C|\varepsilon_n|^\alpha)$$

Ako Y ima kar. fju ovu $\Rightarrow \hat{S}_n(\varepsilon_n)/n^{1/2} \xrightarrow{d} Y$

S obzirom da $\varepsilon_n \rightarrow 0$ (*) $\Rightarrow$

$$\overline{S}_n(\varepsilon_n)/n^{1/2} \xrightarrow{P} 0$$

$$\frac{S_n}{n^{1/2}} = \underbrace{\hat{S}_n(\varepsilon_n)/n^{1/2}}_{\xrightarrow{d} Y} + \underbrace{\overline{S}_n(\varepsilon_n)/n^{1/2}}_{\xrightarrow{P} 0} \xrightarrow{d} Y$$

po Slutskyjevoj lemi.

DEF Funkcija L je sporo promjenjiva /
varirajuća ako

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(t+x)}{L(t)} = 1 \quad \forall x > 0$$

Primjer

• $\log t$, $\log \log t$, const , lin. kombinacije
su sporo var.

• t^ε nije ako je $\varepsilon \neq 0$

DEF Funkcija G je regularno varirajuća
s indeksom κ ako $G(x) = L(x) \cdot x^\kappa$.

za

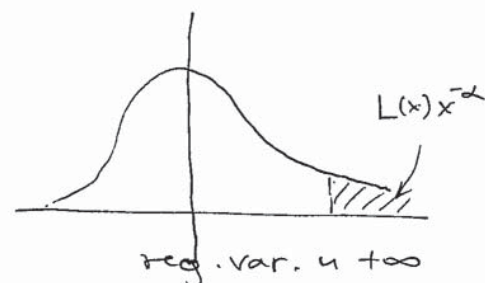
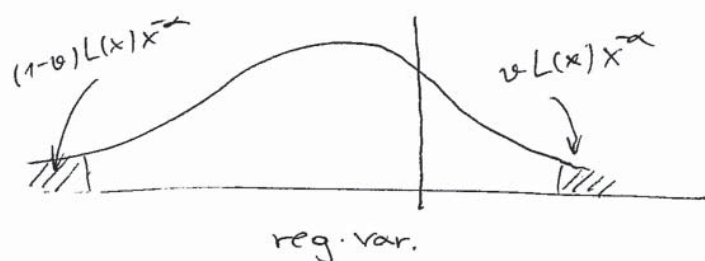
DEF Razdioba F je reg. varirajuća u $+\infty$

ako je $\bar{F}$ reg. varirajuća fja, a

X je regularno varirajuća slučajna varijabla
s indeksom α , ako je

i) $P(|X| > x)$ reg. var. fja s indeksom α

ii) $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X > x)}{P(|X| > x)} = v \in [0, 1]$



TEOREM 34

Ako su $X_1, X_2, \dots$ n.j.d. regularno varirajuće s indeksom $\alpha \in (0, 2)$, za

$$a_n = \inf \left\{ x : P(|X_1| > x) \leq \frac{1}{n} \right\}, \quad b_n = n E(X_1 \cdot \mathbb{1}_{\{|X_1| \leq a_n\}})$$

vrjedni:

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} Y$$

gdje Y ima nedegeneriranu razdiobu

NAP Iako tm 34 ne izgleda kao značajna generalizacija primjera, njegov usjet tj. regularna varijacija je ujedno i nužan usjet da bi postojali $(a_n), (b_n)$ i Y tak. $\frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} Y$

ako je $EX_i^2 = +\infty$.

(Gnedenko Kolmogorov (1954) i.e. Breiman (1968))

dan tm 34

Po definic. niza (a_n)

$$n \cdot P(|X_1| > a_n) \rightarrow 1 \quad (\Delta)$$

naime

$$n P(|X_1| > a_n) \leq 1, \text{ a za } \varepsilon > 0$$

$$\text{uzmemo li } x = a_n / (1 + \varepsilon) \text{ i } t = 1 + 2\varepsilon \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (1 + 2\varepsilon)^{-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(|X_1| > (1 + 2\varepsilon) a_n / (1 + \varepsilon))}{P(|X_1| > a_n / (1 + \varepsilon))} \leq \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{P(|X_1| > a_n)}{1/n} \Rightarrow (\Delta) \text{ jer je } \varepsilon \text{ proizvoljan.} \end{aligned}$$

Zbog reg. varijacije

$$n P(X_1 > x a_n) \rightarrow v x^{-\alpha} \text{ za } x > 0$$

$$\Rightarrow \bar{I}_n^+(x) = \text{card} \{m \leq n : X_m > x a_n\} \xrightarrow{d} P(v x^{-\alpha})$$

$\Rightarrow$ (kao i prije)

$\mathcal{X}_n = \{X_m / a_n : 1 \leq m \leq n\}$ konvergira ka PRM
sa srednjom mjerom μ tol.

$$\mu(A) = \int_{A \cap (0, \infty)} \frac{v x^{-\alpha}}{|x|^{\alpha+1}} dx + \int_{A \cap (-\infty, 0)} \frac{(1-v) x^{-\alpha}}{|x|^{\alpha+1}} dx.$$

Neka

$$\hat{\mu}(\varepsilon) = E X_m \mathbb{1}_{(\varepsilon a_n \leq |X_m| \leq a_n)},$$

$$I_n(\varepsilon) = \text{card} \{m \leq n : |X_m| > a_n \varepsilon\}$$

$$\hat{\mu}(\varepsilon) = E X_m \mathbb{1}_{(|X_m| \leq \varepsilon a_n)}, \quad \hat{S}_n(\varepsilon) = \sum_{m \in I_n(\varepsilon)} X_m$$

$$\begin{aligned}\bar{S}_n(\varepsilon) &= (S_n - b_n) - (\hat{S}_n(\varepsilon) - n\hat{\mu}(\varepsilon)) \\ &= \sum_1^n (X_n \mathbb{1}_{(|X_n| \leq \varepsilon a_n}) - \bar{\mu}(\varepsilon))\end{aligned}$$

$$\text{za } \bar{X}_n(\varepsilon) = X_n \mathbb{1}_{(|X_n| \leq \varepsilon a_n)} \quad \text{je'}$$

$$E(\bar{S}_n(\varepsilon)/a_n)^2 = n \cdot \text{Var}(\bar{X}_1(\varepsilon)/a_n) \leq n \cdot E(\bar{X}_1(\varepsilon)/a_n)^2$$

$$E(\bar{X}_1(\varepsilon)/a_n)^2 \leq \int_0^\varepsilon 2y P(|X_1| > ya_n) dy$$

$$= P(|X_1| > a_n) \int_0^\varepsilon 2y \frac{P(|X_1| > ya_n)}{P(|X_1| > a_n)} dy$$

$\downarrow$ 0 $\downarrow$ $y^{-\alpha}$ za $n \rightarrow \infty$

no da bismo konverencije: limes i integral
 trebamo → 0 tada

=

LEMA 35 za sve $\delta > 0 \quad \exists C + d.$

$\forall t \geq t_0 \quad i \quad y \leq 1$

$$P(|X_1| > yt) / P(|X_1| > t) \leq C y^{-\alpha-\delta}$$

jer Po reg konvergenciji $\Rightarrow$

$$\frac{P(|X_1| > t/2)}{P(|X_1| > t)} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-\alpha} = 2^\alpha$$

za $t \geq t_0$ imamo

$$P(|X_1| > t/2) / P(|X_1| > t) \leq 2^{\alpha+\delta}$$

Ponovimo to i stavimo kada

$$t/2^n < t_0 \quad i \quad \forall n \geq 1$$

$$P(|X_1| > t/2^n) / P(|X_1| > t) \leq C 2^{(\alpha+\delta)n}$$

gdje je $C = 1 / P(|X_1| > t_0)$

Primjenjujuci to na prvi n dob. $1/2^n < y$

iz $y \leq 1/2^{n-1} \Rightarrow$

$$P(|X_1| > yt) / P(|X_1| > t) \leq C \cdot 2^{\alpha+\delta} y^{-\alpha-\delta}$$

sto dokazuje lemu



BESKONAČNO DIELJIVE RAZDIOBE

Neka je $(X_{n,i})$ trokutasti niz sl. varijabli t.d.
 $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n}$ su n-jd

Pitajući se za koje nedegenerirane sl. varijable Z možemo naći nizove $(a_n), (b_n)$ t.d.

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} Z \quad ? \quad (1)$$

DEF Razdioba sl. var. Z je beskonačno djeljiva ako $\exists$ n-jd $Y_{n,1}, \dots, Y_{n,n}$ t.d. $Z \stackrel{d}{=} Y_{n,1} + \dots + Y_{n,n}$.

TEOREM 3.6

Sl. var. Z je limes suma kao u (1) $\Leftrightarrow Z$ je besk. djeljiva

—

Jasno: sve stabilne razdiobe, uključujući normalnu su besk. djeljive.

Beskonačno djeljive su i Poissonova odn. slična Poissonova razdioba.

Ako je μ besk. djeljiva razdioba, pripadna karakt. funkcija je suđa različita od 0.

TEOREM 37 (Lévy-Hincinova formula)

Sl. var. Z ima best. djeljivu rozdiobu $\Leftrightarrow$ ima karakt. funkciju oblika

$$\log \varphi(t) = i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int (e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}) \mu(dx)$$

za neku mjeru μ td. $\mu\{0\} = 0$, $\int \frac{x^2}{1+x^2} \mu(dx) < \infty$.

NAP • μ nazivamo Lévyjevu mjeru (od Z).

- za $\mu = 0$ dobijemo Gaussov rozdiobu $N(\mu, \sigma^2)$
- za $\sigma = 0$, Z je lineas sume točaka Poissonovog procesa s intenzitetom μ .

TEOREM 38 (Kolmogorov)

Sl. var. Z ima best. djeljivu rozdiobu sačetakiranjem nula i varijansom $< \infty \Leftrightarrow$ ima karakt. funkciju oblika

$$\log \varphi(t) = \int (e^{itx} - 1 - itx) \frac{1}{x^2} \nu(dx)$$

gdje ν je konačna mjeru, $\nu(\mathbb{R}) = \text{Var } Z$; a integrand je $-t^2/2$ za $x=0$.

GRANICNI TEOREMI U $\mathbb{R}^d$

Za sl. vektor $X = (X_1, \dots, X_d)$ definiamo fku distribucije $F: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ sa

$$F(x) = P(X \leq x) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d).$$

Za (funkcije) distribucije $F_i(x) = P(X_i \leq x)$

kažemo oba su marginalne distribucije od F .

Ako postoji $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ td.

$$F(x_1, \dots, x_d) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_d} f(y) dy_d \dots dy_1$$

zovemo ji gustoćom od F ; a za F kažemo da je neprekidna.

—

Ako su $F, F_n, n \in \mathbb{N}$ fke distribucije na $\mathbb{R}^d$ i

$$F_n(x) \rightarrow F(x) \quad \forall x \in C(F)$$

opet pišemo $F_n \xrightarrow{w} F$ (re. $F_n \xrightarrow{d} F$), tj.

F_n slabo konvergiraju ka F .

TEOREM 3.9

Ekvivalentno je:

i) $X_n \xrightarrow{d} X$ u $\mathbb{R}^d$ (tj. $F_{X_n} \xrightarrow{w} F_X$)

ii) $Ef(X_n) \rightarrow Ef(X)$ $\forall$ f ogr. nepr.

iii) $Ef(X_n) \rightarrow Ef(X)$ $\forall$ f ogr. i Lipschitz. neprek.

⋮

DEF Niz razdioba (vjer. mjera) na $\mathbb{R}^d$ je napet ako $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0$ t.d.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n([M, M]^d) \geq 1 - \varepsilon.$$

1. ordji vrijedi

napetost $\Rightarrow$ relativnu kompaktnost

tj. $\exists$ slabo konvergentan podniz napetog niza.

DEF Karakter. funkcija sl. vektora $(X_1, \dots, X_d)$ je $\varphi(t) = E e^{i\langle t, X \rangle}$ gdje $\langle t, X \rangle = (t_1 X_1 + \dots + t_d X_d)$.

Formula inverzije također ima analogon u $\mathbb{R}^d$, a suma nezavisnih sl. vektora karakter. f-ja koja je produkt karakterističnih funkcija.

THEOREM 4.0

$$X_n \xrightarrow{d} X \iff \varphi_{X_n}(t) \rightarrow \varphi_X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^d.$$

THEOREM 4.1 (Cramér - Woldovo sredstvo)

$$X_n \xrightarrow{d} X \iff \langle v, X_n \rangle \xrightarrow{d} \langle v, X \rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}^d$$

TEOREM 42 (c.g.t. u $\mathbb{R}^d$)

Neka su $X_1, X_2, \dots$ n.j.d. sl. vektori s konacnim kovarijancama

$$\Gamma_{ij} = E((X_{ni} - \mu_i)(X_{nj} - \mu_j))$$

tada

$$\frac{S_n - n\mu}{\Gamma_n} \xrightarrow{d} Z$$

gdje je Z višedim. normalni sl. vektor s očekivanjem 0 i kovarijacijskom matricom $\Gamma = (\Gamma_{ij})$.

Prez 12 c.g.t. (tm 20) i tm-a 41.

□

TEOREM 43

Ako su $(X_n), (Y_n)$ nizovi k odn. m-dimenz. slučajnih vektora t.d. $X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{P} b \in \mathbb{R}^m$

tada

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \begin{pmatrix} X \\ b \end{pmatrix}$$

Prez Josno $\begin{pmatrix} X_n \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \begin{pmatrix} X \\ b \end{pmatrix}$ po tm 40 i pr.

Također $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_n \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{P} 0$ po pretp. dakle

tvrdnja sledi korištenjem iduce leme

□

LEMA 44

Ako su $(X_n), (Y_n)$ nizovi sl. vektora td.

$$X_n - Y_n \xrightarrow{P} 0 \quad ; \quad X_n \xrightarrow{d} X \Rightarrow Y_n \xrightarrow{d} X.$$

Juz Po funkcio donosno je vidjeti.

$$|\varphi_{Y_n}(t) - \varphi_X(t)| \rightarrow 0 \quad \quad \quad t \in \mathbb{R}^d$$

$$\leq |\varphi_{Y_n}(t) - \varphi_{X_n}(t)| + |\varphi_{X_n}(t) - \varphi_X(t)|$$

Ali:

$$|\varphi_{Y_n}(t) - \varphi_{X_n}(t)| = E|e^{it \cdot Y_n} - e^{it \cdot X_n}| \leq E|1 - e^{it \cdot (X_n - Y_n)}|$$

$\rightarrow 0 \quad \square$

KOROLAR 45 (Slutsky)

Za nizove sl. vektora $(X_n), (Y_n)$ td. $X_n \xrightarrow{d} X$

$$; \quad Y_n \xrightarrow{P} b \Rightarrow \text{i) } X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + b$$

$$\text{ii) } \langle Y_n, X_n \rangle \xrightarrow{d} \langle b, X \rangle$$

PROPOZICIJA 46

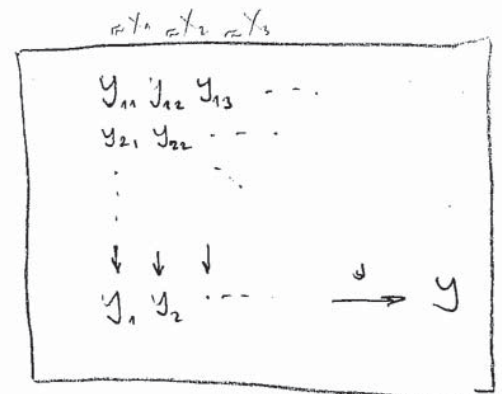
Neka su $(X_n), (Y_{nj})$ k -dimenzionalni slučajni vektori t.d.

i) $Y_{nj} \xrightarrow{d} Y_j$

ii) $Y_j \rightarrow Y$

iii) $\lim_{j \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - Y_{nj}| > \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow X_n \xrightarrow{d} Y$



IV SLUČAJNE ŠETNJE

KREĆENJE ZAUSTAVLJANJA

Za nizove njd. sl. varijabli (elementa)
u prostoru $(S, \mathcal{S})$ pretpostavljamo (b.s.o.)
da su definirane na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ t.d.

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_i \in S\}$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \dots$$

$$\mathbb{P} = \mu \times \mu \times \dots$$

$$X_n(\omega) = \omega_n$$

—

DEF Preslikavanje $\pi: N \rightarrow N$ je končno

permutacija ako je π permutacija t.d.
 $\pi(i) \neq i$ za najviše končno mnogo $i \in N$.

Događaj A je invarijantan ako $\pi^{-1}A = A$

(gdje $(\pi\omega)_i = \omega_{\pi(i)}$) za svaku končnu
permutaciju π .

Klasa invarijantnih događaja čini σ -algebru
invarijantnih događaja u oznaci $\mathcal{I}$.

Primer (izmenjivi događaji)

Za X_i njd kao gore izmenjivi su događaji

- i) $\{S_n \in \mathcal{B} \text{ b.c.}\}$
- ii) $\{\limsup S_n/c_n \geq 1\}$
- iii) svi repni događaji tj. $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{E}$.

—
THEOREM 1 (Hewitt - Savage zakon 0-1)

Ako su $X_1, X_2, \dots$ njd. i $A \in \mathcal{E} \Rightarrow P(A) \in \{0, 1\}$.

Dokaz Uzmimo $A \in \mathcal{E}$, pokazat ćemo da je nezavisan sa samim sobom pa trdinja odmah sledi.

Neka su $A_n \in \sigma(X_1, \dots, X_n)$ i d.

$$P(A_n \Delta A) \rightarrow 0$$

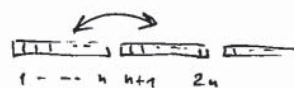
gdje $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ predst. simetričnu razliku (oni postoji po LA 2.1 u Englezi)

Kako $A_n \in \sigma(X_1, \dots, X_n) \Rightarrow \exists \mathcal{B}_n \in \mathcal{F}_{2n}^n$.

$$A_n = \{ \omega : (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathcal{B}_n \} ;$$

neka

$$\pi(j) = \begin{cases} j+n & j=1, \dots, n \\ j-n & j=n+1, \dots, 2n \\ j & j \geq 2n+1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \pi^2 = \text{id}$$

$$\hookrightarrow \pi = \pi^{-1}$$

$\Downarrow$

$$P(\omega : \omega \in A_n \Delta A) = P(\omega : \pi\omega \in A_n \Delta A) \quad (1)$$

naime ω i $\pi\omega$ imaju istu razdiobu (v.j. mjernu) (produktnu)

$$A \in \mathcal{E} \Rightarrow \{ \omega : \pi(\omega) \in A \} = \{ \omega : \omega \in A \} = A$$

$\pi^{-1}(A)$

No

$$\{ \omega : \pi(\omega) \in A_n \} = \{ \omega : (\omega_{n+1}, \dots, \omega_{2n}) \in \mathcal{B}_n \} =: A_n'$$

—

$$\Rightarrow \{ \omega : \pi\omega \in A_n \Delta A \} = \{ \omega : \omega \in A_n' \Delta A \} \quad (2)$$

$$(1) \& (2) \Rightarrow P(A_n \Delta A) = P(A_n' \Delta A)$$

$$\text{Kako } |P(B) - P(C)| \leq P(B \Delta C) \Rightarrow$$

$$P(A_n), P(A_n') \rightarrow P(A)$$

$$\text{No } A \Delta C \subseteq (A \Delta B) \cup (B \Delta C) \Rightarrow$$

$$P(A_n \Delta A_n') \leq P(A_n \Delta A) + P(A \Delta A_n')$$

$\downarrow$
0

$\downarrow$
0

$$\Rightarrow 0 \leq P(A_n) - P(A_n \cap A_n') \leq P(A_n \cup A_n') - P(A_n \cap A_n') = P(A_n \Delta A_n') \rightarrow 0$$

$\Downarrow$

$$P(A_n \cap A_n') \rightarrow P(A) \quad \text{no}$$

A_n & A_n' su nezavisni $\Rightarrow$

$$P(A_n \cap A_n') = P(A_n) \cdot P(A_n') \rightarrow P(A)^2$$

$$\text{tj. } P(A) = P(A)^2$$

□

THEOREM 2

Samo jedan od sledećih

dogodaja ima vjerovatnost veću od 0 i to tačno 1

i) $S_n = 0 \quad \forall n$

ii) $S_n \rightarrow +\infty$

iii) $S_n \rightarrow -\infty$

iv) $-\infty = \liminf S_n < \limsup S_n = +\infty$

Pr Za 1 $\rightarrow \limsup S_n$ je konstanta, npr $c \in [-\infty, \infty]$

za $S_n' = S_{n+1} - X_1 \Rightarrow (S_n') \stackrel{d}{=} (S_n) \Rightarrow$

$$c = \limsup S_n' = c - X_1 \quad \text{ako } |c| < \infty$$

$\Rightarrow X_1 = 0 \quad \text{g.s.} \Rightarrow \text{i)} \quad \text{Slično za } \liminf \Rightarrow \text{ii) iii) i iv)}$

□

Ako su $X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ slučaj (S_n)

nazivamo (simetrična) jednostavna
slučajna šetnja. Ako samo $X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$

za neki $p \in [0,1]$, $q = 1-p$, kažemo
samo da je (S_n) jednostavna.

Primer. (simetrična slučaj. šetnja)

Ako su X_i njd. s razdiobom simetričnom
oko 0 i $P(X_i=0) < 1$ vrijedi:

$$P(\overline{\lim} S_n = +\infty, \underline{\lim} S_n = -\infty) = 1 \quad (*)$$

Ako su X_i njd., $EX_i = 0$, $EX_i^2 = \sigma^2 \in (0, \infty)$

$$\Rightarrow \text{cst.} \quad \frac{S_n}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} Z$$

$$\Rightarrow P(\overline{\lim} S_n = \infty) > P(Z > 0) = \frac{1}{2}$$

$$\text{i sl. } P(\underline{\lim} S_n = -\infty) > \frac{1}{2} \Rightarrow \text{apet vrijedi. } (*)$$

Neka je $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, X_n n.j.d.

DEF Slučajnu varijablu $N: \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ zovemo vrijeme zaustavljanja / zaustavno vrijeme / opcionalna sl. var. ako za sve $n < \infty$, $\{N=n\} \in \mathcal{F}_n$.

Primjer (vrijeme pogastanja)

$N = \inf \{n \geq 1: S_n \in A\}$ je vrnj. zaust. jer

$$\{N=n\} = \{S_1 \in A^c, \dots, S_{n-1} \in A^c, S_n \in A\} \in \mathcal{F}_n.$$

Ako su S, T zaustavna vremena to su i:

- $S \vee T$, $S \wedge T$
- $S \wedge n$, $S \vee n$
- $S + T$

Za vrijeme zaustavljanja N definiiramo:

$$\mathcal{F}_N = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{N=n\} \in \mathcal{F}_n \text{ za sve } n < \infty\}$$

np. $\{N \leq n\} \in \mathcal{F}_N$.

Ako su $M \leq N$ vrem. zaustav. $\Rightarrow \mathcal{F}_M \subseteq \mathcal{F}_N$ (D.Z.).

TEOREM 3, Neka su X_i njd, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$,
a N vrnj. zaustav. t.d. $P(N < \infty) > 0$. Uvjetno
na $\{N < \infty\}$, $\{X_{N+n} : n \geq 1\}$ je nezavisan niz
od $\mathcal{F}_N$ s jednakom razdiobom kao (X_n) .

~~Pr~~ Dovoljno je (v. Thm A.15 u knjizi) $P(X_1 \in B_j)$

$$P(A, N < \infty, X_{N+j} \in B_j, j=1, \dots, k) = P(A \cap \{N < \infty\}) \prod_{j=1}^k \mu(B_j)$$

$\forall A \in \mathcal{F}_N, B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \forall k$. No za sve n

$$P(A, N=n, X_{N+j} \in B_j, j=1, \dots, k) = P(A \cap \{N=n\}) \prod_{j=1}^k \mu(B_j)$$

jer je $\mathcal{F}_n$ nez. od $X_{n+1}, \dots, X_{n+k}$ / sumirano po $n \Rightarrow$ trivij- □

Na $\Omega = S^{\mathbb{N}}$ definiramo pomak $\psi: \Omega \rightarrow \Omega$

$$\psi(w)(n) = w(n+1) \quad \text{tj.} \quad (w_1, w_2, \dots) \xrightarrow{\psi} (w_2, w_3, w_4, \dots)$$

Slično za zaust. vrijeme N

$$\psi^N w = \begin{cases} \psi^n w & \text{na } N=n \\ \Delta & \text{na } N=+\infty \end{cases}$$

$\Delta :=$ nova dodatna točka u Ω ("cemetery or heaven").

Primjer (vremena porrotka u 0)

$$S = \mathbb{R}^d \quad T(w) = \inf \{n : w_1 + \dots + w_n = 0\}, \quad \inf \emptyset = +\infty$$

↖ vrnj. zaustavlja.

definiamo i $T(\Delta) = +\infty$

(1. vrijeme ulaska u 0)

$$T_2(\omega) = T(\omega) + T(\mathcal{V}^T(\omega)) \quad \Leftarrow \text{dugo vrijeme ulaska u } 0$$

$$T_n(\omega) = T_{n-1}(\omega) + T(\mathcal{V}^{T_{n-1}}(\omega)) \quad \Leftarrow n\text{-to vrijeme u } 0$$

(uočite zbog $\mathcal{V}^\infty \omega = \Delta$, $T(\Delta) = +\infty$, sva su ora vremena dobro definirana)

Općenito, ako je T konačno vrijeme, $T_0 \equiv 0$

$$T_n(\omega) = T_{n-1}(\omega) + T(\mathcal{V}^{T_{n-1}}(\omega)) \quad n \geq 1$$

definiira niz z. vremena i vrijedi:

$$P(T_n < \infty) = (P(T < \infty))^n \quad (1)$$

Neka $W_n = T(\mathcal{V}^{T_{n-1}})$ (međudodajna vremena)

TEOREM 4 Ako je $P(T < \infty) = 1$, tada

sluč. vektori $Y_n = (W_n, X_{T_{n-1}+1}, \dots, X_{T_n})$

su nezav. i jedn. distribuirani.

~~Dok~~ Po tm 3, Y_n i Y_1 imaju istu razdiobu, a

$Y_1, \dots, Y_{n-1} \in \mathcal{F}(T_{n-1})$ & tm 3 $\Rightarrow$ nezavisnost.

Primer (vrstena uspinjanja / ladder variables)

$$\alpha(w) = \inf \{ n : w_1 + \dots + w_n > 0 \}, \quad \inf \emptyset = +\infty$$

$$\alpha(\Delta) := +\infty, \quad \alpha_0 = 0$$

$$\alpha_k(w) = \alpha_{k-1}(w) + \alpha(\tau^{\alpha_{k-1}} w)$$

= k-to vrstena sl. štetja dostiže rekord

Jasno: $P(\alpha < \infty) < 1 \Rightarrow P(\sup S_n < \infty) = 1$

$$P(\alpha < \infty) > 1 \Rightarrow P(\sup S_n = \infty) = 1, \text{ a}$$

4 možnosti: teorema 2, se u

$$\beta = \inf \{ n : w_1 + \dots + w_n < 0 \} \text{ mogo obrediti}$$

peko $P(\alpha < \infty)$ i $P(\beta < \infty)$ (DT).

TEOREM 5 (Waldova nejednakost)

Neka su X_i n.j.d., $E|X_i| < \infty$, ako ji N vrstena zaustavljanja t.d. $EN < \infty \Rightarrow ES_N = EX_1 EN$

Prerp. prvo $X_i \geq 0$, Fubini $\Rightarrow$

$$ES_N = \int S_N dP = \sum_1^{\infty} \int S_N 1_{\{N=n\}} dP = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \int X_m 1_{\{N=n\}} dP$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \geq m} \int X_m 1_{\{N=n\}} dP = \sum_{m=1}^{\infty} \int X_m 1_{\{N \geq m\}} dP$$

$\uparrow \uparrow \in \mathcal{F}_{m-1}$
nezavisni!!

$$= \sum_{m=1}^{\infty} EX_m P(N \geq m) = EX_1 EN$$

Primjer (sim. jed. sl. šetnja) $X_i \stackrel{\text{njed}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Za $a < 0 < b \in \mathbb{Z}$

$$N = \inf \{ n : S_n \notin (a, b) \}$$

$$P(N > (b-a)) \leq 1 - 2^{-(b-a)} < 1$$

(b-a) X-eva
istog znaka
imaju vj. $2^{-(b-a)}$

$$\Downarrow P(N > n(b-a)) \leq (1 - 2^{-(b-a)})^n$$

$\leftarrow$ ni n puta sl. šet.
ne izlazi iz
intervala (a, b)

$\Downarrow$

$$EN < \infty \quad \text{Tm } 5 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(S_N = b) + P(S_N = a) = 1 \\ b P(S_N = b) + a P(S_N = a) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$ES_N = 0 \Rightarrow b P(S_N = b) + a P(S_N = a) = 0$$

$$\Rightarrow P(S_N = b) = \frac{-a}{b-a}, \quad P(S_N = a) = \frac{b}{b-a}$$

Za $T_a = \inf \{ n : S_n = a \}$ vrijedi.

$$P(T_a < T_b) = \frac{b}{b-a} \quad a < 0 < b$$

$$\Rightarrow P(T_a < \infty) \geq P(T_a < T_M) \rightarrow 1 \quad \text{za } M \rightarrow \infty; \quad \forall a < 0$$

Zbog simetrije $\Rightarrow$

$$P(T_x < \infty) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

No $ET_x = +\infty$, a suprotno bi bilo

$$ES_{T_x} = EX_1 \cdot ET_x = 0$$

"
x ↗

TEOREM 6 (druga Waldova nejednakost)

Neka su X_i njd, $EX_n = 0$, $\sigma^2 = EX_n^2 < \infty$,
 ako je T vrijeme zaustavljanja tj. $ET < \infty$
 $\Rightarrow ES_T^2 = \sigma^2 \cdot ET$

Prizor

$$S_{T \wedge n}^2 = S_{T \wedge (n-1)}^2 + (2 \overset{\text{u. s.}}{\downarrow} X_n \overset{\text{u. s.}}{\downarrow} S_{n-1} + \overset{\text{u. s.}}{\downarrow} X_n^2) \mathbb{1}_{(T \geq n)}$$

$$\Rightarrow ES_{T \wedge n}^2 = ES_{T \wedge (n-1)}^2 + 0 + \sigma^2 \cdot P(T \geq n)$$

$\downarrow$
 "slučajno"

$$ES_{T \wedge n}^2 = \sigma^2 \cdot \sum_{m=1}^n P(T \geq m)$$

$$E(S_{T \wedge n} - S_{T \wedge m})^2 = \sigma^2 \cdot \sum_{m+1}^n P(T \geq m) \quad n > m$$

$$\Rightarrow S_{T \wedge n} \text{ je C-m. u } L^2 \Rightarrow S_{T \wedge n} \xrightarrow{L^2} S_T \Rightarrow ES_T^2 = \sigma^2 ET$$

□

Primjer (sum. jed. sl. kretanja)

$N = \inf \{n: S_n \notin (a, b)\}$ vrijedi da $EN < \infty$, $\sigma^2 = 1$

$$\Rightarrow EN \cdot 1 = ES_N^2 = a^2 \frac{b}{b-a} + b^2 \frac{-a}{b-a} = -ab$$

$$\text{za } a = -b = L \Rightarrow EN = L^2$$

LEMA 7 Ako je T vrijeme zaustavljanja

$$ET = +\infty \Rightarrow EX_{T \wedge n}^2 / E(T \wedge n) \rightarrow 0$$

Prizor 02.

TEOREM 8 Ako su X_i njd, $EX_n = 0$, $EX_n^2 = 1$

$$T_c = \inf\{n \geq 1 : |S_n| > c\sqrt{n}\}$$

$$ET_c \begin{cases} < \infty & \text{za } c < 1 \\ = +\infty & \text{za } c \geq 1 \end{cases}$$

Pr. Ako $ET_c < \infty$ tada $\Rightarrow ES_{T_c}^2 = ET_c$ no sad

$$ET_c = ES_{T_c}^2 > E(c^2 T_c) \quad \swarrow \text{ ako } c \geq 1,$$

• Za $\tau = T_c \wedge n$ je $S_{\tau-1}^2 \leq c^2(\tau-1)$, Cauchy-Schwarz $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} E\tau &= ES_{\tau}^2 = ES_{\tau-1}^2 + 2E(S_{\tau-1}X_{\tau}) + EX_{\tau}^2 \leq \\ &\leq c^2 E\tau + 2c(E\tau EX_{\tau}^2)^{1/2} + EX_{\tau}^2 \end{aligned}$$

ako $ET_c = +\infty$ za $c < 1$, dijeljenje sa $E\tau$ dovodi do $\swarrow$ $\square$

POVRATNOST

• X_i n.j.d., $S_n = X_1 + \dots + X_n, n \geq 1$

DEF Stanje (točka) $x \in \mathbb{R}^d$ je povratno za sluč. šetnju S_n ako $\forall \varepsilon > 0$
$$P(\|S_n - x\| < \varepsilon \text{ b.č.}) = 1$$

NAP Durrett koneti $\|x\| = \sup_{i=1, \dots, d} |x_i|$ no zapravo je
crejeds.

Po Hewitt-Savage 0-1 zakonu gornja vjeroj.
može biti samo 0 ili 1.

→

Točka x je dostižna za sluč. šetnju S_n ako
 $\forall \varepsilon > 0 \quad P(\|S_n - x\| < \varepsilon) > 0$ za neki n .

Pokazuje se dovoljno je razumjeti što
se događa s 0

TEOREM 9 Skup povratnih točaka V je ili
prazan ili čini zatvorenu podgrupu od $\mathbb{R}^d$.
U drugom slučaju

$$V = U = \text{skup dostižnih točaka}$$

Ako je $V \neq \emptyset$, V je zatvoren jer je V^c očito otvoren. Pokažimo V je grupa

$$1) \text{ za } x \in U, y \in V \Rightarrow y - x \in V$$

(Po tm 3) kako se u x može doći $\Rightarrow \exists n$

$$\text{t.d. } \forall \varepsilon > 0, \tau = \tau(x - \varepsilon/2, x + \varepsilon/2) \quad P(\tau = n) > 0$$

no tm 3 $\Rightarrow$

$$(X_{\tau+1}, X_{\tau+2}, \dots \mid \tau < \infty) \stackrel{d}{=} (X_1, X_2, \dots)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(S_n \in (y-x-\varepsilon, y-x+\varepsilon) \text{ b.č.}) &= \\ &= P(S_{\tau+n} - S_\tau \in (y-x-\varepsilon, y-x+\varepsilon) \text{ b.č.} \mid \{\tau < \infty\}) = \dots \end{aligned}$$

$$\text{No } P(|S_k - y| < \varepsilon/2 \text{ b.č.}) = 1, \sim$$

$$\begin{aligned} |S_{\tau+n} - S_\tau - (y-x)| &\leq |S_{\tau+n} - y| + |S_\tau - x| \\ &< \varepsilon/2 \text{ b.č. svj. 1} < \varepsilon/2 \\ &\text{ako je } \tau < \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dots &\geq P(\underbrace{|S_{\tau+n} - y| < \varepsilon/2 \text{ b.č.}}_{\text{dogadaj vjeroj. 1}} \cap \underbrace{|S_\tau - x| < \varepsilon/2}_{\text{uvijek vrijedi}} \mid \tau < \infty) \\ &= 1 \end{aligned}$$

V je grupa ako je $V \neq \emptyset$ jer $V \subseteq U$ i

i) $x=y$ u 1) $\Rightarrow 0 \in V$

ii) $x=r, y=0 \Rightarrow -r \in V$

iii) $x=-r, y=q \Rightarrow q+r \in V$

Nadalje: za $u \in U$, $x=u, y=0 \Rightarrow -u \in V$

a V je grupa $\Rightarrow u \in V$

□

Primer (sim. jed. skupa u $\mathbb{Z}^d$)

$$P(X_i = e_j) = P(X_i = -e_j) = 1/2d$$

j-ta komponenta
↓
 $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

TEOREM 10 Za dve sluč. skupa: $T_1 = \inf\{n \geq 1 : S_n = 0\}$
ekvivalentno je

i) $P(T_1 < \infty) = 1$, ii) $P(S_m = 0 \text{ b.c.}) = 1$, iii) $\sum_{m=0}^{\infty} P(S_m = 0) = +\infty$

Definiramo: $T_0 = 0$

$$T_n = \inf\{m > T_{n-1} : S_m = 0\}$$

$$P(T_n < \infty) = P(T_1 < \infty)^n \quad \text{v. (1)}$$

$$\Rightarrow P(T_1 < \infty) = 1 \Rightarrow P(T_n < \infty) = 1 \quad \forall n$$

$$\Rightarrow P(S_m = 0 \text{ b.c.}) = 1$$

tj. i) $\rightarrow$ ii)

Neka

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{(S_n=0)} = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{(T_n < \infty)}$$

Fubini $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} EV &= \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n=0) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T_n < \infty) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(T_1 < \infty)^n = \frac{1}{1 - P(T_1 < \infty)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}$$

No $\text{iii)} \Rightarrow \text{i)}$ jer ako i) ne vrijedi ne vrijedi ni ii) iii) $\square$

DEF Sl. šetnja je prolazna ako $V = \emptyset$, inače je povratna (iz tm 3).

THEOREM 11

Simetrična jedn. slučajna šetnja je povratna za $d \leq 2$, a prolazna za $d \geq 3$.

Pr $\boxed{d=1}$ $P(S_m=0) = 0$ za neparne m
 $= 2^{-2n} \binom{2n}{n} \sim (n\pi)^{-1/2}$ za parne $m=2n$
 (poglavlje 3)

Tm 10 $\Rightarrow$ rezultat.

$$\boxed{d=2}$$

$S_{2n}=0$ ako za neki $m \leq n$

Imamo m koraka $\uparrow$ i $\downarrow$

$n-m$ koraka $\leftarrow$ i $\rightarrow$

$$\rho_2(2n) = P^{z^2}(S_{2n}=0) = \sum_{m=0}^n \frac{2n!}{m!m!(n-m)!(n-m)!} \cdot 4^{-2n}$$

$$= 4^{-2n} \binom{2n}{n} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \binom{n}{n-m} = 4^{-2n} \binom{2n}{n}^2$$

$$= \rho_1(2n)^2 = [P^{z^2}(S_{2n}=0)]^2 \sim (\pi n)^{-1}$$

ko~~to~~ $\sum 1/n = +\infty$, t~~u~~ $\Rightarrow$ t~~u~~rd~~u~~ju.

—

$$\boxed{d=3}$$

Intuitivno y. povratak nakon $2n$ koraka j~~i~~

sada $\sim c \cdot n^{-3/2}$ što j~~i~~ sum~~o~~bilno. No

$$\rho_3(2n) = 6^{-2n} \sum_{j,k} \frac{2n!}{(j!k!(n-j-k)!)^2}$$

$$= 2^{-2n} \binom{2n}{n} \sum_{j,k} \left(3^{-n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} \right)^2$$

$$\leq 2^{-2n} \binom{2n}{n} \max_{j,k} 3^{-n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} = \dots$$

$$\left(\text{jer ako } a_{jk} \geq 0 \quad \sum a_{jk} = 1 \Rightarrow \sum a_{jk}^2 \leq \max a_{jk} \right)$$

Pokažimo:

$$\max_{j,k} 3^{-n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} \leq \frac{C}{n}$$

ako je jedan od: $j, k, (n-j-k) \geq \lfloor n^{1/3} \rfloor \pm 1$

maximum se može povećati, a Stirling $\Rightarrow$

$$\frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} \sim \frac{n^n}{j^j k^k (n-j-k)^{n-j-k}} \sqrt{\frac{n}{j k (n-j-k)}} \cdot \frac{1}{2\pi}$$

uzmemo li j, k oko $\lfloor n^{1/3} \rfloor \pm 1$... d.s. je ograničena

sa $C \cdot 3^n \cdot \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \dots \leq C \cdot (\pi n)^{-1/2} \cdot \frac{1}{n} \text{ što je sniženo}$$

$d > 3$

$$T_n = (S_n^1, S_n^2, S_n^3)$$

$$N(n) = \inf \{ m \geq N(n-1) : T_m \neq T_{N(n-1)} \}$$

$\Rightarrow T_{N(n)}$ je 3-d setnja koja se u 0

vraća b.o. s gustošću 0

$\Rightarrow S_n$ je probna

za općenite slučajne šetnje se pokazuje:

(S_n) je porratna ako

• $d=1$ & $S_n/n \xrightarrow{P} 0$

• $d=2$ & $S_n/\sqrt{n} \xrightarrow{d}$ nedegener. normalna razd.

a prolazna ako

• $d \geq 3$ & (S_n) je istinski 3 (ili više)-dimenzionalna

Naći ćemo i nužon i dovoljan usjet za poratnost

LEMA 12

i) Ako $\sum_1^\infty P(\|S_n\| < \varepsilon) < \infty \Rightarrow P(\|S_n\| < \varepsilon \text{ b.č.}) = 0$

ii) Ako $\sum_1^\infty P(\|S_n\| < \varepsilon) = \infty \Rightarrow P(\|S_n\| < 2\varepsilon \text{ b.č.}) = 1$

pr i) po 1. Borel-Cantelli lemi

ii) Neka $F_\varepsilon = \{ \|S_n\| < \varepsilon \text{ b.č.} \}^c \Rightarrow$

$$\begin{aligned} P(F_\varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(\|S_m\| < \varepsilon, \|S_n\| \geq \varepsilon \quad \forall n \geq m+1) \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} P(\|S_m\| < \varepsilon, \|S_n - S_m\| \geq 2\varepsilon \quad \forall n \geq m+1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{P(\|S_m\| < \varepsilon)}_{\text{"} + \infty} \cdot P(\|S_n\| \geq 2\varepsilon \quad \forall n \geq 1) \end{aligned}$$

$\uparrow$
1

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{"} + \infty}$

$\Rightarrow \{_{2\varepsilon, 1}$

$\Rightarrow \{_{2\varepsilon, 1} = 0$

Kako $\sum P(\|S_n\| < \varepsilon) = +\infty \Rightarrow \{2\varepsilon, 1\} = 0$, slično

za $\{s, k\} = P(\|S_n\| \geq s, \forall n \geq k)$, neka za fiksno k

$$A_m = \{ \|S_m\| < \varepsilon, \|S_n\| \geq \varepsilon \quad \forall n \geq m+k \}$$

$\forall \omega$ j.n. najviše k skupova $A_m, m = 0, 1, \dots \Rightarrow$

$$k \geq \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) \geq \sum_{n=0}^{\infty} P(\|S_n\| < \varepsilon) \{2\varepsilon, k\}, \text{ opet } \Rightarrow$$

$$\underline{\{2\varepsilon, k\} = 0 \quad \forall k}, \text{ no}$$

$$P(F_{2\varepsilon}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(\|S_n\| \geq 2\varepsilon, \forall n \geq k) = 0 \quad \text{"}\{2\varepsilon, k\} \quad \square$$

Norma u idućoj lemi je $\|x\| = \|x\|_{\infty} = \sup |x_i|$

LEMA 13 Za $m \geq 2, m \in \mathbb{N}$

$$\sum P(\|S_n\| < m\varepsilon) \leq (2m)^d \sum_{n=0}^{\infty} P(\|S_n\| < \varepsilon)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(\|S_n\| < m\varepsilon) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_k P(S_n \in k\varepsilon + [0, \varepsilon)^d)$$

$\uparrow$
 $k \in \{-m, \dots, (m-1)\}^d$

$$T_k = \inf \{ l \geq 0 : S_l \in k\varepsilon + [0, \varepsilon)^d \}$$

Fubini $\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(S_n \in k\varepsilon + [0, \varepsilon)^d) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} P(S_n \in k\varepsilon + [0, \varepsilon)^d, T_k = \ell)$$

$$\leq \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=\ell}^{\infty} P(\|S_n - S_{\ell}\| < \varepsilon, T_k = \ell)$$

$\uparrow$ nezavisni $\uparrow$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} P(T_k = m) \sum_{j=0}^{\infty} P(\|S_j\| < \varepsilon) \leq \sum_{j=0}^{\infty} P(\|S_j\| < \varepsilon)$$

Kako je točno $(2m)^d$ koraka $\{-m, \dots, (m-1)\}^d$
 $\Rightarrow$ tvrdnja □

Podsjetimo se: $x \in \mathbb{R}^d$ je povratna za S^d

ako $P(\|S_n - x\| < \varepsilon \text{ b.č.}) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$

Skup je povratna / prolazna ako je skup
 orakvih x neprazan / prazan (on je uvijek
 zatvorena aditivna grupa). Leme 12 & 13 $\Rightarrow$

THEOREM 14 Ako i za jedan $\varepsilon > 0$

$\sum P(\|S_n\| < \varepsilon) < \infty$ odn. $= +\infty$ skup je
prolazna odn. povratna

Za $d=1$, ako $EX_i = \mu \neq 0$ i.z.v.B. $\Rightarrow$

$$S_n/n \xrightarrow{g.s.} \mu \Rightarrow |S_n| \rightarrow \infty \text{ g.s.} \Rightarrow (S_n) \text{ prolazna}$$

TEOREM 15 (Chung-Fuchs)

Za $d=1$, ako

$$S_n/n \xrightarrow{p} 0 \Rightarrow (S_n) \text{ porratna.}$$

Proof $U_n(x) := P(|S_n| < x)$, $x > 0$, Lema 13 $\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(1) \geq \frac{1}{2m} \sum_{n=0}^{\infty} U_n(m) \geq \frac{1}{2m} \sum_{n=0}^{Am} U_n(n/A) \quad \forall A > 0 = \dots$$

jer je U_n rastuća funkcija. Po pretp. $U_n(n/A) \rightarrow 1 \Rightarrow$

$$\dots \geq \frac{4}{2} \cdot \frac{1}{Am} \sum_{n=0}^{\infty} U_n(n/A) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{4}{2} \quad \underline{\text{Césaro}}, \text{ ali } A \text{ je proizvoljan}$$

$m \rightarrow \infty \Rightarrow \text{tvrdnja } \square$

TEOREM 16

Za $d=2$, ako

$$S_n/\sqrt{n} \xrightarrow{d} \text{nedegenerir. norm. razdioba} \Rightarrow (S_n) \text{ porratna.}$$

NAP Tvrdnja je istinita i ako je limit
degeneriran npr 0 ili 1 dimensionalna normalna
razdioba, no onda je i setnja najviše
1-dimensionalna, pa se može primeniti
teorem 15.

plu 16

$$u(n, m) = P(\|S_n\| < m), \text{ Lemma 13 } \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u(n, 1) \geq \frac{1}{4m^2} \sum_{n=0}^{\infty} u(n, m) \quad (1)$$

$$\text{ako } m/\sqrt{n} \rightarrow c \Rightarrow$$

$$u(n, m) \rightarrow \int_{[-c, c]^2} n(x) dx =: \varphi(c) \quad \text{gdj. } \varphi \text{ u gustoća granice norm. distrib.}$$

$$\text{Za } n = \lfloor \vartheta m^2 \rfloor \Rightarrow u(\lfloor \vartheta m^2 \rfloor, m) \rightarrow \varphi(\vartheta^{-1/2}). \text{ Kako}$$

možemo pisati:

$$\frac{1}{m^2} \sum_{n=0}^{\infty} u(n, m) = \int_0^{\infty} u(\lfloor \vartheta m^2 \rfloor, m) d\vartheta$$

postavimo $m \rightarrow \infty$, Fatou $\Rightarrow$

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{4m^2} \sum_{n=0}^{\infty} u(n, m) \geq \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \varphi(\vartheta^{-1/2}) d\vartheta \quad (1)$$

Kako je n neprekidna i pozitivna u 0

$$\varphi(c) = \int_{[-c, c]^2} n(x) dx \sim n(0)(2c)^2 \quad \text{za } c \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \varphi(\vartheta^{-1/2}) \sim 4 n(0)/\vartheta \quad \text{za } \vartheta \rightarrow \infty, \text{ pa integral}$$

u (1) divergira $\Rightarrow$ prava (1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} u(n, 1) = +\infty \Rightarrow \text{povratnost}$$

□

Neka f je

$$\varphi(t) = E e^{itX_1}$$

karakteristična
funkcija
koraka sl. šetnje

THEOREM 17

Za $\delta > 0$, (S_n) je povratna $\Leftrightarrow$

$$\int_{(-\delta, \delta)^d} \operatorname{Re} \frac{1}{1 - \varphi(y)} dy = +\infty$$

THEOREM 18

Za $\delta > 0$, (S_n) je povratna $\Leftrightarrow$

$$\sup_{r < 1} \int_{(-\delta, \delta)^d} \operatorname{Re} \frac{1}{1 - r\varphi(y)} dy = +\infty$$

U knjizi je dokazan samo tm 18, nužnost u tm 17 $\Rightarrow$
onda iz

$$0 \leq \operatorname{Re} \frac{1}{1 - r\varphi(y)} \rightarrow \operatorname{Re} \frac{1}{1 - \varphi(y)} \quad \text{za } r \rightarrow 1$$

drugi smjer je vrlo netrivialan. Tm 18
se pojavljuje u Chung-Fuchs (1959), a tm 17
tako dokazuje 1969. nezavisno Orstein i Stone.

LEMA 19 (Parsevalova relacija)

Za vjeroj. mjere μ & ν na $\mathbb{R}^d$ s karakt. funkcijama ℓ & ψ

$$\int \psi(t) \mu(dt) = \int \ell(x) \nu(dx)$$

Plan $e^{i\langle t, x \rangle}$ je ogr. $\Rightarrow$ Fubini $\Rightarrow$

$$\int \psi(t) \mu(dt) = \iint e^{i\langle t, x \rangle} \nu(dx) \mu(dt) = \int \ell(x) \nu(dx) \quad \checkmark$$

LEMA 20 Za $|x| \leq \pi/3$

$$1 - \cos x \geq x^2/4$$

Plan lema 18

Gustoća $\frac{\delta - |x|}{\delta^2}$, $|x| \in \delta$ ima karakt. f-ju $\frac{2(1 - \cos \delta t)}{(\delta t)^2}$

$$\mu_n(A) = P(S_n \in A), \text{ leme 19 \& 20 } \Rightarrow$$

$$P(\|S_n\| < 1/\delta) \leq 4^d \int \prod \frac{1 - \cos(\delta t_i)}{(\delta t_i)^2} \mu_n(\delta t)$$

$$= 2^d \int_{(-\delta, \delta)^d} \prod \frac{\delta - |x_i|}{\delta^2} \ell^n(x) dx$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n P(\|S_n\| < 1/\delta) = \left(\sum_{r < 1} r^n \right) \leq 2^d \int_{(-\delta, \delta)^d} \prod \frac{\delta - |x_i|}{\delta^2} \frac{1}{1 - r\ell(x)} dx$$

realni integral zbog simetrije točke $(-\delta, \delta)^d$, dakle jednak je svom realnom dijelu

Postimo $r \rightarrow 1$, iz $(\delta - |x|)/\delta \leq 1 \Rightarrow$

$$\sum P(\|S_n\| < 1/\delta) \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^d \sup_{r < 1} \int_{(-\delta, \delta)^d} \operatorname{Re} \frac{1}{1 - r\varphi(x)} dx$$

tm 14 $\Rightarrow$ nužnost.

Kako gustoća

$$\frac{1 - \cos(x/\delta)}{\pi x^2/\delta}$$

ima kar. fcn

$$1 - |t|, \text{ za } |t| \leq 1/\delta$$

$$|_2 \quad 1 \geq \prod_1^d (1 - |\delta x_i|) \quad \text{i lema 13} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} P(\|S_n\| < 1/\delta) &\geq \int_{(-1/\delta, 1/\delta)^d} \prod_1^d (1 - |\delta x_i|) \mu_n(dx) \\ &= \int_1^d \prod_1^d \frac{1 - \cos t_i/\delta}{\pi t_i^2/\delta} \varrho^n(t) dt \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ pomnožimo s r^n i sumiramo $n=0, \dots, \infty \Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n P(\|S_n\| < 1/\delta) \geq \int_{(-1/\delta, 1/\delta)^d} \prod_1^d \frac{1 - \cos(t_i/\delta)}{\pi t_i^2/\delta} \frac{1}{1 - r\varphi(t)} dt$$

realni integral

po lemi 20

$$\geq \left(\frac{1}{4\pi\delta}\right)^d \int_{(-\delta, \delta)^d} \operatorname{Re} \frac{1}{1 - r\varphi(t)} dt$$

tm 14 $\Rightarrow$ dovoljnost

□

Primjer (simetr. stabilno distrib. korak)

a) $d=1$, neka $\ell(t) = e^{-|t|^\alpha}$

Jasno

$$1 - r\ell(t) \rightarrow 1 - e^{-|t|^\alpha} \quad r \nearrow 1$$

$$1 - e^{-|t|^\alpha} \sim |t|^\alpha \quad \text{za } t \rightarrow 0$$

↓

odgovarajuća sluč. šetnja je

prolazna za $\alpha < 1$

ponratna za $\alpha \geq 1$

Ponratnost za $\alpha > 1$ sledi iz tma 15

(C.F. !)

$\alpha = 1$ je nov rezultat za nas.

-

Po tma 2, za $\alpha < 1$

$$-\infty = \liminf S_n < \limsup S_n = \infty$$

ali

$$P(|S_n| < M \text{ b.č.}) = 0 \quad \forall M < \infty$$

(NAP) Shepp (1964) je pokazao da postoji šetnja proizvoljno teškog repa za koju

$$P(|X_1| > x) \rightarrow 0 \quad \text{proizvoljno polako}$$

ali je šetnja ponratna !!

Dakle iz stabilnog primjera ne sledi da sve ovisi o težini repa.

b) $d=2$, $\alpha < 2$ $\ell(t) = \exp(-\|t\|_2^\alpha)$

ova razdioba je inv. na rotacije i obje komponente imaju sim. stabilnu razdiobu

Ponovo

$$1 - r\ell(t) \rightarrow 1 - e^{-\|t\|^\alpha} \quad \text{za } r \rightarrow 1$$

$$1 - e^{-\|t\|^\alpha} \sim \|t\|^\alpha \quad \text{za } t \rightarrow 0$$

promijenom na polarne koordinate iz

$$2\pi \int_0^t dx \cdot x \cdot x^{-\alpha} < \infty \quad \text{za } 1 - \alpha > -1$$

$\Rightarrow$ za $d < 2$ ove sl. setije su prolazne

c) $d \geq 3$

Integrale $\int_0^t dx x^{d-1} x^{-2} < \infty \Rightarrow$ za

$d \geq 3$ sl. setija je povrtna ako kor. tj. pada k 1 brže od t^2 , no ako

$$\ell(r) = 1 + o(r^2) \Rightarrow \ell(r) \equiv 1 \quad \text{EX. 3.3.13 in Dunnett}$$

Stoga ako isključimo sl. setije po ravni niti jedna 3-dim setija nije

povratna.

Sl. šetnja u $\mathbb{R}^3$ je istinski 3-dimenzionalna
 ako $P(\langle X_1, v \rangle \neq 0) > 0 \quad \forall v \neq 0$

THEOREM 2.1

Nijedna istinski 3-dimenzionalna
 šetnja nije porratna.

Johnson 12 tma 18.

(NAP) Analiza je jednostavnija za sl. šetnje
 u $\mathbb{Z}^d$, naime tm. inverzije (pog 3) $\Rightarrow$

$$P(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{(-\pi, \pi)^d} \varphi^n(t) dt$$

množenjem s r^n i sumiranjem $\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n P(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{(-\pi, \pi)^d} \frac{1}{1 - r\varphi(t)} dt$$

Za jed. sl. šet. u $d=3$, $\varphi(t) = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \cos t_j \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{1 - r\varphi(t)} \nearrow \frac{1}{1 - \varphi(t)} \quad \text{za } \varphi(t) > 0$$

$$0 \leq \frac{1}{1 - r\varphi(t)} \leq 1 \quad \text{za } \varphi(t) \leq 0$$

12 tma 0 mon. i dom. konv. $\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left(1 - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \cos x_i\right)^{-1} dx = 1.516386 \dots$$

Kraton 1939
 Glasser & Zucker 1977

$$\Rightarrow \pi_3 = 0.34053 \dots \leftarrow \text{vj. porratka na } 0$$

ZAKONI ARKUS SINUSA

"... combinatorial methods as an antidote to the analytic skulduggery above." K.L. Chung.

SIM. JEDN. SLUČAJNA ŠETNJA

$$L_{2n} = \sup \{ m \leq 2n : S_m = 0 \}$$

vrhove
zadnjih
posjeta u 0

TEOREM 22 Za $0 < a < b < 1$

$$P(a \leq \frac{L_{2n}}{2n} \leq b) \rightarrow \int_a^b \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} dx \quad (*)$$

$$\text{Koriste (*)} = \int_a^b \frac{2}{\pi} (1-y^2)^{-1/2} = \frac{2}{\pi} (\arcsin \sqrt{b} - \arcsin \sqrt{a})$$

Činjenica da $L_{2n}/2n$ ima razdiobu simetričnu oko $1/2$ je neintuitivna

$\Rightarrow$

$$P(\frac{L_{2n}}{2n} \leq 1/2) \rightarrow 1/2$$

VJEROJATNOST • BLIC TEST

1) Koji od sljedećih uvjeta povlači $P(\|S_n\| < \varepsilon \text{ b.č.}) = 0$ za slučaj. setinga (S_n)

a) $P(\|S_n\| > \varepsilon) \rightarrow 0$ b) $\sum P(\|S_n\| < \varepsilon) < \infty$ c) $\sum P(\|S_n\| < 2\varepsilon) = \infty$

2) Za povratak (S_n) u $d=1$, po Chung-Fuchs teoremu dovoljno je

a) $S_n/n \xrightarrow{P} 0$ b) $S_n/n \xrightarrow{\text{b.s.}} 0$ c) $\limsup \frac{E|S_n|}{n} < \infty$

3) (S_n) je povratan akko za $\delta > 0$

a) $\int_{(-\delta, \delta)^d} \operatorname{Re} \frac{1}{1 - \varphi(y)} dy = +\infty$ b) $\int_{[(-\delta, \delta)^d]^c} \operatorname{Re} \frac{1}{1 - \varphi(y)} dy < \infty$ c) $\int_{\mathbb{R}} \operatorname{Re} \frac{1}{1 - r\varphi(y)} dy < \infty$
za neki $r < 1$

-

4) Niz mjera (μ_n) je napet akko $\forall \varepsilon > 0 \exists M \neq d$.

a) $\limsup \mu_n((-M, M)^c) < \varepsilon$ b) $\liminf \mu_n((-M, M)^c) < \varepsilon$ c) $\liminf \mu_n((-M, M)) \geq 1 - \varepsilon$

5) Lindebergov uvjet za CGT je: $\forall \varepsilon > 0$

a) $\lim \sum_1^n E(|X_{n,m}|^2 | |X_{n,m}| > \varepsilon) < \infty$ b) $\lim \sum_1^n E(|X_{n,m}|^2 | |X_{n,m}| > \varepsilon) = 0$
c) $\lim \sum_1^n E(|X_{n,m}|^{2+\delta} | |X_{n,m}| > \varepsilon) = 0$
za neki $\delta > 0$

6) Otkriveni dovoljni uvjet za SZVB je

a) $\lim x P(|X_i| > x) = 0$ b) $E|X_i| < \infty$ c) $\limsup x P(|X_i| > x) < \infty$

TEORIJA OBNAVljanJA

Neka su (ξ_i) njd. sluč. varijable s vrijednostima u $[0, \infty)$, definiramo

$$T_0 = 0$$

$$T_k = T_{k-1} + \xi_k, \quad k \geq 1$$

← $\left. \begin{array}{l} \text{NIZ} \\ \text{OBNAVljanJA} \end{array} \right\}$

DEF Proces obnavljanja je slučajni proces (N_t)

t.d. $N_t = \inf \{ k : T_k > t \}$ ← $\left. \begin{array}{l} \text{BROJ} \\ \text{OBNAVljanJA} \\ \text{DO ČASA } t \end{array} \right\}$

TEOREM 24

Ako $\mu = E\xi_i < +\infty \Rightarrow N_t/t \xrightarrow{\text{g.s.}} 1/\mu$

v. tm 33 pog 2.

TEOREM 25 (ELEMENTARNI TEOREM OBNAVljanJA)

Funkcija $U(t) = EN_t$ zadovoljava

$$U(t)/t \rightarrow 1/\mu$$

← FUNKCIJA OBNAVljanJA

Prva Waldova jednakost $\Rightarrow$

$$t \leq ET_{N_t} = \mu \cdot EN_t \quad \text{za } \mu < \infty \quad (1)$$

ako $EN_t < \infty$, no to je istina čim $P(\xi_i > 0) > 0$ (D.2.)

Za $\mu = +\infty$ (1) vrijedi trivijalno

Nađimo gornju ogradu uz dodatni uvjet $P(\xi_i \leq c) = 1$

Sada ponovo Wald. jedn. $\Rightarrow$

$$\mu EN_t = ET_{N_t} \leq t + c \Rightarrow \text{rezultat za ogr. varijacije}$$

Općenito definiramo $\bar{f}_i = f_i \wedge c$, $\bar{T}_n, \bar{N}_t$ analogno

Jasno

$$EN_t \leq E\bar{N}_t \leq (t+c)/E\bar{f}_i$$

pusimo prvo $t \rightarrow \infty$, a zatim $c \rightarrow \infty \Rightarrow$

$$\limsup EN_t/t \leq 1/\mu$$

□

Korisno je definirati i

$$U(A) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T_n \in A) = E \# \{i : T_i \in A\}$$

← MERA
OBNAVLJANJA

Uočite $U(t) = U([0, t])$

ponašanje mjere / funkcije U bitno ovisi o tome da li je raspodoba koraka $\{f_i\}$ aritmetička ili ne.

$$P\{f_i \in \delta \cdot \mathbb{N}_0\} = 1 \quad \begin{array}{l} \text{za neko } \delta > 0 \\ \leftarrow \text{aritmetička} \\ \text{raspodoba} \end{array}$$

Proces N_t , odn. niz T_n možemo promatrati i uz odgodu tj. pretpostavimo
 $T_0 \sim G$ sluc. varijabla ≥ 0
nezavisna od (f_i)

Učite, za ovaj N_t , $V(t) = EN_t$ zadovoljava

$$V(t) = \int_0^t U(t-s) dG(s) = U * G(t) \quad \text{KONVOLUCIJA}$$

uvjetovanjem na 1. korak T_0 .

Slično računajući bez odgode: $1_{[0, \infty)}(t)$

$$\begin{aligned} U(t) = EN_t &= E \sum_{k=0}^{\infty} 1_{\{T_k \leq t\}} = P(T_0 \leq t) + \sum_{j=1}^{\infty} P(T_j \leq t) \\ &= 1_{[0, \infty)}(t) + \sum_{j=0}^{\infty} P(T_j' + T_1 \leq t) \quad \leftarrow \begin{cases} T_j' = T_{j+1} - T_j \\ T_0' = 0 \end{cases} \\ &= 1_{[0, \infty)}(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t P(T_j' + x \leq t) dF(x) \quad \parallel d(T_j) \\ &= 1_{[0, \infty)}(t) + \int_0^t U(t-x) dF(x) \end{aligned}$$

U konvolucijskim označeno $\Rightarrow$

$$U = 1_{[0, \infty)} + U * F$$

$$I_2 \quad V = U * G \quad (i. G * U = U * G) \Rightarrow$$

$$V = G + V * F$$

$$T_m 25 \Rightarrow U(t) \sim t/\mu, \text{ no } 2a$$

$$G(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t (1 - F(x)) dx$$

$$j. \quad V(t) = t/\mu$$

RAZDIJELA
INTEGRIRANOG
REPA
t_j. ODGODA
STACIONARNOG
PROCESA
OBNAVLJANJA

U slučaju $\{t_i\} \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\mu = 1/\lambda$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} = G(t)$$

tada je proces obnavljanja zapravo Poissonov proces (homogen i s intenzitetom λ).

TEOREM 26 (BLACKWELLOV TM OSNAVLJANJA)

Ako je F neantimetrična tada

$$U([t, t+h]) \rightarrow h/\mu \quad \forall h > 0$$

NAP Nešto slično vrijedi i u antimetričnom slučaju, a dokazuje se preko Markovljevih lanaca.

—

gim. tm 26.

Neka je (T_n) niz obnavljanja s početka, a (T'_n) od njega nezavisan niz obnavljanja. Td. $T'_0 \sim G$, naći ćemo J, K td.

$|T_J - T'_K| < \varepsilon$ i td su nizovi $\{T_{J+i} - T_J\}_i$ i

$\{T'_{K+j} - T'_K\}_j$ nezavisni od $T'_0, T'_1, \dots, T'_K, T_1, \dots, T_J$.

Neka su

$$\eta_i, \eta'_i \stackrel{\text{njol}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ nezavisne od } (T_n), (T'_n)$$

Definiramo

$$V_n = \eta_1 + \dots + \eta_n$$

$$V_n' = 1 + \eta_1' + \dots + \eta_n'$$

te

$$S_n = T_{V_n} \quad \text{i} \quad S_n' = T_{V_n'}$$

uočite $P(S_n - S_n' = 0) \geq 1/4$

$(S_n - S_n')_n$ je slučajna šetnja sa simetrično distribuiranim korakima. Nosac razdiobe koraka uključuje nosac razdiobe od $\mathcal{F}_i$.

$\Rightarrow$ ako je $(S_n - S_n')$ povratna
skup povratnih točaka = $\mathbb{R}$
(čak irreducibilna)

Kako je očekivanje koraka od $S_n - S_n'$ 0

Chung-Fuchs $\Rightarrow$ za $N = \inf \{ n : |S_n - S_n'| < \varepsilon \}$

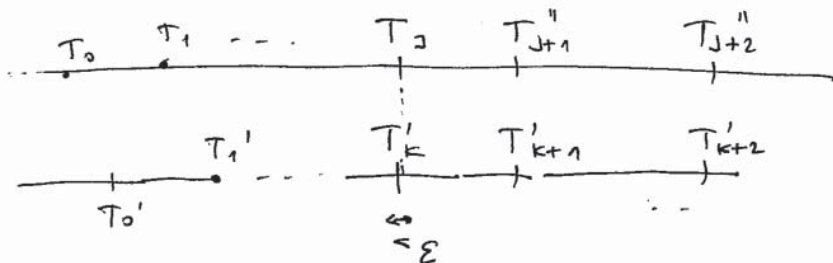
$$P(N < \infty) = 1$$

Neka $J = V_N$, $K = V_N'$ i neka

$$T_n'' = \begin{cases} T_n & J \geq n \\ T_J + T_{K+(n-J)}' - T_K' & J < n \end{cases}$$

uobičajeni koraci
do J

nakon toga
koraci šetnje
 T'



iz konstrukcije je jasno

$$(T_n) \stackrel{d}{=} (T_n'')$$

Neka

$$N'[s, t] = \#\{n: T_n' \in [s, t]\}, N''[s, t] = \#\{n: T_n'' \in [s, t]\}$$

na skupu $\{T_j \leq t\}$ jasno

$$\begin{aligned} N''[t, t+h] &\geq N'[t+\varepsilon, t+h-\varepsilon] \\ &\leq N'[t-\varepsilon, t+h+\varepsilon] \end{aligned}$$

Ako $\varepsilon < h/2$

$$\begin{aligned} U([t, t+h]) &= EN''[t, t+h] \geq E(N'[t+\varepsilon, t+h-\varepsilon]; T_j \leq t) \\ &\geq E(N'[t+\varepsilon, t+h-\varepsilon] \cdot (1 - \mathbb{1}_{T_j > t})) \end{aligned}$$

—

$$\geq \frac{h-2\varepsilon}{\mu} + P(T_j > t) U(h)$$

Jer za N'_+ vrijedi tačno

$$V([t, t+h]) = EN'[t, t+h] = \frac{h}{\mu} \quad (\text{direktno porjeđeno})$$

Za drugi smjer slično

$$\begin{aligned} U([t, t+h]) &\leq E(N'[t-\varepsilon, t+h+\varepsilon]; T_j \leq t) + E(N''[t, t+h]; T_j \geq t) \\ &\leq \frac{h+2\varepsilon}{\mu} + P(T_j > t) U(h) \end{aligned}$$

Kako je $P(T_j > t) \rightarrow 0$, a ε proizvoljan
 $\Rightarrow$ završava. □

Jednadžbe oblika

$$H = h + H * F \quad (1)$$

gdje je F poznata (čak i ne prava) razlioba, a h poznata funkcija zovemo jednadžbama obnavljanja.

Već smo vidjeli 2 primjera

$$h \equiv 1 : U = 1 [0, \infty) + U * F$$

$$h(t) = G(t) : V = G + V * F$$

teorija obnavljanja se bavi proučavanjem upravo ovakvih jednadžbi

Naivnim iteriranjem (1) naslućujemo rješenje

$$\begin{aligned} H &= h + (h + H * F) * F = h + h * F + h * F^{2*} + H * F^{3*} \\ &= \dots = h * (1 + F + F^{2*} + F^{3*} + F^{4*} + \dots) \\ &= U \quad \text{po definiciji} \end{aligned}$$

TEOREM 27

Ako je h ograničena tada postoji

$$H(t) = \int_0^t h(t-s) dU(s)$$

predstavljajući jedinstveno rješenje od (1) ograničeno na ograničenim intervalima.

27

$$U_n(A) = \sum_{m=0}^n P(T_m \in A)$$

$$H_n(t) = \int_0^t h(t-s) dU_n(s) = \sum_{m=0}^n (h * F^{m*})(t)$$

gdje je F^{m*} razdioba od T_m , a $h(r)=0, r<0$
po definiciji $\dagger$ dogorom. Jasno

$$H_{n+1} = h + H_n * F \quad (*)$$

Kako $U(t) < \infty \Rightarrow U(t) - U_n(t) \rightarrow 0$,
a h je ograničena

$$|H_n(t) - H(t)| \leq \|h\|_{\infty} |U(t) - U_n(t)|$$

$\Rightarrow H_n(t) \rightarrow H(t)$ uniformno na ogranič. intervalima

—

$$\begin{aligned} |H_n * F(t) - H * F(t)| &\leq \sup_{s \leq t} |H_n(s) - H(s)| \\ &\leq \|h\|_{\infty} |U(t) - U_n(t)| \end{aligned}$$

Kako je $U - U_n = \sum_{n+1}^{\infty} F^{m*}$ rastuća po t .

Pustimo li $u \rightarrow \infty$ u $(*) \Rightarrow H$ rješava
jednadžbu i ograničena je na ograničenim
intervalima.

Pretp. H_1 & H_2 su rješenja tada $K = H_1 - H_2$
zadovoljava $K = K * F$, kako je K ogr. na ogr.
intervalima $K = K * F^{n*} \rightarrow 0 \Rightarrow H_1 = H_2$.

Prema Blockwellonom tm

$$U(t-h, t] \rightarrow \frac{h}{\mu} \quad \text{za } t \rightarrow \infty \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{no} \quad G'(t) - G'(t-h) &= \int_{t-h}^t dG'(y) \\ &= \int_0^t I_{(0, h]}(t-y) dG'(y) \\ &= G' * I_{(0, h]}(t) \quad \neq G' \text{ convolucija} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$(2) \rightarrow U * I_{(0, h]}(t) \rightarrow \frac{h}{\mu} \quad t \rightarrow \infty$$

$$\text{ako je } z = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{I}_{A_i} \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad A_i = (a_i, b_i] \text{ disjunktne}$$

=

$$\Rightarrow U * z(t) \rightarrow \frac{\int_0^t z(s) ds}{\mu}$$

No ako je z bilo kakva funkcija koja se moze jako dobro aproksimirati step funkcijama vrijedit ce isto

DEF Funkcija $z: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je direktno Riemann integrabilna ako za

$$I_k = [(k-1)h, kh) \quad h > 0, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$m_k(h) = \inf_{I_k} z, \quad M_k(h) = \sup_{I_k} z$$

$$s(h) = \sum_{k=1}^{\infty} h m_k, \quad S(h) = \sum_{k=1}^{\infty} h M_k \quad \text{vrijedi}$$

$$S(h) - s(h) \rightarrow 0 \quad \text{za } h \rightarrow \infty$$

TEOREM 28

Ako je F neontmetična i $\mu = ET_1 < \infty$

1) $G(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t (1-F(x)) dx$, tada vrijedi

sljedeće ekvivalentne tvrdnje

1) Blackwellov teorim doniranja

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t, t+h) \rightarrow \frac{h}{\mu} \quad \forall h > 0$$

2) Kijunovi teorim doniranja (W. Smith)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t, z(t)) = \frac{\int_0^\infty z(s) ds}{\mu}$$

za sve od R_1 funkcije z .

3) Za $A(t) = t - T_{N(t)-1}$ vrijedi donar. unatrag

$$A \xrightarrow{d} G, \quad t \rightarrow \infty$$

4) Za $B(t) = T_{N(t)} - t$ vrijedi donar. naprijed

$$B \xrightarrow{d} G, \quad t \rightarrow \infty$$

V MARTINGALI

- elegantno i višestruko korisno poopćenje pojma sluč. šetnje s korakom čije je očekivanje 0
- dvje osnovne činjenice
 - očekivanje martingala ostaje uvijek isto tj. kladeći se na njih ne možemo zaraditi
 - submartingali kao stohast. analog rastućih nizova uvijek konvergiraju g.s. ako su ograničeni odorgo tj. $\sup E X_n^+ < \infty$

UVJETNO OČEKIVANJE

- DEF
- $(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$ vj. prostor, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_0$ σ -algebra
- Za $\mathcal{F}_0$ -mjerivu sl. var X t.d. $E|X| < \infty$
- uvjetno očekivanje od X u odn. na $\mathcal{F}$ ($E(X|\mathcal{F})$)
- je proizvoljna sluč. varijabla Y t.d.

i) Y je $\mathcal{F}$ mjeriva

ii) $\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P} \quad \forall A \in \mathcal{F}$

tj. $E[I_A X] = E[I_A Y]$

Jasno, takvih Y može biti više no mi ipak kažemo da je urj. očekivanja g.s. jedinstveno.

LEMA 1 iz i) & ii) $\Rightarrow Y$ je integrabilna

Kako $A = \{Y > 0\} \in \mathcal{F}$ po i) $\Rightarrow$

$$\int_A Y dP = \int_A X dP \leq \int_A |X| dP \quad \text{iz ii)}$$

$$\int_{A^c} -Y dP = \int_{A^c} -X dP \leq \int_{A^c} |X| dP$$

$$\Rightarrow E|Y| \leq E|X| \quad \square$$

JEDINSTVENOST

Ako su Y, Y' druge verzije urj. očekivanja $E(X|\mathcal{F})$ tada $\int_A Y dP = \int_A Y' dP \quad \forall A \in \mathcal{F}$

$$\text{za } A = \{Y - Y' \geq \varepsilon > 0\} \Rightarrow$$

$$P(A) \cdot \varepsilon \leq \int_A (Y - Y') dP = \int_A (X - X) dP = 0$$

$$\Rightarrow P(A) = 0 \quad \forall \varepsilon \Rightarrow Y \leq Y' \text{ g.s.}$$

$$\text{pa i obratno} \Rightarrow Y = Y' \text{ g.s.} \quad \square$$

EGZISTENCIJA

Radon-Nikodym : μ, ν σ -konačne mjere na $(\Omega, \mathcal{F})$
 $\nu \ll \mu \Rightarrow \exists f \in \mathcal{F} \quad +d.$

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \quad \forall A \in \mathcal{F}; \text{ pišemo } f = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

Ako $X \geq 0$, neka $\mu = P$

$$\nu(A) = \int_A X \, dP, \quad A \in \mathcal{F} \quad \text{zadovoljava } \nu \ll \mu$$

$$\Rightarrow \exists \, d\nu/d\mu \in \mathcal{F} \quad +d. \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

$$\int_A X \, dP = \nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu} \, dP \quad \text{tj. } \frac{d\nu}{d\mu} = E(X|\mathcal{F})$$

općenito : $X = X^+ - X^-$, ...

Primjer ($X \in \mathcal{F}$)

Po def: X zadovoljava i) & ii) tj. $E(X|\mathcal{F}) = X$

$\mathcal{F}$ - modelira informacije koje su nam dostupne, a $E(X|\mathcal{F})$ je najb. što možemo reći o X u odn. na $\mathcal{F}$, posebno ako znamo X naš "best guess" mora biti X . (intuitivno!)

Za X td. $EX^2 < \infty$ vidjet ćemo $E(X|\mathcal{F})$ je zapravo projekcija od X na $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, tj. zaista "best guess" u nekom smislu.

Primer (X nezavisna od $\mathcal{F}$)

Ne znamo ništa o X , dakle, "best guess"
mora biti EX tj. broj. (intuitivno!)

Jasno EX zadovoljava i), broj je $\mathcal{F}$ -invariant.
a zbog nezavisnosti: $X \cdot 1_A$ su nezavisne
sluč. varij. za $\forall A \in \mathcal{F}$

$$\Rightarrow \int_A X dP = E[X 1_A] = EX \cdot 1_A = \int_A EX dP \Rightarrow \text{ii)}$$

NAP) U oba primera $E(X|\mathcal{F})$ smo pogodili
i zatim potvrdili.

Primer (prebrojiva particija)

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A_i \text{ disjunktne}, \quad \mathcal{F} = \sigma(A_1, A_2, \dots)$$

tada

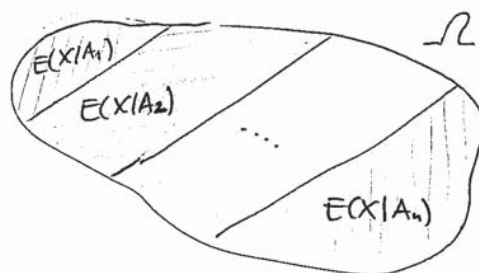
$$E(X|\mathcal{F})_{(w)} = E(X|A_i) = \frac{E(X \cdot 1_{A_i})}{P(A_i)} \text{ za } w \in A_i$$

(provjeri i) & ii) Dž.)

Posebno

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$$

$$E(X|\mathcal{F}) = E(X|\Omega) = EX$$



Primer (neprekidna sl. vektor)

• (X, Y) imaju zajed. gustocu f tj.

$$P((X, Y) \in B) = \int_B f(x, y) dx dy \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

neka $\int f(x, y) dx > 0 \quad \forall y$ zbog jedinstvenosti,

ako $E|g(X)| < \infty$ tada

$$E(g(X) | Y) = h(Y) \quad \text{gdje je}$$

$$h(y) = \frac{\int g(x) f(x, y) dx}{\int f(x, y) dx}$$

i) je isto

ii) za $A \in \sigma(Y) \exists B$ td. $A = \{\omega : Y(\omega) \in B\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$E(h(Y) 1_A) = \int_B \int h(y) f(x, y) dx dy =$$

$$= \int_B \int g(x) f(x, y) dx dy$$

$$= E(g(X) 1_B(Y)) = E(g(X) \cdot 1_A)$$

Ako su X, Y nezavisne, a φ t.d. $E|\varphi(X, Y)| < \infty$

te $g(x) := E(\varphi(x, Y)) \Rightarrow$

$$\underline{E(\varphi(X, Y) | X) = g(X)}$$

~~je~~ jasno $g(X) \in \mathcal{T}(X) \Rightarrow$ vrijedi: i)

ii) $A \in \mathcal{T}(X) \Rightarrow \exists C \in \mathcal{H}. \quad A = \{X \in C\} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int_A \varphi(X, Y) dP &= E[\varphi(X, Y) 1_C(X)] = \\ &= \iint \varphi(x, y) 1_C(x) \nu(dy) \mu(dx) \\ &= \int 1_C(x) g(x) \mu(dx) = \int_A g(X) dP \end{aligned}$$

□

SVOJSTVA UVJ. OČEK.

THEOREM 2

a) $E(aX + bY | \mathcal{F}) = aE(X | \mathcal{F}) + bE(Y | \mathcal{F})$ Linearnost

b) $X \leq Y \Rightarrow E(X | \mathcal{F}) \leq E(Y | \mathcal{F})$

c) $X_n \geq 0, X_n \uparrow X, EX < \infty \Rightarrow$
 $\underline{E(X_n | \mathcal{F}) \uparrow E(X | \mathcal{F})}$

Vrijedi i nejednakosti:

$$\underline{P(|X| > a | \mathcal{F}) \leq \frac{E(X^2 | \mathcal{F})}{a^2}}$$

$\forall a > 0$

ČEBIŠEV

$\forall \varphi$ konveksne, t.d. $E|X|, E|\varphi(X)| < \infty$

$$\underline{\varphi(E(X | \mathcal{F})) \leq E(\varphi(X) | \mathcal{F})}$$

JENSEN

CAUCHY - SCHWARZ Σ

$$\underline{E(XY|G)^2 \leq E(X^2|G) E(Y^2|G)}$$

THEOREM 3

Ujetno oćekivanje je kontrakcija u L^p , $p \geq 1$

$\nearrow$ Jensen nej. $\Rightarrow |E(X|\mathcal{F})|^p \leq E(|X|^p|\mathcal{F})$

uzimajući oćek $\Rightarrow$

$$E(E(X|\mathcal{F}))^p \stackrel{*}{\leq} E(E(|X|^p|\mathcal{F})) = E|X|^p \quad \square$$

* xngjedi jir po ii) iz def. urj oćek.

za $A = \Omega \Rightarrow$

$$E(E(Y|\mathcal{F})) = E(Y) \quad \forall Y, \forall \mathcal{F}.$$

-

THEOREM 5

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}, E(X|\mathcal{G}) \in \mathcal{F} \Rightarrow E(X|\mathcal{F}) = E(X|\mathcal{G})$$

$\nearrow$ Josno $E(X|\mathcal{G}) \in \mathcal{F} \Rightarrow$ i) po prop.

ii) za $A \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$

$$\int_A X dP = \int_A E(X|\mathcal{G}) dP$$

THEOREM 6

$$\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \Rightarrow$$

$$i) E(E(X|\mathcal{F}_1)|\mathcal{F}_2) = E(X|\mathcal{F}_1)$$

$$ii) E(E(X|\mathcal{F}_2)|\mathcal{F}_1) = E(X|\mathcal{F}_1)$$

$\nwarrow \nearrow$ "smaller σ -field always wins"

zad) Na $\Omega = \{a, b, c\}$ nađite $X, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ t.d.

$$E(E(X|\mathcal{F}_1)|\mathcal{F}_2) \neq E(E(X|\mathcal{F}_2)|\mathcal{F}_1)$$

TEOREM 7

Ako $X \in \mathcal{F}$, $E|Y|, E|XY| < \infty \Rightarrow$

$$E(XY|\mathcal{F}) = XE(Y|\mathcal{F})$$

~~Dokaz~~ d.s. $\in \mathcal{F} \Rightarrow$ i) ostaje vidjeti ii) u 4 koraka.

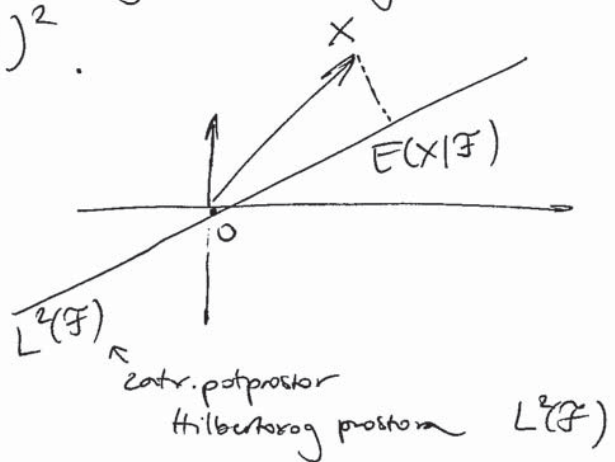
1) $X = 1_B$ $B \in \mathcal{F}$ za $A \in \mathcal{F}$

$$\int_A 1_B E(Y|\mathcal{F}) dP = \int_{A \cap B} E(Y|\mathcal{F}) dP = \int_{A \cap B} Y dP = \int_A 1_B Y dP$$

2) jednostavne X , 3) neneg. X , 4) $\forall X, \dots$ □

TEOREM 8

Ako $EX^2 < \infty$, $E(X|\mathcal{F})$ je $\mathcal{F}$ izmjeriva sl. var. Y koja minimizira $E(X-Y)^2$.



~~Dokaz~~ $Z \in L^2(\mathcal{F}) \Rightarrow E|XZ| < \infty$ (c.s.)

tim $\Rightarrow$

$$ZE(X|\mathcal{F}) = E(ZX|\mathcal{F}) \quad \text{f.e.}$$

$$\Rightarrow E(Z(X - E(X|\mathcal{F}))) = 0 \Rightarrow$$

$$X - E(X|\mathcal{F}) \perp L^2(\mathcal{F})$$

Ako $y \in L^2(\mathcal{F})$, $z = E(X|\mathcal{F}) - y \Rightarrow$

$$E(X-y)^2 = E[X - E(X|\mathcal{F}) + z]^2 = E[X - E(X|\mathcal{F})]^2 + E z^2$$

↑
minimalno za $z = 0$

□

Ako $EX^2 < \infty$, za $\text{Var}(X|\mathcal{F}) = E(X^2|\mathcal{F}) - E(X|\mathcal{F})^2$

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = E(\text{Var}(X|\mathcal{F})) + \text{Var}(E(X|\mathcal{F}))$$

REGULARNE UKJETNE VJEROJATNOSTI

• $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$; $X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (S, \mathcal{S})$ $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ -algebra

$\mu: \Omega \times \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$ je regularna uvjetna razdioba od X
za danu $\mathcal{G}$ ako

i) $\forall A$, $\omega \mapsto \mu(\omega, A)$ je verzija od $P(X \in A | \mathcal{G})$

ii) za g.s. ω $A \mapsto \mu(\omega, A)$ je vj. mjera na $(S, \mathcal{S})$

Npr. za (X, Y) s gustoćom $f > 0$

$$i. \mu(y, A) = \frac{\int_A f(x, y) dx}{\int f(x, y) dx} \Rightarrow \mu(y(\omega), A) \text{ je r.u.r. od } X \text{ uz } f(y)$$

Nalazost reg. urj. razdiobe ne postaje uvijek.

Ako $S = \mathcal{L}$, $X = id$; μ se naziva regularna urjetna vjerovatnost.

Ipak, ako je $(S, \mathcal{S})$ zgodan: [(v. pog II) $\nexists$ bijekcija $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ td. f^{-1} razmjerna, npr.

ako S razmjerni podskup $\left[\begin{array}{l} - \text{potpunog} \\ - \text{separabilnog} \\ - \text{metričkog prostora} \end{array} \right. \& \mathcal{S} = \mathcal{B}(S) \Rightarrow (S, \mathcal{S}) \text{ zgodan}$

r.u.r. uvijek postoje.

MARTINGALI, KONVERGENCIJA G. S.

• $(\mathcal{F}_n)$ = filtracija (rastući niz σ -algebri)

• (X_n) je adaptiran na $(\mathcal{F}_n)$ ako $X_n \in \mathcal{F}_n \quad \forall n$.

DEF Niz sl. var (X_n) td.

i) $E|X_n| < \infty$

ii) X_n adaptiran na $\mathcal{F}_n$

iii) $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n \quad \forall n$

naziva se martingal, ako umjesto = piše

$\leq$ supermartingal

$\geq$ submartingal

(uodn. na $(\mathcal{F}_n)$).

Primer (sim. jedn. sluč. šetnja)

$$J_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad X_n = J_1 + \dots + J_n, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(J_1, \dots, J_n)$$

$\Rightarrow (X_n)$ je $(\mathcal{F}_n)$ -martingal

Ovdje $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ uočimo

★ filtracija koju konstruimo ako
 $\mathcal{F}_n$ nije eksplicitno navedena.

THEOREM 9

Ako je (X_n) supermartingal

$$E(X_n | \mathcal{F}_m) \leq X_m \quad \forall n > m.$$

Dokaz po def. za $n = m+1$ je istina, nastavimo indukcijom, naime za $k \geq 2$

$$\begin{aligned} E(X_{m+k} | \mathcal{F}_m) &= E(E(X_{m+k} | \mathcal{F}_{m+k-1}) | \mathcal{F}_m) \\ &\leq E(X_{m+k-1} | \mathcal{F}_m) \leq \dots \end{aligned}$$

TEOREM 10

i) Ako je (X_n) submartingal
 $\Rightarrow E(X_n | \mathcal{F}_m) \geq X_m \quad \forall n > m$

ii) Ako je (X_n) martingal
 $\Rightarrow E(X_n | \mathcal{F}_m) = X_m \quad \forall n > m.$

TEOREM 11

Ako je (X_n) martingal i ℓ konveksna
& $E|\ell(X_n)| < \infty \quad \forall n \Rightarrow (\ell(X_n))$ je submartingal

Posebno ako $E|X_n|^p < \infty \quad \forall n$ i neki $p > 1$
 $\Rightarrow |X_n|^p$ je submartingal.

-

TEOREM 12

Ako je (X_n) submartingal; ℓ rastuća i
konveksna & $E|\ell(X_n)| < \infty \quad \forall n \Rightarrow$

$(\ell(X_n))$ je submartingal

$\Downarrow$

• (X_n) submartingal $\Rightarrow (X_n - a)^+$ je submartingal

• (X_n) supermartingal $\Rightarrow X_n \wedge a$ je supermartingal

DEF Niz $(H_n)_{n \geq 1}$ je predvidiv u odnosu na filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ ako $H_n \in \mathcal{F}_{n-1} \quad \forall n$.

==

Ideja: predvidivim nizom možemo opisati strategiju kockanja t.d. ulog u n -tu igru H_n onisi o rezultatima igara $1, \dots, n-1$

Ako je dobitak nakon n igara za strategiju koja uvijek ulazi 1

$$X_n = \sum_{k=1}^n (X_k - X_{k-1}) \quad \text{jer } X_0 = 0$$

za općenitu strategiju dobitak zapisujemo kao

$$\boxed{(H \cdot X)_n = \sum_{m=1}^n H_m (X_m - X_{m-1})}$$

Ako je (X_n) martingal uobičajeno je

niz $((H \cdot X)_n)$ zvat martingalna transformacija

TEOREM 13

Ako je $(X_n)_{n \geq 0}$ supermartingal, i $H_n \geq 0$ predvidiv i ograničen niz, tada je $(H \cdot X)_n$ supermartingal.

jer $(H \cdot X)_n \in \mathcal{F}_n$; jer je naj očig. linearno a H_n predvidiv $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} E((H \cdot X)_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= (H \cdot X)_n + E(H_{n+1} (X_{n+1} - X_n) | \mathcal{F}_n) \\ &= (H \cdot X)_n + \underbrace{H_{n+1}}_{\geq 0} \underbrace{E(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n)}_{\leq 0} \leq (H \cdot X)_n \quad \square \end{aligned}$$

Jednostavan primjer je

$$\zeta_m = X_m - X_{m-1} \stackrel{\text{njd}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Kada se igra sastoji u bacanju fair novčića, ili općenitog novčića.

"Martingalom" se naziva i strategija kockanja

$$H_1 = 1, \text{ \& } H_n = \begin{cases} 2H_{n-1} & \text{ako } \zeta_{n-1} = -1 \\ 1 & \text{ako } \zeta_{n-1} = 1 \end{cases}$$

↓

"siguran dobitak" ako $P(\zeta_m = 1) > 0$

NAP Zaključak teorema 13 vrijedi i za submartingale, pa naravno i za martingale. U potonjem slučaju ne trebamo pretpostaviti $H_n \geq 0$.

Strategije kockanja su usko povezane sa vremenima zaustavljanja,

npr. $N = \text{rny. zaustavljanja}$

$$H_n = 1_{\{N \geq n\}}$$

no $\{N \geq n\} = \{N \leq n-1\}^c \in \mathcal{F}_{n-1} \Rightarrow H_n$ predvidiv

Th 13 $\Rightarrow$ $(H \cdot X)_n = X_{N \wedge n} - X_0$

je supermartingal, no X_0 kao konstanta

je supermartingal $\Rightarrow$

$X_{N \wedge n}$ je supermartingal kao
suma 2 supermartingala

TEOREM 14

Ako je N rny. zaustavljanja, a (X_n) supermartingal $\Rightarrow (X_{N \wedge n})$ je supermartingal

Strategiji kockanja ne mogu donijeti zaradu, no pomoću njih možemo dokazivati teoreme. Neka je:

- $(X_n)_{n \geq 0}$ submartingal
- $a < b$, $N_0 = -1$
- $N_{2k-1} = \inf \{ m > N_{2k-2} : X_m \leq a \}$
 $N_{2k} = \inf \{ m > N_{2k-1} : X_m \geq b \}$

↖ vremena prelaska
nivoa a i b

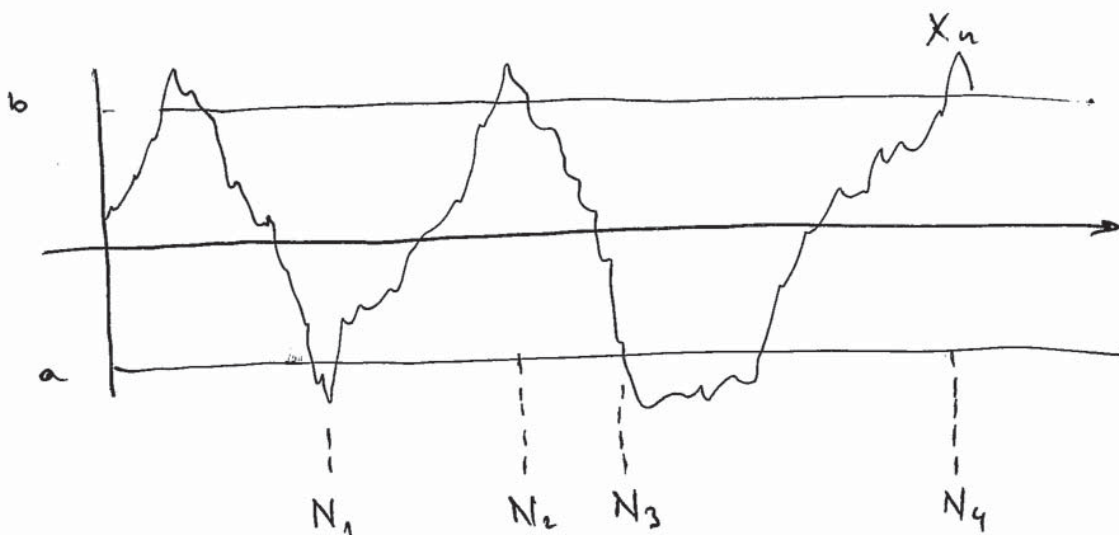
⇒ N_j su vremena zaustavljanja

$$\{ N_{2k-1} < m \leq N_{2k} \} = \{ N_{2k-1} \leq m-1 \} \cap \{ N_{2k} \leq m-1 \}^c \in \mathcal{F}_{m-1}$$

↓

$$H_m = \begin{cases} 1 & N_{2k-1} < m \leq N_{2k} \text{ za neki } k \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

↗ strategija "kupuj kad padneš ispod a
i prodaj kad izadješ
iznad b "



$$U_n = \sup \{ k : N_{2k} \leq n \} = \# \text{ prelazaka preko } [a, b] \text{ u prvih } n \text{ igara}$$

↑
of upcrossings

THEOREM 15 ("upcrossing inequality")

Ako je $(X_n)_{n \geq 0}$ submartingal $\Rightarrow$

$$(b-a)EU_n \leq E(X_n - a)^+ - E(X_0 - a)^+$$

J. L. Nacrtaj niz $Y_n = a + (X_n - a)^+$, po tm 12 on je submartingal.

Očito prelazi prugu $[a, b]$ jednak broj puta kao (X_n) , te

$$(b-a) \cdot U_n \leq (H \cdot Y)_n$$

↑
profit od svakog prelaska je bar $(b-a)$

Ako stavimo $K_n = 1 - H_n \Rightarrow$

$$(H \cdot Y)_n + (K \cdot Y)_n = Y_n - Y_0$$

↑
naime sad zbrajamo sve
razlike $Y_k - Y_{k-1}$

No tm 13 $\Rightarrow$

$$E(K \cdot Y)_n \geq E(K \cdot Y)_0 = 0$$

$(K \cdot Y)_n$ je
submart.

$$\Rightarrow E(H \cdot Y)_n \leq E(Y_n - Y_0)$$

□

TEOREM 16 (o konvergenciji martingala)

Ako je (X_n) submartingal t.d. $\sup_n EX_n^+ < \infty$

$\Rightarrow X_n$ ima limes g.s. za $n \rightarrow \infty$ tj. $\exists X^+$!

$$X_n \xrightarrow{\text{g.s.}} X, \text{ te } E|X| < \infty.$$

$\Rightarrow |X| < \infty$ g.s. !!!

~~Jasno~~ Jasno $(X-a)^+ \leq X^+ + |a| \Rightarrow$ tm 17

$$EU_n \leq \frac{|a| + EX_n^+}{b-a}$$

za $n \nearrow \infty$, $U_n \nearrow$ raste, prema U rećemo

$\Rightarrow EU_n \nearrow EU$ no $\sup EX_n^+ < \infty \Rightarrow EU_n$ ograničen

$$\rightarrow EU < \infty$$

$\Rightarrow$ broj prelazaka proizvoljne pruge je
finitan $\Rightarrow$

$$P\left(\bigcup_{a,b \in \mathbb{Q}} \{ \liminf X_n < a < b < \limsup X_n \} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \liminf X_n = \limsup X_n \quad \text{g.s.}$$

tj. postoji $X = \lim X_n$ g.s.

Fatouova lema $\Rightarrow$

$$EX^+ \leq \liminf EX_n^+ < \infty$$

$$\text{Kako } EX_n^- = EX_n^+ - EX_n \leq EX_n^+ - EX_0$$

(X_n je submartingal)

Fatouova lema $\Rightarrow$

$$EX^- \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} EX_n^- \leq \sup EX_n^+ - EX_0 < \infty \quad \square$$

TEOREM 17

Ako je $X_n \geq 0$ supermartingal tada za
 $n \rightarrow \infty \quad X_n \rightarrow X$ g.s. & $EX \leq EX_0$.

Dokaz $Y_n = -X_n$ je submartingal & $EY_n^+ = 0 \xrightarrow{\text{tm 16}} \text{konv.}$

kako $EX_0 \geq EX_n$ nejednakost sledi po

Fatouovoj lemi

$\square$

Primer

$$\xi_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad S_0 = 1, \quad S_n = S_{n-1} + \xi_n,$$

$$X_n = S_n n \quad \text{gdje}$$

$$N = \inf \{n : S_n = 0\}$$

tm 14 $\Rightarrow (X_n)$ je neneg. martingal, tm 17

$$\Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{g.s.}} X_\infty, \quad X_\infty < \infty \text{ g.s.}$$

no $X_\infty \equiv 0$ jer je konvergencija k striktno pozitivnom broju isključena

$$\Rightarrow EX_n = EX_0 = 1 \quad \forall n$$

$$\text{a} \quad X_\infty = 0 \Rightarrow \text{konvergencija nije u } L^1$$

TEOREM 18 (Doobova dekompozicija)

Ako je $(X_n)_{n \geq 0}$ submartingal, možemo ga na jedinstven način zapisati kao

$$X_n = M_n + A_n$$

gdje je: $\uparrow$ martingal $\nwarrow$ rastući predvidiv niz
t.d. $A_0 = 0$

Dokaz

$$\text{iz } X_n = M_n + A_n \text{ \& } E(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1}, A_n \in \mathcal{F}_{n-1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= E(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) + E(A_n | \mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1} + A_n \\ &= X_{n-1} - A_{n-1} + A_n \end{aligned} \quad *$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a) \quad A_n - A_{n-1} &= E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1} \quad \leftarrow \text{nužno} \\ b) \quad M_n &= X_n - A_n \quad \leftarrow \end{aligned}$$

Kako $A_0 = 0, \Rightarrow M_0 = X_0 \Rightarrow$ jedinstvenost $\checkmark$

Pokažimo:

- $A_n - A_{n-1} \geq 0$ no to $\Rightarrow$ iz a) jer je (X_n) submart. $\checkmark$
- A_n predvidiv indukcijom iz a) $\checkmark$
- M_n je martingal jer iz a) & b) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} E(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= E(X_n - A_n | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) - A_n = M_{n-1} \quad \text{v. } \star \end{aligned}$$

$\square$

THEOREM 19

Ako je $(X_n)_{n \geq 1}$ martingal i $|X_{n+1} - X_n| \leq M < \infty$

$$C = \{ \lim X_n \text{ } \exists \text{ i konačan je} \}$$

$$D = \{ \limsup X_n = +\infty \text{ \& } \liminf X_n = -\infty \}$$

$$\Rightarrow P(C \cup D) = 1$$

POLYINA URNA

Neka stara odn. urna sadrži:

r crvenih kuglica

g zelenih kuglica

X_n = udio zelenih kuglica nakon n -tog izvlačenja, pri tom

Svako izvlačenje slučajne kuglice završi tako da je vratimo i dodamo još c kuglica iste boje

$$\Rightarrow X_{n+1} = \begin{cases} \frac{j+c}{i+j+c} & \text{s vj. } j/i+j \\ \frac{j}{i+j+c} & \text{s vj. } i/i+j \end{cases}$$

ako je trenutno i crvenih & j zelenih, kako je očekivanje od X_{n+1} u tom slučaju

$$\frac{j+c}{i+j+c} \cdot \frac{j}{i+j} + \frac{j}{i+j+c} \cdot \frac{i}{i+j} = \dots = \frac{j}{i+j}$$

$\Rightarrow X_n$ je martingal, kako $X_n \geq 0$

$$\text{tm 17} \Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{g.s.}} X_\infty$$

Nastimo razdiobu od X_∞ .

Vj da čemo prvo izvući m zelenih zatim ℓ crvenih u $n = m + \ell$ izvlačenju ji

$$\frac{g}{g+r} \cdot \frac{g+c}{g+r+c} \cdots \frac{g+(m-1)c}{g+r+(m-1)c} \cdot \frac{r}{g+r+mc} \cdots \frac{r+(\ell-1)c}{g+r+(n-1)c}$$

↑ bilo koja druga serija izvlačenja dužine n od m zelenih i ℓ crvenih ima istu vjeroj.
(nazivnici ostaju isti a brojnici se permutiraju)

Specijalno za $r = g = c = 1$ i

$G_n = \#$ zelenih nakon n izvlačenja $\Rightarrow$

$$P(G_n = m+1) = \binom{n}{m} \frac{m! (n-m)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

$m = 0, 1, \dots, n \Rightarrow G_n$ je diskretna uniformna razdoba na $0, \dots, n+1$

$$\Rightarrow X_n = \frac{G_n}{n+2} \xrightarrow{d} U(0,1)$$

Slično za $r = 1, g = 2, c = 1 \Rightarrow$

$$P(G_n = m+2) = \frac{n!}{m! (n-m)!} \frac{(1+m)! (n-m)!}{(n+2)! / 2} = \frac{m+1}{(n+2) \cdot (n+1)} \cdot 2$$

$$m = 0, \dots, n$$

$$\Rightarrow X_n = \frac{G_n}{n+3} \xrightarrow{d} X_\infty \text{ gdje } P(X_\infty \leq x) = \int_0^x 2y dy$$

Opcenito, X_∞ ima gustocu

$$\frac{\Gamma((g+r)/c)}{\Gamma(g/c)\Gamma(r/c)} x^{g/c-1} (1-x)^{r/c-1}$$

$\sim \text{Beta}(g/c, r/c)$ razdioba

PROCES GRANANJA (Galton-Watson)

• Neka su ζ_i^n , $i, n \geq 1$ n.j.d. i s vrijednostima u $\mathbb{N}_0$,

• definiramo $z_0 = 1$,

$$z_{n+1} = \begin{cases} \zeta_1^{n+1} + \dots + \zeta_{z_n}^{n+1} & z_n > 0 \\ 0 & z_n = 0 \end{cases}$$

$p_k = P(\zeta_i^n = k) \leftarrow$ razdioba broja potomaka

LEMA 20 Ako je $\mathcal{F}_n = \sigma\{\zeta_i^m : m \leq n\}$ i $\mu = E\zeta_i^1 + (0,0) \Rightarrow (z_n/\mu^n)$ je martingal.

Prispetimo se još nekoliko rezultata

TEOREM 2.1

Ako je $\mu < 1 \Rightarrow Z_n = 0$ za sve dovoljno velike $n \Rightarrow Z_n/\mu^n \xrightarrow{p.s.} 0$.

Proof $E(Z_n/\mu^n) = EZ_0 = 1 \Rightarrow EZ_n = \mu^n \rightarrow 0$

$$P(Z_n > 0) \leq E(Z_n \cdot 1_{Z_n > 0}) = \mu^n \rightarrow 0$$

TEOREM 2.2

Ako $\mu = 1$ & $P(\zeta_i^m = 1) < 1 \Rightarrow Z_n = 0$ za sve n dovoljno velike.

Proof Kako $\mu = 1 \Rightarrow Z_n$ je neneg. martingal
 $\Rightarrow (Z_n)$ konvergira g.s., kako je Z_n gelobrojna sl. varijabla mora biti
 $Z_n = Z_\infty$ za sve velike n

No $P(\zeta_i^m = 1) < 1 \Rightarrow P(Z_n = k, \text{ za sve } n \geq N) = 0$
za svako $k > 0$
i svaki N

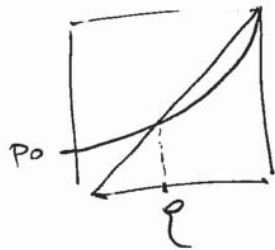
$$\Rightarrow Z_n = 0$$

□

$$\varphi(z) = \sum_{k \geq 0} p_k z^k = E z^{\xi_1'} \leftarrow \text{FUNKCIJA IZVODNICA}$$

TEOREM 23 Ako $\mu > 1$, $p_0 > 0$

$$P(Z_n = 0 \text{ za neki } n) = \varphi \leftarrow \begin{array}{l} \text{jedinstvena fiksna} \\ \text{tačka od} \\ \varphi \text{ u } [0, 1) \end{array}$$



- $\varphi' \geq 0$
- $\varphi'' \geq 0$
- $\varphi'(1) = \mu > 1$

TEOREM 24 (Kesten-Stigum)

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n / \mu^n \neq 0 \iff \sum p_k k \log k < \infty$$

Primjer (ABRACADABRA)

Pretp. da majmun kuca po tipkovnici i proizvodi niz od n.j.d. slova uniformno odabranih između 26 slova engleske abecede.

Vjeroj. da će proizvesti bilo koju riječ duljine k je $\left(\frac{1}{26}\right)^k$ odjednom,

i svaka će se riječ odn. niz slova kad tad pojaviti otučen bez pogreške. (DZ)

No neke ćemo neko duže čekati.

$T =$ broj udaraca potreban da se
prvi put pojavi niz ABRACADABRA

injekci

$$ET = 26^{11} + 26^4 + 26$$

DOOBOROVA NEJEDNAKOST. L_1 KONVERGENCIJA

TEOREM 25 Ako je (X_n) submartingal i
 N vrij. zaust. t.d. $P(N \leq k) = 1$ za neki $k \Rightarrow$

$$EX_0 \leq EX_N \leq EX_k$$

Dokaz Tm 14 $\Rightarrow X_{N \wedge n}$ je submartingal $\Rightarrow$

$$EX_0 \leq EX_{N \wedge 0} \leq EX_{N \wedge k} = EX_N \Rightarrow 1. \text{ nejedn.}$$

Niz $K_n = 1_{\{N < n\}} = 1_{\{N \leq n-1\}}$ je predvidiv $\Rightarrow$

$(K \cdot X)_n = X_n - X_{N \wedge n}$ je submartingal (tm 13) $\Rightarrow$

$$EX_k - EX_N = E(K \cdot X)_k \geq E(K \cdot X)_0 = 0 \Rightarrow 2. \text{ nejedn.}$$

TEOREM 26 (DOOBOROVA NEJEDNAKOST)

Ako je (X_n) submartingal i

$$\bar{X}_n = \max_{0, \dots, n} X_n^+$$

za $\lambda > 0$ & $A = \{\bar{X}_n \geq \lambda\}$ vrijedi:

$$\lambda P(A) \leq EX_n \cdot 1_A \leq EX_n^+$$

Dokaz $N = \inf\{n: X_n \geq \lambda \text{ i } m \geq n\}$, tj. $X_N \geq \lambda$ na A .

$$\begin{aligned} \lambda P(A) &\leq EX_N \cdot 1_A \leq \left(\begin{array}{l} \text{tm 25, } N \leq n \text{ g.s.} \\ \& X_N = X_n \text{ na } A^c \end{array} \right) \leq EX_n \cdot 1_A \\ &\stackrel{''}{=} \int \lambda 1_A dP \leq EX_n^+ \quad (\text{trivijalno}) \end{aligned}$$

□

Submartingalna možemo dakle ograničiti
 nprave, ali i momente kao što ćemo vidjeti.

TEOREM 27 (L^p -maksimalna nejednakost)

Ako je (X_n) submartingal ≥ 0 i $1 < p < \infty \Rightarrow$

$$E \bar{X}_n^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p E(X_n^+)^p$$

Posebno ako je (Y_n) martingal & $Y_n^* = \max_{0, \dots, n} |Y_n|$

$$E|Y_n^*|^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p E(|Y_n|^p)$$

Pr. 19.1 je submartingal pa 1. nejedn. $\Rightarrow$ 2. nejedn.

Uzmimo $M > 0$, uočimo

$$\{\bar{X}_n \wedge M \geq \lambda\} = \emptyset \text{ i.e.} \Rightarrow \text{za } A_n \text{ iz 26}$$

$$\{\bar{X}_n \geq \lambda\} \text{ možemo uočiti}$$

$$\{\bar{X}_n \wedge M \geq \lambda\}$$

$$E(\bar{X}_n \wedge M)^p = \int_0^\infty p \lambda^{p-1} \cdot P(\bar{X}_n \wedge M \geq \lambda) d\lambda$$

$$\stackrel{\text{Doob}}{\leq} \int_0^\infty p \lambda^{p-1} \left(\frac{1}{\lambda} \int X_n^+ \mathbb{1}_{\{\bar{X}_n \wedge M \geq \lambda\}} dP \right) d\lambda$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int X_n^+ \int_0^{\bar{X}_n \wedge M} p \lambda^{p-2} d\lambda dP$$

$$= \frac{p}{p-1} \int X_n^+ (\bar{X}_n \wedge M)^{p-1} dP \leq \dots$$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$$

$$\leq \int$$

$$\int X \int Y$$

$$\text{Hölder} \Rightarrow E|XY| \leq \|X\|_p \cdot \|Y\|_q$$

$$\dots \leq \frac{1}{2} \cdot (E|X_n^+|^p)^{1/p} \cdot (E|\bar{X}_n \wedge M|^{\frac{(p-1)p}{p-2}})^{1/2}$$

podijelimo sa $\Rightarrow$

$$(E|\bar{X}_n \wedge M|^p)^{1-\frac{1}{2}} \stackrel{=1/p}{\uparrow} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right) \cdot (E(X_n^+)^p)^{1/p} \quad \text{--- } ^{1/p}$$

$$\Rightarrow E|\bar{X}_n \wedge M|^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E(X_n^+)^p$$

za $M \rightarrow \infty$ lim o mon. konv. daje rezultat.

□

NAP Za $p=1$ tvrdnja ne vrijedi, ali:

$$E\bar{X}_n \leq \frac{1}{1-1/e} \left[1 + E(X_n^+ (\log(X_n^+) \vee 0)) \right]$$

-

THEOREM 28: (L^p konvergencija martingala)

(X_n) martingal, $p > 1$ & $\sup E|X_n|^p < \infty$

$$\Rightarrow X_n \rightarrow X \text{ g.s. i u } L^p$$

$$\cancel{16} (EX_n^+)^p \leq (E|X_n|)^p \leq E|X_n|^p, \quad \begin{matrix} \text{tm 16} \Rightarrow \\ \text{("o konv.} \\ \text{marting.")} \end{matrix} X_n \xrightarrow{\text{g.s.}} X$$

No tm 28 $\Rightarrow$

$$E\left(\sup_{0 \leq m \leq n} |X_m|\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E|X_n|^p$$

za $n \rightarrow \infty$, lim o mon konv. $\Rightarrow \sup_{m \geq 0} |X_m| \in L^p$

Kako

$$|X_n - X|^p \leq \left(2 \sup_{m \geq 0} |X_m|\right)^p$$

tm. o dom konv
 $\Rightarrow E|X_n - X|^p \rightarrow 0$

□

NAP Slučaj $p=2$, tj. kvadratno integrabilni
martingali. Je posebno interesantno
jer tada možemo još preciznije opisati
asimptotsko ponašanje martingala (X_n)

Uočite, npr da za martingal (X_n) $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$
i $m \leq n$, $\Rightarrow$

$$\mathbb{E}((X_n - X_m) \cdot Y) = 0 \quad \forall Y \in \mathcal{F}_m$$

$$\mathbb{E}Y^2 < \infty$$

(ortogonalnost mart. razlika)

UNIFORMNA INTEGRABILNOST. KONVERGENCIJA
U L^1

DEF Familija sl. varijabli $(X_i)_{i \in I}$ je uniformno
integrabilna ako

$$\sup_{i \in I} \mathbb{E}(|X_i| \mathbf{1}_{|X_i| > M}) \rightarrow 0 \quad \text{za } M \rightarrow \infty$$

Posebno $\exists M$ dovoljno velik t.d. $\sup(\dots) \leq 1$ tj.

$$\sup_{i \in I} \mathbb{E}|X_i| \leq M + 1$$

Jasno ako $\exists y > 0$. $|X_i| \leq y \quad \forall i \in I$

& $EY < \infty \Rightarrow (X_i)$ su unif. integrabilne

TEOREM 29 Za $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$ je:

$\{E(X|\mathcal{F}) : \mathcal{F} \text{ } \sigma\text{-alg.} \subseteq \mathcal{F}_0\}$ unif. integrabilna.

Učite:

i) ako $A_n \in \mathcal{F}_0$, $P(A_n) \rightarrow 0 \Rightarrow E(|X|; A_n) \rightarrow 0$
(tm. odloz. konv.) $\Rightarrow$

ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ td. $P(A) < \delta \Rightarrow E(|X|; A) < \varepsilon$

(u suprotnom $\exists A_n$, td. $P(A_n) < 1/n$ ali $E(|X|; A_n) \geq \varepsilon$ $\swarrow$ sa i.)

Dokaz tm 29, uzmimo $M > 0$ td.

$$E|X|/M \leq \delta \Rightarrow$$

$$E(|E(X|\mathcal{F})|; |E(X|\mathcal{F})| > M) \stackrel{\text{Jensen}}{\leq} E(E(|X||\mathcal{F}); \underbrace{E(|X||\mathcal{F}) > M}_{\in \mathcal{F}})$$
$$\stackrel{\text{set. vrij. od.}}{=} E(|X|; E(|X||\mathcal{F}) > M)$$

Čebišev. nejedn $\Rightarrow$

$$P(E(|X||\mathcal{F}) > M) \leq E(E(|X||\mathcal{F}))/M \leq \frac{E|X|}{M} \leq \delta$$

12 izbora $\delta \Rightarrow$

$$E(|E(X|\mathcal{F})|; |E(X|\mathcal{F})| > M) \leq \varepsilon \quad \forall \mathcal{F}$$

ε proizvoljna $\Rightarrow$ tvrđnja

□

NAP (recept za provjeru unif. integrabilnosti)

Ako $f \geq 0$ i $f(x)/x \rightarrow \infty$ za $x \rightarrow \infty$

npr $f(x) = x^p$, $p > 1$ i $f(x) = x \cdot (\log x \vee 0)$

$$|2 \quad E|f(X_i)| \leq C \quad \forall i \in I \Rightarrow$$

$\{X_i : i \in I\}$ unif. integrabilna familija.

TEOREM 30

Ako $X_n \xrightarrow{P} X$ sljedeće su tvrdnje ekvivalentne

i) $(X_n)_{n \geq 0}$ je unif. integrabilna

ii) $X_n \xrightarrow{L^1} X$

iii) $E|X_n| \rightarrow E|X| < \infty$

TEOREM 31 Za (X_n) submartingal, ekvivalentno je

i) (X_n) je uniformno integrabilan

ii) (X_n) konvergira g.s. & u L^1

iii) (X_n) konvergira u L^1

Dokaz ii) $\Rightarrow$ iii) trivij. , iii) $\Rightarrow$ i) po tm 30

i) $\Rightarrow$ iii) Zbog unif. integrab. $\sup E|X_n| < \infty$

tm 0 konv. martingala $\Rightarrow X_n \xrightarrow{g.s.} X$

tm 30 $\Rightarrow X_n \xrightarrow{L^1} X$

□

LEMA 32 Za $X_n \xrightarrow{L^1} X$ vrijedi:

$$E(X_n; A) \rightarrow E(X; A)$$

Dokaz $|E X_n 1_A - E X 1_A| \leq E |X_n 1_A - X 1_A| \leq E |X_n - X| \rightarrow 0$ $\square$

LEMA 33 Za martingal (X_n) t.d. $X_n \xrightarrow{L^1} X$

$$\Rightarrow X_n = E(X | \mathcal{F}_n)$$

Dokaz Martingalno svojstvo $\Rightarrow E(X_m | \mathcal{F}_n) = X_n \quad \forall m > n$

$\Rightarrow$ za $A \in \mathcal{F}_n$ $E(X_m; A) = E(X_n; A) \quad \forall m > n$

lema 32

$\Rightarrow E(X_m; A) \rightarrow E(X; A)$

$\Rightarrow E(X_n; A) = E(X; A) \quad \forall A \in \mathcal{F}_n \Rightarrow X_n = E(X | \mathcal{F}_n)$ $\square$

THEOREM 34

Za martingal (X_n) ekvivalentno je:

i) (X_n) je unif. integrabilan

ii) (X_n) konv. g.s. & u L^1

iii) (X_n) konv. u L^1

iv) postoji integrabilna X t.d. $X_n = E(X | \mathcal{F}_n)$

$\Rightarrow$ tzv. regularni martingali

Dokaz

i) $\rightarrow$ ii)	lm 3.1	✓
ii) $\rightarrow$ iii)		✓
iii) $\rightarrow$ iv)	lema 33	✓
iv) $\rightarrow$ i)	lm 2.9	✓

$\square$

TEOREM 35

Ako je $\mathcal{F}_n \nearrow \mathcal{F}_\infty$ rastući niz σ -algebri &
 $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_n \mathcal{F}_n) \Rightarrow$

$$E(X | \mathcal{F}_n) \xrightarrow{\text{p.s./}L_1} E(X | \mathcal{F}_\infty)$$

↓

TEOREM 36 (Lévyev zakon 0-1)

Ako $\mathcal{F}_n \nearrow \mathcal{F}_\infty$ i $A \in \mathcal{F}_\infty \Rightarrow$

$$E(1_A | \mathcal{F}_n) \rightarrow 1_A$$

"Otko će nerjesljivo?" Chung

MARTINGALI UNATRAG [backwards/reversed martingale]

Sluč. proces $(X_n)_{n \leq 0}$ adaptiran na rastući
niz σ -algebri $(\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ t.d. $E|X_n| < \infty \ \forall n$

$$E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n \quad \text{za } n \leq -1$$

Uočiti $\mathcal{F}_n \searrow$ za $n \rightarrow -\infty$, pa je
tu o konvergenciji jednostavniji

TEOREM 37

$$X_n \rightarrow X_{-\infty} \text{ u } L^1 \text{ i g.s. za } n \rightarrow -\infty$$

Idem $U_n = \#$ prelazaka puzle $[a, b]$ niza $X_{-n}, \dots, X_0$

$$\text{tm 15} \rightarrow (b-a)EU_n \leq E(X_0 - a)^+$$

$$\text{no } U_n \nearrow U_{-\infty} \Rightarrow EU_{-\infty} < \infty \quad \text{po tm. o mon. konv.}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow -\infty} X_n \text{ postoji g.s. po istom argumentu}$$

$$\text{martingala svojstvo} \Rightarrow X_n = E(X_0 | \mathcal{F}_n) \Rightarrow \text{tm 34 iv)} \Rightarrow$$

$$(X_n) \text{ je unif. integr.} \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^1} X_{-\infty}$$

-

TEOREM 38

$$\text{Ako } X_{-\infty} = \lim_{n \rightarrow -\infty} X_n, \quad \mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_n \mathcal{F}_n$$

$$\Rightarrow X_{-\infty} = E(X_0 | \mathcal{F}_{-\infty})$$

Idem $X_{-\infty} \in \mathcal{F}_{-\infty}. \quad X_n = E(X_0 | \mathcal{F}_n)$

$$\rightarrow \text{za } A \in \mathcal{F}_{-\infty} \subseteq \mathcal{F}_n$$

$$\int_A X_n dP = \int_A X_0 dP$$

$$\text{tm 37 + Lema 32} \rightarrow E(X_n; A) \rightarrow E(X_{-\infty}; A)$$

$$\Rightarrow \int_A X_{-\infty} dP = \int_A X_0 dP \quad \forall A \in \mathcal{F}_{-\infty}$$

□

TEOREM 39

Alko $\mathcal{F}_n \downarrow \mathcal{F}_\infty$ za $n \rightarrow -\infty$ tj. $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_n \mathcal{F}_n$

tada $E(Y|\mathcal{F}_n) \rightarrow E(Y|\mathcal{F}_\infty)$ g.s. & u L^1

Za sve integrabilne Y .

~~Pr~~ $X_n = E(Y|\mathcal{F}_n)$ je martingal unatrag

tm-ri 37, 38 $\Rightarrow X_n \rightarrow X_\infty$ u L^1 & g.s. za $n \rightarrow -\infty$

$$\text{gdji } X_\infty = E(X_0|\mathcal{F}_\infty) = E(E(Y|\mathcal{F}_0)|\mathcal{F}_\infty) \\ = E(Y|\mathcal{F}_\infty)$$

□

PRIMJENA (Teorem de Finetti ja)

Alko su $\vartheta, X_1, X_2, \dots$ sluč. varijable t.d.

$\vartheta \in [0, 1]$ i usjetno na ϑ , $X_n \stackrel{\text{njid}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\vartheta & \vartheta \end{pmatrix}$

$$\text{tj. } P(X_1=u_1, \dots, X_n=u_n | \vartheta) = \vartheta^s (1-\vartheta)^{n-s} \quad (*)$$
$$s = u_1 + \dots + u_n$$

Npr $Z_n \stackrel{\text{njid}}{\sim} U(0,1)$, $\vartheta \sim F$ neizod. (Zn)

$$X_n = 1_{(Z_n \leq \vartheta)}$$

$$(*) \Rightarrow P(X_1=u_1, \dots, X_n=u_n) = E \left[\vartheta^s (1-\vartheta)^{n-s} \right]$$

Kažemo (X_n) je miješani Bernoullijev niz.

On je izmjenjiv u smislu

$$(X_1, \dots, X_n) \stackrel{d}{=} (X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)}) \quad (\Delta)$$

π je permutacija π od $\{1, 2, \dots, n\}$

No interesantno je da je π izmjenjiv
niz sluč. varijabli s vrijednostima u $0-1$
miješani Bernoullijev niz.

$\mathcal{E}_n = \sigma$ -algebra događaja koji su invarijantni
u odn. na permutacije $(X_1, \dots, X_n)$

$\mathcal{E} = \bigcap \mathcal{E}_n = \sigma$ -algebra izmjenjivih događaja (v. pag 4)

TEOREM 40 (de Finetti)

Ako je $X_1, X_2, \dots$ izmjenjiv niz (v. (Δ))
tada vrijedi na $\mathcal{E}$, (X_n) čine n.j.d. niz.

φ funkcija,
 $(n)_k = n(n-1) \dots (n-k+1)$

$$A_n(\varphi) = \frac{1}{(n)_k} \sum \varphi(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$$

po svim cijelim brojevima
 $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$
koji su međusobno različiti

Ako je (X_n) rangirani

$$A_n(\varphi) = E(A_n(\varphi) | \mathcal{E}_n) \leftarrow \text{naime } A_n(\varphi) \in \mathcal{E}_n$$

$$= \frac{1}{(n)_k} \sum E(\varphi(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) | \mathcal{E}_n)$$

$$= E(\varphi(X_1, \dots, X_k) | \mathcal{E}_n)$$

Tim 39
→

$$A_n(\varphi) \rightarrow E(\varphi(X_1, \dots, X_k) | \mathcal{E}) \quad (**)$$

Ako su f, g ograničene na $\mathbb{R}^{k-1}$, odn $\mathbb{R}$
& $I_{n,k} = \{i_1, \dots, i_k \text{ različitih}, 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} (n)_{k-1} A_n(\varphi) \cdot n A_n(g) &= \sum_{i \in I_{n,k-1}} f(X_{i_1}, \dots, X_{i_{k-1}}) \sum_m g(X_m) \\ &= \sum_{i \in I_{n,k}} f(X_{i_1}, \dots, X_{i_{k-1}}) g(X_{i_k}) \\ &\quad + \sum_{i \in I_{n,k-1}} \sum_{j=1}^{k-1} f(X_{i_1}, \dots, X_{i_{k-1}}) g(X_{i_j}) \end{aligned}$$

Stavimo

$$\varphi(X_1, \dots, X_k) = f(X_1, \dots, X_{k-1}) g(X_k)$$

$$\text{tj.} \quad \frac{(n)_{k-1} n}{(n)_k} = \frac{n}{(n-k+1)} \quad \& \quad \frac{(n)_{k-1}}{(n)_k} = \frac{1}{(n-k+1)}$$

$$\Rightarrow A_n(\varphi) = \frac{n}{n-k+1} A_n(\varphi) A_n(g) - \frac{1}{n-k+1} \sum_{j=1}^{k-1} A_n(\varphi_j)$$

$$\text{gd } f_i: \quad f_j(x_1, \dots, x_{k-1}) = f(x_1, \dots, x_{k-1}) g(x_j)$$

(**) $\Rightarrow$
na f, g, ℓ

$$E(f(x_1, \dots, x_{k-1}) g(x_k) | \mathcal{E}) =$$

$$E(f(x_1, \dots, x_{k-1}) | \mathcal{E}) \cdot E(g(x_k) | \mathcal{E})$$

Indukcijo $\Rightarrow$

$$E\left(\prod_{j=1}^k f_j(x_j) | \mathcal{E}\right) = \prod_{j=1}^k E(f_j(x_j) | \mathcal{E})$$

□

TEOREMI O OPCIONALNO M ZAUSTAVLJANJU

TEOREM 41 (o opcionalnem zaustav.)

Ako su $L, M, L \subseteq M$ zaustavna vrnena,

$\mathcal{Y}_M$ unif. integr. submartingal $\Rightarrow$

$$E Y_L \leq E Y_M$$

:

$$Y_L \leq E(Y_M | \mathcal{F}_L)$$

v. odjeljak 5.7.

VI MARKOVJEVI LANCI

$(S, \mathcal{S})$ izmjeniv prostor

DEF Niz sluč. varijabli $(X_n)_{n \geq 0}$ s vrijednostima u S je Markovljev lanac u odn. na filtraciju $\mathcal{F}_n$, ako $X_n \in \mathcal{F}_n$ i za sve $B \in \mathcal{S}$

$$P(X_{n+1} \in B | \mathcal{F}_n) = P(X_{n+1} \in B | X_n)$$

tipično $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$

DEF Funkcija $p: S \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ je prijelazna vjerojatnost ako

- i) $\forall x \in S, A \mapsto p(x, A)$ je vjeroj. na $(S, \mathcal{S})$
- ii) $\forall A \in \mathcal{S}, x \mapsto p(x, A)$ je izmjeniva funkcija

Kažemo da je (X_n) M. lanac s prijelaznom vjerojatnošću p ako

$$P(X_{n+1} \in B | \mathcal{F}_n) = p(X_n, B) \quad (*)$$

Ako μ uz prijelaznu vjerojatnost zadana još i vjerojatnost μ na $(S, \mathcal{S})$ možemo konstruirati niz konzistentnih konodnim razdioba

$$P(X_j \in B_j; j=0, \dots, n) = \int_{B_0} \mu(dx_0) \int_{B_1} P(x_0, dx_1) \dots \int_{B_n} P(x_{n-1}, dx_n) \quad (1)$$

inijalna razdioba

Ako je $(S, \mathcal{S})$ zgodan prostor, Kolmogorovljeva teorija o proširenju pokazuje ...

postoji vj. mjera P_μ na $(S^{N_0}, \mathcal{S}^{N_0})$ t.d. preslikavanja $X_n(\omega) = \omega_n$ imaju kon.-dim. razdiobe kao u (1)

Ako $\mu = \delta_x$ pišemo $P_x = P_{\delta_x}$,

Uočite, preko

$$P_\mu(A) = \int \mu(dx) P_x(A)$$

možemo definirati P_μ za sve μ čim su zadane vjerojatnosti P_x

TEOREM 1

Gore uvedeni X_n predstavlja Mark. lanac (u odh. na $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$) s prijelaznom vjerojatnošću P .

Glav. • iskoristite π - λ teorem

• treba vidjeti:

$$\int_A 1_{X_{n+1} \in B} dP_\mu = \int_A P(X_{n+1} \in B) dP_\mu \quad \forall A \in \mathcal{F}_n, B \in \mathcal{S}$$

v. (*)

• $A = \{X_0 \in B_0, \dots, X_n \in B_n\}$ čine π -sistem i zadovoljavaju $\uparrow$

TEOREM 2

Ako je (X_n) Mark. lanac s prijelaznom vjerojatnošću P i inicijalnom mjerom μ , tada mu kon-dim. mjeriobe zadovoljavaju relaciju (1).

Glav. • prvo se pokaže

$$E(f(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = \int P(X_n, dy) f(y)$$

za sve

$f \in \mathcal{H}$ = klasa ogr. f-ova za koje to vrijedi:
• $\mathcal{H} \ni 1_A$

TEOREM 3 (o monotoniim klasama)

Ako je $\mathcal{A}$ π -sistem koji sadrži Ω , a $\mathcal{H}$ klasa realnih fja t.d.

- i) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow 1_A \in \mathcal{H}$
- ii) $f, g \in \mathcal{H}, c \in \mathbb{R} \Rightarrow f+g$ & $c \cdot f \in \mathcal{H}$
- iii) $f_n \in \mathcal{H}$ nenegativne i $f_n \uparrow f \Rightarrow f \in \mathcal{H}$

$\Rightarrow \mathcal{H}$ sadrži sve ograničene fje integrirane u odu. na $\sigma(\mathcal{A})$.

prim. ii) + iii) + $\Omega \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{G} = \{A : 1_A \in \mathcal{H}\}$ je π -sistem $\Rightarrow \mathcal{G} \supseteq \sigma(\mathcal{A})$

- ii) $\Rightarrow \mathcal{H} \supseteq$ sva odu. fje
- iii) $\Rightarrow \mathcal{H} \supseteq$ ogr. intj. fje

~~prim~~ tm 2 (nastavak)

• tm 3 $\Rightarrow \mathcal{H} \supseteq$ sve ogr. fje

• sad

$$\begin{aligned} E\left(\prod_{m=1}^n f_m(X_m)\right) &= E E\left(\prod_{m=1}^n f_m(X_m) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) \\ &= E\left(\prod_{m=1}^{n-1} f_m(X_m) \cdot \int P_{n-1}(X_{n-1}, dy) f_n(y)\right) \end{aligned}$$

• (1) slijedi indukcijom

□

Činjenica da za $(\Omega, \mathcal{F})$ možemo
uzeti $(\mathcal{F}^{N_0}, \mathcal{G}^{N_0})$

a za $X_n(\omega) = \omega_n$

ima dvije prednosti:

- $\forall \mu, \exists P_\mu$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ t.d. (X_n) je M. lanac
i $X_0 \sim \mu$
- operatori pomaka [shift]

$$(\theta_n \omega)(m) = \omega_{m+n}$$

su dobro definirani.

U slučaju: S prebrojiv i $\mathcal{F} = \mathcal{P}(S)$
sve je jednostavnije

- dvostruki niz $P(i,j) \geq 0$, $\sum_j P(i,j) = 1 \quad \forall i, j \in S$
zadaje (pnj.) vjeroj:

$$P(i, A) = \sum_{j \in A} P(i, j)$$

- $(*) \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=j \mid X_n=i, X_{n-1}=i_{n-1}, \dots, X_0=i_0) &= P(i,j) \\ &= P(X_{n+1}=j \mid X_n=i) \end{aligned}$$

LEMA 4 Ako su X, Y sl. var u $(S, \mathcal{F})$,
 t.d. $X \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \ni Y$ nezavisne, a f fja t.d.
 $E|f(X, Y)| < \infty$ tada

$$E(f(X, Y) | \mathcal{F}) = g(X)$$

gdje: $g(x) = E(f(x, Y))$

Pr. treba vidjeti:

$$E(f(X, Y) \cdot 1_C) = E(g(X) \cdot 1_C) \quad \forall C \in \mathcal{F} \quad (**)$$

- lako za $f(x, y) = 1_A(x) \cdot 1_B(y)$
- $A \times B, A, B \in \mathcal{S}$ čine π -sistem, tu o monotonim klasama $\Rightarrow (**)$ istina za sve f

□

-

PRIMJERI

Primjer (slučajna setnja)

Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} Y_n^2 < \infty$, $X_0 = x$, $X_n = X_0 + Y_1 + \dots + Y_n$

$\Rightarrow (X_n)$ j. M. l. ovac s pnj. vjeroj.

$$p(x, A) = \mu(A - x)$$

koristeći lemu 4 za

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_n, X = X_n, Y = Y_{n+1}, f(x, y) = 1_{(x+y \in B)}$$

$$\Rightarrow (*)$$

Primer (proces grananja)

$S = N_0$, ξ_i njeđ. s vrijednošću u N_0

$$P(i, j) = P\left(\sum_{m=1}^i \xi_m = j\right)$$

Primer (lanac obnavljanja)

$S = N_0$, $f_k \geq 0$, $\sum_1^{\infty} f_k = 1$ razdioba na $\mathbb{N}$

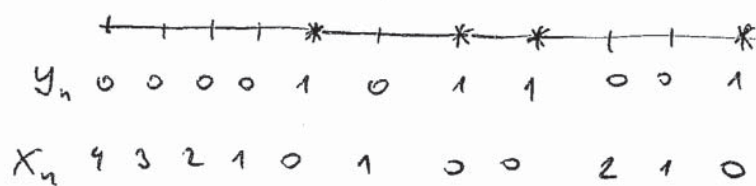
$\xi_i \stackrel{\text{nd}}{\sim} (f_j)$ tj. $P(\xi_i = j) = f_j$

$T_0 = i_0$, $T_k = T_{k-1} + \xi_k \leftarrow \text{dolasci (obnavljanja)}$

$Y_m = \begin{cases} 1 & m \in \{T_0, T_1, \dots\} \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \leftarrow \text{indikator obnavljanja}$

-

$X_m = \inf \{m-n : m \geq n, Y_m = 1\} \leftarrow$



(X_n) je M. lanac i njeđi

$P(0, j) = f_{j+1} \quad j \geq 0$

$P(i, i-1) = 1 \quad i \geq 1$

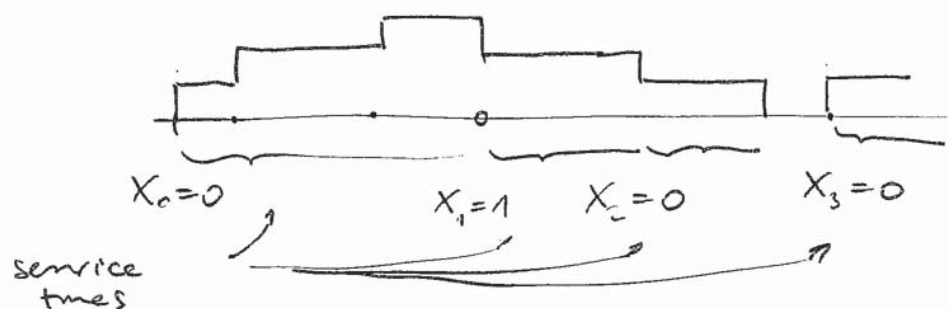
$P(i, j) = 0 \quad \text{inače}$

Primeri (M/G/1 rep)

M - Markov tj.
Poisson arrivals
(Poissonov proces dolazaka)

G - general service time $\sim F$

1 - server



$X_n = \#$ klijenata koji čekaju u repu
u času kada n -ti klijent
biva uslužen

$$X_0 = x$$

neka je $a_k = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dF(t) =$ vj. da će k klijenata
stići tokom
jednog posluživanja

Neka su

$$j_i \sim \text{nj.d.} \quad P(j_i = k-1) = a_k$$

= neto broj novih klijenata
tokom 1 posluživanja

sada

$$X_{n+1} = (X_n + j_{n+1})^+ \quad \text{čini M.lanac t.d.}$$

$$p(0,0) = a_0 + a_1$$

$$p(j, j+k-1) = a_k \quad j \geq 1, k \geq 1$$

tipično pretpostavljamo zbog jednostavnosti:

$$a_k > 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$$

Primer (Ehrenfest chain)

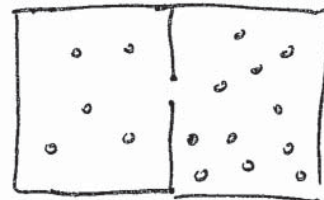
$$S = \{0, 1, \dots, r\}$$

$$p(k, k+1) = \frac{r-k}{r}$$

$$p(k, k-1) = k/r$$

$$p(i, j) = 0 \text{ inace}$$

2 urne : k u prvoj
 $r-k$ u drugoj
 s kuglica



— biramo kuglicu slučajno i
 prenjestamo je u drugu (obrnutu)
 urnu

↑ molekule
 zraka

Primer (birth & death chains)

$$S = \mathbb{N}_0$$

$$p(i, j) = 0 \text{ za } |i-j| > 1$$

U probnoj roni slučajno latke

$$P_n(X_k = i_k \text{ } k=0, \dots, n) = \mu(i_0) \cdot \prod_{m=1}^n p(i_{m-1}, i_m)$$

⇓

$$P_n(X_n = j) = \sum_i \mu(i) p^n(i, j)$$

↑
 (i, j) element
 matrice P^n

gdje: $P = (p_{ij})$

POOPČENJA MARKOVJEVOG SKLOSTVA

Vidjeli smo po definiciji

$$P(X_{n+1} \in B | \mathcal{F}_n) = P(X_n, B)$$

no prvo poopćenje kaže da događaj η .
varijablu $1_{\{X_{n+1} \in B\}}$ možemo zamijeniti bilo
kojom ogr. varijablom oblika $h(X_n, X_{n+1}, \dots)$
na obje strane jednakosti

Pretpostavljamo

$$(\Omega, \mathcal{F}) = (S^{N_0}, \mathcal{S}^{N_0})$$

$$X_n(\omega) = \omega_n, \quad (\vartheta_n \omega)(m) = \omega_{m+n}$$

TEOREM 5 (Markovljevo svojstvo)

Ako je $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ogr. & izmjeniva

$$E_n(Y \circ \vartheta_n | \mathcal{F}_n) = E_{X_n} Y$$

NAP D.s. je zapravo $\mathcal{P}(X_n)$ gdje je

$$\mathcal{P}_x = E_x Y$$

pen μ_n monotoni klasama

Posljedica je M. svojstva

$$A \in \sigma(X_0, \dots, X_n), \quad B \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$$

za svaku inic. razdiobu μ

$$P_\mu(A \cap B | X_n) = P_\mu(A | X_n) \cdot P_\mu(B | X_n)$$



uvjetno na danas

prošlost i budućnost

su nezavisne

za Mark. procese

THEOREM 6 (Chapman Kolmogorov)

$$P_x(X_{n+m}=z) = \sum_y P_x(X_m=y) P_y(X_n=z)$$

Proof

$$P_x(X_{n+m}=z) = E_x(P_x(X_{n+m}=z | \mathcal{F}_m))$$

$$= E_x(P_{X_m}(X_n=z)) = \text{d.s.}$$

↑
tim 5.

□

THEOREM 7

Also $\gamma_i(X_n)$ M. bound

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n \in B_n\} \mid X_n\right) \geq \delta > 0$$

$\text{na } \{X_n \in A_n\}$

$\Downarrow$

$$P(\{X_n \in A_n \text{ b.c.}\} \setminus \{X_n \in B_n \text{ b.c.}\}) = 0$$

"pedestrian ... will not be crossing indefinitely"

Doobin, Chung

John

$$\mathcal{L}_n = \{X_{n+1} \in B_{n+1}\} \cup \{X_{n+2} \in B_{n+2}\} \cup \dots$$

$$\mathcal{L} = \bigcap \mathcal{L}_n = \{X_n \in B_n \text{ b.c.}\}$$

$$\Gamma = \{X_n \in A_n \text{ b.c.}\}, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$$

$$\mathcal{F}_{\infty} = \sigma(\bigcup \mathcal{F}_n), \text{ konstetir: M. svojstvo}$$

$$E(1_{\mathcal{L}_n} \mid X_n) = E(1_{\mathcal{L}_n} \mid \mathcal{F}_n) \rightarrow E(1_{\mathcal{L}} \mid \mathcal{F}_{\infty})$$

$\parallel$

za $\omega \in \Gamma$ l.s. $\gamma_i \geq \delta$ b.c.

$$\Rightarrow 1_{\mathcal{L}}(\omega) = 1 \quad \text{za } \omega \in \Gamma$$

$$\Rightarrow \Gamma \subseteq \mathcal{L}$$

□

Drugo poplčenje Markovljevog strojstva,
podsjehmo se:

Sl. vanj. N je zaustavno vrijeme
ako $\{N=n\} \in \mathcal{F}_n$

$$\tilde{\mathcal{F}}_N = \{A : A \cap \{N=n\} \in \mathcal{F}_n \ \forall n\}$$

$$\vartheta_N(\omega) = \begin{cases} \vartheta_n \omega & \text{na } \{N=n\} \\ \Delta & \text{na } \{N=\infty\} \end{cases}$$

$\uparrow$ slučajni pomak $\nwarrow$ dodatna točka
 $\omega \in \Omega = S^{N_0}$

TEOREM 8 (Jako Markovljev strojstvo)

Ako je $Y_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ razmjerna za svaki n
i $|Y_n| \leq M$ za svaki n , tada

$$E(Y_N \circ \vartheta_N | \tilde{\mathcal{F}}_N) = E_{X_N} Y_N \quad \text{na } \{N < \infty\}$$

Dokaz Za $A \in \tilde{\mathcal{F}}_N$

$$E_\mu(Y_N \circ \vartheta_N ; A \cap \{N < \infty\}) = \sum_{n=0}^{\infty} E_\mu(Y_N \circ \vartheta_n ; \underbrace{A \cap \{N=n\}}_{\in \mathcal{F}_n})$$

$$\stackrel{4.15}{=} \sum_{n=0}^{\infty} E_\mu(E_{X_n} Y_N ; A \cap \{N=n\}) = E_\mu(E_{X_N} Y_N ; A \cap \{N < \infty\})$$

□

TEOREM 9 (princip refleksije)

Ako su ξ_i n.j.d. simetrično distribuirane oko 0. Za $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ i $a > 0$ vrijedi:

$$P(\sup_{m \leq n} S_m > a) \leq 2P(S_n > a)$$

(ideja)
 Za simetričnu sl. v. r z vrijedi $P(Z \geq 0) \geq \frac{1}{2}$
 . $N = \inf \{ m \leq n : S_m > a \}$; $\inf \emptyset = \infty$, na $\{N < \infty\}$
 su S_N i $S_n - S_N$ nezavisne, a $P(S_n - S_N \geq 0) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$
 $P(S_n > a) \geq \frac{1}{2} P(N \leq n)$ $\square$

U nastavku pretpostavimo: S je prebrojiv

7. $P(i, A) = \sum_{j \in A} P(i, j)$ za neki dvostruki niz (stohastičku matriču) $(P(i, j))_{i, j}$

Stavimo $T_y^k = \inf \{ n > T_y^{k-1} : X_n = y \}$ ← vrijeme k -tog povratka (posjeta) u y
 $T_y^0 = 0$

$\Rightarrow T_y^1 > 0$ posjet u 0 se ne računa

Za $T_y = T_y^1$

definiramo $f_{xy} = P_x(T_y < \infty)$

THEOREM 10

$$P_x(T_y^k < \infty) = \{x, y\} \cdot \{y, y\}^{k-1}$$

Proof $N = T_y^{k-1}$, konstruirajmo M. strojstvo i indukcijom $\square$

DEF Stanje y je porratno ako $\{y, y\} = 1$,
a probavno ako $\{y, y\} < 1$.

Za porratno y , timo $\Rightarrow P_y(T_y^k < \infty) = 1 \quad \forall k$
 $\Rightarrow P_y(X_n = y \text{ b.c.}) = 1$

THEOREM 11

y je porratno $\Leftrightarrow E_y N(y) = +\infty$.

$$\text{gdje } N(y) = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{(X_i = y)}$$

THEOREM 12 (porratnost je zaraza / strojstvo klase)

x porratno, $\{x, y\} > 0 \Rightarrow y$ porratno $\wedge \{y, x\} = 1$

DEF $C \subseteq S$ je zatroren ako
 $x \in C, \{x, y\} > 0 \Rightarrow y \in C$

$D \subseteq S$ je ireducibilan ako
 $x, y \in D \Rightarrow \{x, y\} > 0$

Stanje $a \in S$ je apsorbirajuće ako je
 $\{a\}$ zatroren.

TEOREM 13 (o dekompoziciji)

Neka je $R = \{x: \{xx=1\}\}$ skup povratnih stanja Markovljevog lanca, tada

$$R = \cup R_i$$

gdje su R_i zatvoreni i ireducibilni skupovi

prim Neka $x \in R$, $C_x = \{y: \{xy>0\}\}$

tm 12 $\Rightarrow C_x \subset R$, a ako $y \in C_x \Rightarrow \{yx=1\} > 0$

$\Rightarrow C_x = C_y$ ili $C_x \cap C_y = \emptyset$ (tada ne može)

R_i su sada C_x iz kojih izbacimo duplikate $\square$

TM 13 $\Rightarrow$ povratnost možemo b.s.o.
proučavati samo na ireducibilnim
zatvorenim skupovima

Ako je S beskonačan i ireducibilan

tm 12 $\Rightarrow$ ili su sva stanja povratna
ili su sva stanja polarna

TEOREM 14 Ako je C konačan zatvoren skup
 $\Rightarrow C$ sadrži postratno stanje.

Ako je C ireducibilan $\Rightarrow$ sva su stanja postratna.

Primer (M/G/1 rep)

$$X_{n+1} = (X_n + J_{n+1})^+, \quad a_k = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dF(t)$$

$$P(J_i = k-1) = a_k \quad \{i: n\text{-j.d.}\}$$

$\mu = \sum k a_k =$ prosj. broj klijenata koji stigne tokom 1 posredovanja

$$S_n = J_1 + \dots + J_n$$

$$N = \inf\{n: X_0 + S_n \leq 0\}$$

$$\text{za } n \leq N : X_n = X_0 + S_n$$

$$\text{Ako } \mu > 1 \Rightarrow E J_i = \mu - 1 > 0 \Rightarrow S_n \xrightarrow{\text{p.s.}} \infty$$

$$\Rightarrow \inf S_n > -\infty \text{ p.s.}$$

$$\Rightarrow \text{za dovoljno velike } x$$

$$P_x(N < \infty) < 1 \Rightarrow \text{lanac je prolazan}$$

$$P_x(T_0 < \infty) = \rho_{x0}$$

Slučaj $\mu \leq 1$ možemo riješiti ako uočimo

$X_{n \wedge N}$ je supermartingal, nenegativan

$$T = \inf \{n: X_n \geq M\}, \quad \bar{T} = T \wedge N$$

$$\Rightarrow X_{\bar{T}} \geq M \text{ na } \{T < N\} \\ = 0 \text{ na } \{N < T\}$$

$EX_0 \geq EX_N$
za N konst. vrijednost

stavimo $X_0 = x$, tm 5.7.6 Doob [2010] $\Rightarrow$

$$x = E_x X_0 \geq E X_{\bar{T}} \geq M \cdot P_x(T < N)$$

$$\text{Pustimo } M \rightarrow \infty \Rightarrow P_x(N < \infty) = 1$$

$\Rightarrow$ lanac je porastan

THEOREM 15

Neka je S irreducibilan i $\varphi \geq 0$ tol.

i) $E_x \varphi(X_1) \leq \varphi(x)$ za sve $x \in F^c$ gdje je F neki konačan skup

ii) $\varphi(x) \rightarrow \infty$ za $x \rightarrow \infty$ tj.

$\{x: \varphi(x) \leq M\}$ je konačan za sve $M < \infty$

$\Rightarrow$ lanac je porastan

$$\tau = \inf \{ n > 0 : X_n \in F \}$$

i) & ii) $\Rightarrow Y_n = \mathcal{L}(X_{n \wedge \tau})$ je supermartingal

$$T_M = \inf \{ n > 0 : X_n \in F \text{ (i.e. } \mathcal{L}(X_n) > M) \}$$

Kako $\{x : \mathcal{L}(x) \in M\}$, irreducibilnost $\rightarrow T_M < \infty$ g.s.

Iz tm 5.7.6 ponovo sledi:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = E_x Y_0 &\geq E_x Y_{T_M} = E_x \mathcal{L}(X_{T_M}) \\ &\geq M \cdot P_x(T_M < \tau) \end{aligned}$$

jer $\mathcal{L}(X_{T_M}) \geq M$ ako $T_M < \tau$,

za $M \rightarrow \infty \Rightarrow P_x(T < \infty) = 1$ za sve $x \notin F$

$\Rightarrow P_y(X_n \in F \text{ b.c.}) = 1 \quad \forall y \in S$. Kako je F konačan

$\Rightarrow P_y(X_n = z \text{ b.c.}) = 1$ za neki $z \in F$.

STACIONARNE (INVARIANTNE) MJERE

DEF Mjera μ na $(S, \mathcal{P}(S))$ je stacionarna mjera ako

$$\sum \mu(x) p(x, y) = \mu(y)$$

g. ako $P_\mu(X_1 = y) = \mu(y)$ a μ je vjerojatnost

tada dakako

$$P_\mu(X_n = y) = \mu(y) \quad \text{za sve } n \geq 1$$

(indukcijom i M. svojstvom)

Primer (sluč. šetnja na $\mathbb{Z}^d$)

$$p(x, y) = f(y - x) \quad \text{gdje: } \sum f(z) = 1, f(z) \geq 0 \Rightarrow \mu \equiv 1 \text{ je inv.}$$

Primer (asimetrična sl. šetnja na $\mathbb{Z}$)

$$p(x, x+1) = p, \quad p(x, x-1) = q = 1 - p$$

već znamo $\mu \equiv 1$ je stac. mjera, no za

$$p/q \neq 1 \quad \text{to je i } \mu'(x) = (p/q)^x$$

$\rightarrow \exists$ druge stac. mjere
koje nisu oblika
 $\mu' = c \cdot \mu$

DEF Ako je stacionarna mjera vjerojatnost
zovemo je stacionarnom razdiobom.

Primer (Ehrenfesta urna)

$$S = \{0, 1, \dots, r\} \quad p(k, k+1) = \frac{r-k}{r}, \quad p(k, k-1) = \frac{k}{r}$$

$$\mu(x) = \frac{1}{2^r} \binom{r}{x} \text{ je stacionarna raspodela}$$

Primer (slučajna šetnja na grafu)

S = skup vrhova

$$A = (a_{ij})_{i,j \in S}$$

matrica incidencije

$$\cdot a_{ij} = 0 \text{ ili } 1$$

$$\cdot a_{ij} = a_{ji} \text{ i } a_{ii} = 0 \text{ (pretpostavka)}$$

$$\cdot \text{Neka: } \mu(i) = \sum_j a_{ij} < \infty \text{ i } p(i,j) = \frac{a_{ij}}{\mu(i)}$$

Uočimo

$$\boxed{\underbrace{\mu(i) p(i,j)}_{a_{ij}} = \underbrace{\mu(j) p(j,i)}_{a_{ji}}} \quad \forall i,j \quad (1)$$

- Ako za neki M. lanac $\exists \mu$ t.d. vrijedi (1)
[detailed balance condition] kažemo da je μ reveribilna mjera za taj lanac.
- (1) $\Rightarrow \mu$ je invarijantna, zaista
sumiramo po i u (1) $\Rightarrow$ tvrdnja

$\Rightarrow$

Za (1) je dovoljno

$$a_{ij} = a_{ji} \geq 0, \mu(i) = \sum_j a_{ij} < \infty \text{ \& } p(i,j) = \frac{a_{ij}}{\mu(i)}$$

(dokle ne treba $a_{ij} \in \{0,1\}$), tako

dobijemo sve reverzibilne mjere jer

iz (1) možemo postaviti

$$a_{ij} = \mu(i) \cdot p(i,j)$$

Ako $X_0 \sim \mu$ \& $Y_m = X_{n-m}$ $0 \leq m \leq n$

$\Rightarrow Y_m$ je M.lanac sa stac. inicij. mjerom μ

i vjeroj. prijelaza

↗
dualne
prijelazne
vjerojatnosti

$$q(x,y) = \mu(y) \cdot \frac{p(y,x)}{\mu(x)}$$

ako je
 μ reverzibilna
 $\Rightarrow$
 $p = q$!!

Primjer (M/G/1 kp)

za $x > y+1$

$$p(x,y) = 0$$

no $p(y,x) > 0$

$\Rightarrow$ ne postoji njegova reverzibilna mjera

TEOREM 16

Ako je x povratno stanje i $T = \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}$

$$\Rightarrow \mu_x(y) = E_x\left(\sum_{n=0}^{T-1} 1_{X_n=y}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P_x(X_n=y, n < T)$$

definiira stac. mjeru

primjer (ideja)

$$\mu_x(y) = \sum_z \mu_x(z) p(z,y)$$

||
a. broj ||
posjeta u y oček. broj posjeta u y
od 0, ..., T-1 od 1, ..., T jer $X_T = X_0 = x$

TEOREM 17

Ako je P irreducibilna i povratna (tj. $\exists$ je povratno za $\forall s \in S$) $\Rightarrow$ staci. mjera je jedinstvena do na množenje konstantom.

Prisjetimo se: stacionarna razdioba zadovoljava

$$\pi P = \pi$$

TEOREM 18

Ako postoji staci. razdioba π tada

$$\pi(y) > 0 \Rightarrow y \text{ je povratno}$$

primjer

$$\pi P^n = \pi \Rightarrow \sum_x \pi(x) \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,y) = \sum_1^{\infty} \pi(y) = +\infty \quad \text{ako } \pi(y) > 0$$

Ima li $\Rightarrow \infty = \sum \pi(x) \cdot \frac{1}{1-\xi_{xy}} \leq \frac{1}{1-\xi_{yy}} \Rightarrow \xi_{yy} = 1$

||
 $E_x(N(y))$

TEOREM 19

Ako je P reducibilna sa staci. razd. $\mathcal{I}$

$$\Rightarrow \mathcal{I}(x) = \frac{1}{E_x T_x}$$

DEF Ako $E_x T_x = \infty$ kažemo da je x pozitivno
porratno stanje. Ako je x porratno i

$E_x T_x = \infty$ kažemo da je x nul-porratno.

TEOREM 20

Ako je P reducibilna, ekvivalentno je

- i) neki x je pozitivno porratno
- ii) postoji staci. razlika
- iii) svaki x je pozitivno porratno.

Primjer (M/G/1 s.p.)

$$\mu = \sum k a_k = \text{pros. broj pristiglih klijenata tokom usluživanja}$$

Pokazati se

$$\text{lanac je poz. povatan} \Leftrightarrow \mu < 1$$

$$\text{već znamo} \quad \text{pozitivnost} \Leftrightarrow \mu \leq 1$$

$$N = \inf \{n \geq 0 : X_n = 0\}$$

$$\Rightarrow X_{N+n} - (\mu - 1)(N+n) \text{ je martingal}$$

(do N to je samo
sluč. rethja
uč. koraka 0)

-

$$\text{Za } X_0 = x \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x = EX_0 &= E_x X_{N+n} - (\mu - 1)E(N+n) \\ &\geq (1 - \mu)E_x(N+n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_x(N) \leq \frac{x}{1 - \mu} \quad (*)$$

Kako x pada za najviše 1 u svakom koraku

$$E_x T_{x-1} = E_1 T_0$$

$$\Rightarrow E_x N = c \cdot x \quad (\text{induktivno})$$

No

$$E_1 N = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k E_k N \Rightarrow c = 1 + \mu c$$

tj. $c = \frac{1}{1 - \mu}$

$\Rightarrow$ u (*) vrijedi jednakost

Ako $X_0 = 0$, mi znamo

$$p(0,0) = a_0 + a_1, \quad p(0,k-1) = a_k \quad k \geq 2$$

Promatrajući što se događa s 1. korakom $\Rightarrow$

$$E_0 T_0 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{k-1}{1-\mu} = 1 + \frac{\mu - (1-a_0)}{1-\mu} = \frac{a_0}{1-\mu} < \infty$$

$\Rightarrow$ lanac je poz. porastan za $\mu < 1$.

Za obrat uočite

$$E_0 T_0 < \infty \Rightarrow E_k N < \infty \quad \forall k$$

$$E_k N = c k \quad \& \quad c = \frac{1}{1-\mu}$$

što je nemoguće ako $\mu \geq 1$

12 tm 16, 19 $\Rightarrow$

stacion. razdioba zadovoljava

$$\pi(0) = \frac{1-\mu}{a_0}, \text{ no } \pi P = \pi \Rightarrow$$

$$" 1/E_0 T_0$$

$$\pi(0) = \pi(0)(a_0 + a_1) + \pi(1) \cdot a_0$$

$$\pi(1) = \pi(0) a_2 + \pi(1) a_1 + \pi(2) a_0$$

$$\pi(2) = \pi(0) a_3 + \pi(1) a_2 + \pi(2) a_1 + \pi(3) a_0$$

$$\vdots$$
$$\Rightarrow \pi(1) = \pi(0) \frac{1 - (a_0 + a_1)}{a_0}$$

$\vdots$

no izrazi su nezgodni i nepornato je
zgodno rešenji u zatv. obliku

ASIMPTOTSKO PONAŠANJE

Što sa $p^n(x, y)$ za velike n ?

$$N_n(y) = \sum_{m=1}^n 1_{(X_m=y)}$$

TEOREM 21 Ako je y površno, tada za sve $x \in S$

$$\frac{N_n(y)}{n} \xrightarrow{P_x\text{-got. sigurno}} \frac{1}{E_y T_y} 1_{(T_y < \infty)}$$

pri tom $1/\infty = 0$.

$\left| \frac{N_n(y)}{n} \right| \leq 1 \Rightarrow$ izračunamo li očekivanje u

tmu 21, tm o dom. konv. $\Rightarrow$

$$E_x N_n(y)/n \rightarrow E_x(1_{(T_y < \infty)})/E_y T_y$$

t_j $\nearrow$

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n p^m(x, y) \rightarrow \rho_{xy}/E_y T_y$$

Dakle $p^n(x, y)$ konvergira za $n \rightarrow \infty$
u Cesaro smislu.

(čak i za prolazna y , ali k 0)

Neka je x povratno stanje ($\equiv E_x N(x) = +\infty$)
 $\sum_{n=1}^{\infty} p^n(x, x)$

$$I_x = \{n \geq 1 : p^n(x, x) > 0\}$$

$$d_x = \text{n.z.d } I_x \leftarrow \text{period stanja } x$$

LEMA 22 ("period je svojstvo klase")

$$\{x, y\} > 0 \Rightarrow d_y = d_x$$

LEMA 23

$$d_x = 1 \Rightarrow p^m(x, x) > 0 \quad \text{za sve } m \geq m_0$$

TEOREM 24 (o konvergenciji M. lanaca)

Ako je p irreducibilna i aperiodična
 (tj. $d_x = 1 \quad \forall x$) sa stacionarnom razdiobom
 π . Tada, za sve x

$$p^n(x, y) \rightarrow \pi(y)$$

Dođe 2 tm 24

$S^2 = S \times S$, npr. vjer. na S^2 definiramo sa

$$\bar{P}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = P(x_1, x_2) P(y_1, y_2)$$

→ dva nez. M. lanca.

i) $\bar{P}$ je irreducibilna (zbog aperiodičnosti !!!)
lema 23 $\Rightarrow \exists K, L, M_0 \geq 1$

$$P^{K+M}(x_1, x_2) > 0, P^{L+M}(y_1, y_2) > 0 \quad \forall M > M_0$$

$$\Rightarrow \bar{P}^{K+L+M}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) > 0$$

ii) $\pi(a, b) = \pi(a) \cdot \pi(b)$ je staci. razdioba za $\bar{P}$

tm 18: $\Rightarrow \pi(y) > 0 \Rightarrow y$ je porr.

+ irreducib

$\Rightarrow$ sva su stanja porr. za $\bar{P}$

iii) $T_{(x,x)} =$ npr. prv. stanja (x, x)

$\bar{P}$ irreduc. porr. $\Rightarrow T_{(x,x)} < \infty$ g.s.

$\Rightarrow T =$ npr. prv. dijagonale $D = \{(x, x) : x \in S\}$

također $T < \infty$ g.s.

$$\begin{aligned}
 \text{iv) na } \{T \leq n\} & \rightarrow P(X_n = y, T \leq n) \\
 X_n & \stackrel{d}{=} Y_n \\
 &= \sum_{m=1}^n \sum_x P(T=m, X_m=x) \cdot P(X_n=y | X_m=x) \\
 &= \stackrel{\text{isto}}{=} P(Y_n=y, T \leq n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{v) } P(X_n=y) &= P(Y_n=y, T \leq n) + P(X_n=y, T > n) \\
 &\leq P(Y_n=y) + P(X_n=y, T > n)
 \end{aligned}$$

i slično za Y_n

$$\Rightarrow |P(X_n=y) - P(Y_n=y)| \leq P(X_n=y, T > n) + P(Y_n=y, T > n)$$

$$\Rightarrow \sum_y |P(X_n=y) - P(Y_n=y)| \leq 2P(T > n)$$

$$\text{vi) ako } X_0 = x, Y_0 \sim \pi \Rightarrow Y_n \sim \pi$$

$$\Rightarrow \| \varphi^n(x, \cdot) - \pi(\cdot) \|_{TV} \leq P(T > n) \rightarrow 0$$

Primjer (miješanje karata)

špil
od n
karata



top to
random
shuffle



ispod
jedne
od ostalih
 $n-1$ na
sluč. način

Koliko trebamo miješati da bismo
dobili uniformnu razdiobu?

T_k = vrp. ubacivanja k -te karte
ispod originalno donje

↳ svih $k!$ permutacija tih karata
je jednako vjerovatno

⇒ u $T_n = T_{n-1} + 1$ svih $n!$ permutacija
su jednako vjeroj.

$$\text{Uz } t_k = T_k - T_{k-1}, k \geq 1, T_0 = 0$$

⇒ $t_k \sim$ geometrijske s vrp. uspjeha $\frac{k}{n-1}$
nezavisne !!

baš kao u coupon's collector problemu (pag 2)



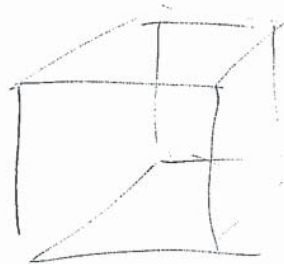
$$\frac{T_n}{n \log n} \xrightarrow{p} 1$$

Primer (slučajna šetnja na hiperkocki.)

$$S = \{0,1\}^d$$

X_n slučajna šetnja na S

- ostaje na mestu s vj. $\frac{1}{2}$
- prelazi u nek. od d susj. vrhova s vj. $\frac{1}{2d}$



Y_n - stacionarna verzija tj.

Y_0 kreće iz uniformne raspodjele

Neka su $U_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \dots & d \\ \frac{1}{d} & & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$, $V_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$X_n = (X_{n1}, \dots, X_{nd}) \quad X_{ni} \in \{0,1\}$$

U n -tom koraku koordinate od X_n, Y_n na mestu U_n postavimo na V_n

→ dobijemo spaniranje / coupling lanaca (X_n) i (Y_n)

$$T_d = \inf \{m: \{U_1, \dots, U_m\} = \{1, 2, \dots, d\}\} \leftarrow$$

$$\text{Za } n \geq T_d, \quad X_n = Y_n$$

ponovo
coupon's
collector
problem

⇒ ponovo

$$\frac{T_d}{d \log d} \rightarrow 1$$

OPĆENITI PROSTOR STANJA

Prebrojiv prostori često smo tretirali
konisteći jednu točku x koju M .
lanac pogada s vjeroj. 1

Za tzv. Harrisove lance takva točka
se može dodati na umjetan način
i na neprebrojivom skupu stanja.

Ova klasa uključuje mnoge važne
primjere.

-

Def Mark. lanac (X_n) je Harrisov ako
postoje $A, B \in \mathcal{S}$ i funkcija g
t.d. $g(x, y) \geq \varepsilon > 0 \quad \forall x \in A, y \in B$
i γ . mjera γ na B t.d.

i) $T_A = \inf \{n \geq 0 : X_n \in A\}$ zadovolj. $\mathbb{P}_z(T_A < \infty) > 0$
 $\forall z \in S$

ii) $x \in A, C \subseteq B$

$$p(x, C) \geq \int_C g(x, y) \gamma(dy)$$

Primer (prebrojiv S)

- Ako postoji a t.d. $\{x \mid x > a\} \neq \emptyset$

Možemo postaviti $A = \{a\}$

$B = \{b\}$ gdje b izaberemo takav da

$$p(a, b) > 0, \text{ a } \xi = \delta_b, \text{ te}$$

$$q(a, b) = p(a, b)$$

- Ako vrijede i) ii) u prebrojivom S
A i B uvijek možemo izabrati jednoclane

Primer (neprekidne gustoće)

Ako $\exists$ neprekidna f.k.a $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$
t.d.

$$p(x, dy) = p(x, y) dy$$

nađemo (x_0, y_0) t.d.

$$p(x, y) > 0$$

$\forall x \in A \leftarrow$ kugla oko x_0
 $\forall y \in B \leftarrow$ kugla oko y_0

i) za neki $\varepsilon > 0$

$$p(x, y) > \varepsilon \quad \forall (x, y) \in A \times B$$

Neka
$$\xi(C) = \frac{\lambda(B \cap C)}{\lambda(B)}$$

$\Rightarrow$ ii) odmah vrijedi $\Rightarrow$ ako
možemo pokazati i) lako je Hammetov

Primer (G/G/1)

$$\{i\} \text{ n.j.d.} \quad W_n = (W_{n-1} + f_n)_+$$

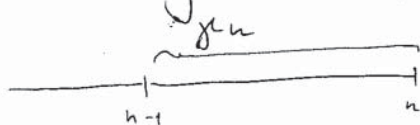
Ako $P(f_n < 0) > 0$, za

$$A = B = \{0\} \text{ vrijede i) i ii)}$$

η_n = vrijeme posluživanja n tog klijenta

f_n = vrijeme između dolazaka $n-1.$ i $n.$ klijenta

W_n = vrijeme čekanja n tog klijenta



$$f_n = \eta_{n-1} - f_n$$

-

• Dooblin je prvi postavio uvjet:

$$\exists n \text{ t.d.} \quad P^n(x, C) \geq \varepsilon \nu(C) \quad \forall x \in S \\ \forall C \in \mathcal{S}$$

• Harris ga je generalizirao traživši da

- $\exists A$ koji zadovoljava i), te

$$y_k = X(T_A^k)$$

$$T_A^k = \inf \{n > T_A^{k-1} : X_n \in A\}$$

$$T_A^0 = 0$$

zadovoljava

Dooblinov uvjet

Za Harrisov lanac na $(S, \mathcal{E})$ konstruiramo lanac na $(\bar{S}, \bar{\mathcal{E}})$ gdje

$$\bar{S} = S \cup \{\alpha\}$$

$$\bar{\mathcal{E}} = \{B, B \cup \{\alpha\} : B \in \mathcal{E}\}$$

t.d. lanac posjeti α s vjeroj. 1 u poratnom slučaju

$$\begin{aligned} \bar{p}(x, C) &= p(x, C) && \underline{x \in S \setminus A} \\ &= \bar{p}(x, \{\alpha\}) = \varepsilon && \underline{x \in A} \\ \bar{p}(x, C) &= p(x, C) - \varepsilon \varrho(C) && C \in \mathcal{E} \\ &= \int \varrho(dx) \bar{p}(x, D) && D \in \bar{\mathcal{E}}, \underline{x = \alpha} \end{aligned}$$

Intuitivno: kod posjeti A lanac

- ili ode u α s.vj. ε
- ili nastavi po $p(x, C) - \varepsilon \varrho(C)$ s.vj. $1 - \varepsilon$

kod posjeti α lanac

- izabere točku u B s razdiobom ϱ
- iz $y \in B$ nastavi kao gore

kod $y \in S \setminus A$

- prati tranzicijsku vjeroj. orig. lanca

Neka je v tranz. vjerojatnost t.d.

$$v(x, \{x\}) = 1 \quad x \in S$$

$$v(\alpha, C) = \{C\}$$

LEMA 25

$$v\bar{p} = \bar{p} \quad ; \quad \bar{p}v = p$$

LEMA 26

Ako je Y_n nehomog. M. lanac t.d.

$$p_{2k} = v, \quad p_{2k+1} = \bar{p} \quad \Rightarrow \quad \bar{X}_{2n} = Y_{2n} \text{ je M. lanac}$$

s pnj. vjeroj. $\bar{p}$, $X_n = Y_{2n+1}$ je M. lanac
s pnj. vjeroj. p .

LEMA 27

Ako je μ vjeroj. na $(S, \mathcal{S}) \Rightarrow$

$$E_{\mu} f(X_n) = E_{\mu} \bar{f}(\bar{X}_n)$$

gdje za ogr. izmjenivu f na S , $\bar{f} = v f$

$$\begin{aligned} \text{tj.} \quad \bar{f}(x) &= f(x) & x \in S \\ &= \int f d\xi & x = \alpha \end{aligned}$$

$\Downarrow$ razumjeti $(\bar{X}_n)$ je dovoljno za razumjeti
ponašanje od (X_n)

POVRATNOST I PROLAZNOST

$$R = \inf \{n \geq 1 : \bar{X}_n = \alpha\} = R_1$$

$$R_k = \inf \{n > R_{k-1} : \bar{X}_n = \alpha\}$$

Ako $P_\alpha(R < \infty)$ kažemo da je lanac povratan, inače je prolazan

$$12 \quad P_\alpha(R_k < \infty) = P_\alpha(R < \infty)^k$$

$$\Rightarrow \quad P_\alpha(\bar{X}_n = \alpha \text{ b.c.}) = \begin{cases} 1 & \text{u povratnom} \\ 0 & \text{u prolaznom} \\ & \text{slučaju} \end{cases}$$

$$\bar{X}_n \text{ je povratan ako } \sum_{n=1}^{\infty} \bar{p}^n(\alpha, \alpha) = \infty$$

TEOREM 28

Neka je $\lambda'(C) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{2^n} \bar{p}^n(\alpha, C)$, u povratnom slučaju

$$\lambda'(C) > 0 \Rightarrow P_\alpha(\bar{X}_n \in C \text{ b.c.}) = 1$$

$$2a \quad \lambda' \text{ -gotovo sve } x \quad P_x(R < \infty) = 1$$

Može se (i treba) pokazati da povrtnost
za (X_n) ne ovisi o izboru skupa
 A, B i mjere μ i) & ii)

Primjer (G/G/1)

$$S_n = X_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n = W_n \quad \text{za } n \in \mathbb{N}$$

$$N = \inf \{n : S_n < 0\}$$

$$\text{a) } W_N = 0$$

Kao i u M/G/1 modelu $\Rightarrow$

G/G/1 je pozitivan za $\mu = E\xi_i \leq 0$
prolazan za $\mu = E\xi_i > 0$

STACIONARNE MJERE

TEOREM 2.9

U pozitivnom slučaju postoji stacionarna
mjera i to

$$\bar{\mu}(C) = E_\alpha \left(\sum_{n=0}^{R-1} 1_{\{\bar{X}_n \in C\}} \right) \quad C \in \mathcal{S}$$

$$R = \inf \{n \geq 1 : \bar{X}_n = \alpha\}$$

$\Rightarrow$ G/G/1 ima stac. mjeru
ako $\mu \leq 0$

TEOREM 30

U povratnom slučaju, ako je ν
 π -končna stacionarna mjera, tada
 $\nu = \bar{\nu}(\alpha) \cdot \mu$ za μ iz teorema 29.

KONVERGENCIJA

Markovljev lanac koji je povratan
nazivamo aperiodičnim ako je

$$\text{n.z.d. } \{n \geq 1 : \bar{p}^n(\alpha, \alpha) > 0\} = 1$$

TEOREM 31

Ako je (X_n) aperiodičan povratan
Markovljev lanac sa stacionarnom razdiobom
 π , za x t.d. $P_x(R < \infty) = 1 \Rightarrow$

$$\|p^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

NAP tm 28 $\Rightarrow$ konvergencija vrijedi za
 π -gotovo sve x .

Prinyer (GI/G/1)

$$W_n = (W_{n-1} + \xi_n)_+ \quad \xi_n \text{ njd}$$

$E \xi_n < 0$ podcenjuje se

- (W_n) ima stacionarnu razdobi

$$W_n \xrightarrow{d} M = \max(0, \xi_1, \xi_1 + \xi_2, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \dots)$$

- Za Laplaceov transformaciju od M vrijedi ako

$$\xi_n = \eta_{n-1} - \gamma_n$$

$$P(\gamma_n > x) = e^{-\alpha x}$$

Polaczek-Hinčin formula

$$E e^{-sM} = \frac{(1 + \alpha \cdot E\eta) \cdot s}{s - \alpha + \alpha B(s)}$$

gdje $B(s) = E e^{-s\eta}$

7. za općenite service times
& Poisson arrival.

VII ERGODSKI TEOREMI

J.2.V.B $\Rightarrow X_i$ njd, $E|f(X_i)| < \infty \Rightarrow$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(X_i) \xrightarrow{\text{J.S.}} \mu = Ef(X_0)$$

Postavlja se pitanje možemo li i za ne nužno nezavisne nizove dobiti istu/sličnu tvrdnju?

Ako da, za koje?

-----> odgovor za ergodske

DEF Niz sl. varijabli $(X_k)_{k \geq 0}$ je stacionaran ako

$$(X_0, \dots, X_n) \stackrel{d}{=} (X_k, \dots, X_{k+n}) \quad \forall n, \forall k \geq 0$$

Primjer

a) njd niz je jasno stacionaran

b) Ako je (X_n) M.lanac s prijelaznom vjerojatnosti $p(\cdot, \cdot)$ i stacionarnom razdiobom π tj.

$$\pi(A) = \int \pi(dx) p(x, A), \text{ te } X_0 \sim \pi$$

$\Rightarrow (X_n)_{n \geq 0}$ je stacionaran

c) rotacija na kružnici

$$\Omega = [0, 1), \quad \mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1)), \quad \mathbb{P} = \text{Leb. mjeru}$$

$$v \in (0, 1)$$

$$X_n(\omega) := (\omega + nv) \bmod 1$$

gdje: $x \bmod 1 = x - \lfloor x \rfloor$.

Preslikavanje

$$x \mapsto e^{2\pi i x}$$

će zaista X_n smjestiti na kružnicu u $\mathbb{C}$.

I to je M. lanac noćte

$$X_0 \sim \mathbb{P}, \quad \mathbb{P}(x, \{y\}) = \begin{cases} 1 & y = x + v \bmod 1 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

THEOREM 1

Ako je $(X_n)_{n \geq 0}$ stacionaran niz i $g: \mathbb{R}^{N_0} \rightarrow \mathbb{R}$ izmjeriva $\Rightarrow Y_k = g(X_k, X_{k+1}, \dots)$ je stacionaran niz

~~for~~ $x \in \mathbb{R}^{N_0}, \quad g_k(x) = g(x_k, x_{k+1}, \dots)$

$$A = \{ x = (g_0(x), g_1(x), \dots) \in B \} \quad B \in \mathcal{B}^{\mathbb{R}^{N_0}}$$

$$\mathbb{P}(\omega : (Y_0, Y_1, \dots) \in B) = \mathbb{P}(\omega : (X_0, X_1, \dots) \in A)$$

$$= \mathbb{P}(\omega : (X_k, X_{k+1}, \dots) \in A) = \mathbb{P}(\omega : (Y_k, Y_{k+1}, \dots) \in B)$$

□

Primjer (Bernoulli shift)

$\Omega = [0, 1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1))$, P - Leb. mjera

$$y_0(\omega) = \omega, \quad y_n(\omega) = 2y_{n-1}(\omega) \bmod 1 \quad n \geq 1$$

Ovo je stac. niz po tm-u 1. Zaista

$$X_i \stackrel{\text{w.d.}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \frac{1}{2^{i+1}} \Rightarrow (y_n)_{n \geq 0} \stackrel{d}{=} (g(X_n, X_{n+1}, \dots))_{n \geq 0}$$

Ovo je stac. niz i kao Mark. lanac

$$y_0 \sim P, \quad P(x, \{y\}) = \begin{cases} 1 & y = 2x \bmod 1 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

DEF Na vj. prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, za preslikavanje φ kažemo da čuva mjeru ako $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega$ i

$$P(\varphi^{-1}A) = P(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Neka $X_n(\omega) = X(\varphi^n(\omega)) \quad \varphi^0 \equiv \text{id}.$

$\Rightarrow (X_n)$ je stacionaran niz

$$B \in \mathcal{B}^{k+1}, \quad A = \{\omega : (X_0, \dots, X_k) \in B\}$$

$$\begin{aligned} P((X_k, \dots, X_{k+n}) \in B) &= P(\varphi^k \omega \in A) = P(\omega \in A) \\ &= P((X_0, \dots, X_k) \in B) \end{aligned}$$

Zadnji prijelaz je ujedno i jedini.

Ako je $(Y_n)_{n \geq 0}$ stac. niz u zgodnom prostoru S , Kolmogorov tm. o proširenju pokazuje postoji $\mathbb{P}$ na $(S^{N_0}, \mathcal{S}^{N_0})$ t.d.

$$X_n(\omega) = \omega_n \quad \text{i} \quad (X_n)_{n \geq 0} \stackrel{d}{=} (Y_n)_{n \geq 0}$$

Ako je ℓ pomak tj. $\ell(\omega_0, \omega_1, \dots) = (\omega_1, \omega_2, \dots)$

$$X_n(\omega) = \omega_n = X(\ell^n \omega) \quad \text{gdje} \quad X(\omega) = X_0$$

te ℓ čuva mjeru $\mathbb{P}$.

TEOREM 2

Svaki stac. niz $(X_n)_{n \geq 0}$ može se proširiti na dvostrani stacionaran niz $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

prim. ponovo Kolmog. teorem o proširenju (trivijalno proširen).

U nastavku

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vj. prostor

φ

preslik. koje čuva $\mathbb{P}$

$X_n(\omega) = X(\varphi^n \omega)$ gdje je X slučaj. varijabla

DEF

Skup $A \in \mathcal{F}$ je invariantan (gotovo)

ako

$$\mathbb{P}(A \Delta \varphi^{-1}A) = 0$$

strogo invariantan ako

$$A = \varphi^{-1}(A)$$

$\mathcal{I}$ = klasa svih invariantnih događaja

$\rightarrow \mathcal{I}$ je σ -algebra, a

$X \in \mathcal{I}$ ako $X \circ \varphi = X$ g.s.

DEF Preslikavanje φ koje čuva mjeru na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je ergodsko ako je

$$A \in \mathcal{I} \Rightarrow \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$$

$\hookrightarrow \mathcal{I}$ je trivijalna.

U suprotnom $\exists A, \mathbb{P}(A) \in (0, 1)$ t.d.

$\varphi(A) = A$ & $\varphi(A^c) = A^c \Leftrightarrow \varphi$ nije irreducibilno.

Primjer

a) njd niz

$$\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}, \quad \varphi = \text{pomak}$$

$$A \in \mathcal{I} \Rightarrow A = \varphi^{-1}A = \{\omega : \varphi(\omega) \in A\} \in \sigma(X_1, X_2, \dots)$$

$$\dots \rightarrow A \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) \forall n \Rightarrow A \in \mathcal{I}$$

$$\Rightarrow \mathcal{I} \subseteq \mathcal{I} \text{ je } \sigma\text{-algebra}$$

$$\text{Kolmog. zakon 0-1} \Rightarrow \mathcal{I} \text{ trivijalna}$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ ergodsko}$$

$$\rightarrow \text{niz } (X_n) \text{ je ergodski.}$$

b) M. lanac na prubr. skupu S

Neka (X_n) ima stac. razdiobu π

$$\pi(x) > 0 \quad \forall x \in S \Rightarrow \text{sva su stanja porratna} \\ (\text{tm 18 pag VII})$$

$$\text{tm 13 pag VII} \Rightarrow$$

$$S = \bigcup R_i, \quad R_i \text{ zatvoreni i ireducibilni}$$

$$\text{Ako } X_0 \in R_i \Rightarrow X_n \in R_i \text{ za sve } n$$

$$\Rightarrow \text{Ako M. lanac nije ireducibilan nije} \\ \text{niti ergodski.}$$

c) rotacija na kružnici

Ako je $v = \frac{m}{n}$ $m, n \in \mathbb{N}$

(X_n) nije ergodski (dž.), a ako je iracionalan je (dž.).

d) Bernoulli shift

$$Y_n = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-(m+1)} X_{n+m}$$

$$X_i \sim \text{i.i.d.} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

je ergodski po

TEOREM 3

Ako je $g: \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} \rightarrow \mathbb{R}$ izmjenjeno,
 $(X_n)_{n \geq 0}$ ergodski stac. niz $\Rightarrow Y_k = g(X_k, X_{k+1}, \dots)$
je također.

BIRKHOFFOV ERGODSKI TEOREM

Neka φ čuva mjeru na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

TEOREM 4 (ergodski teorem)

Za sve $X \in L_1$

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} X(\varphi^m \omega) \rightarrow E(X|D) \quad \text{g.s. i u } L_1.$$

Primjer

a) njez. niz, φ je dvi. $\Rightarrow$

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} X_m \rightarrow EX_0 \quad \text{g.s. i u } L^1$$

b) Mark. lanac, reducibilan i stacionaran,

neka
$$\sum_x |\varphi(x)| \mathbb{P}(x) < \infty$$

pretp. S je prebrojiv $\Rightarrow \varphi$ je dvi. $\Rightarrow$

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} f(X_m) \rightarrow \sum f(x) \mathbb{P}(x) = E_{\mathbb{P}} f(X_0)$$

c) rotacija na kružnici

$$\Omega = [0, 1), \varphi(\omega) = (\omega + \vartheta) \bmod 1, \vartheta \text{ iracion.}$$

$$X(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \mathbb{1}(\varphi^m \omega \in A) \rightarrow |A| \quad \text{g.s.}$$

(cf. Weylov teorem)

d) Bernoulli shift

$$\Omega = [0, 1) \quad \varphi(\omega) = 2\omega \bmod 1$$

$i_1, \dots, i_k \in \{0, 1\}$ proizvoljni

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega_1 = i_1, \dots, \omega_k = i_k \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} X(\varphi^m \omega) \rightarrow 2^{-k} \quad \text{g.s.}$$

(c.f. Borel's theorem
o normalni
brojeva)

SUBADITIVNI ERGODSKI TEOREM

TEOREM 5 Neka $X_{m,n}, n \in \mathbb{N}, m=0, \dots, n-1$

zadovoljavaju

i) $X_{0,m} + X_{m,n} \geq X_{0,n}$

ii) $(X_{nk, (n+1)k})_{n \geq 1}$ je stac. niz za sve k

iii) razdioba od $(X_{m, m+k})_{k \geq 1}$ ne ovisi o m

iv) $EX_{0,1}^+ < \infty$ & $\forall n \quad EX_{0,n} \geq \mu_0 n$ gdje $\mu_0 > -\infty$

Tada

a) $\lim_n \frac{EX_{0,n}}{n} = \inf \frac{EX_{0,n}}{n} =: \mu$

b) $\exists \quad \lim_n \frac{X_{0,n}}{n} = X \quad \text{g.s. i u } L_1$

2 $EX = \mu$

c) ako su stacionarni nizovi u i) i ergodski.

$$X = \mu \quad \text{g.s.}$$

Primjer

a) stac. nizovi : (ξ_k) stac. niz, $E|\xi_k| < \infty$

$$X_{m,n} = \xi_{m+1} + \dots + \xi_n$$

$$X_{0,n} = X_{0,m} + X_{m,n} \Rightarrow \text{iv)}$$

b) raspon sluc. šetnje : ξ_i kao gore, $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$

$$X_{m,n} = |\{S_{m+1}, \dots, S_n\}|$$

$$\text{tm } S \text{ u oba slučaja} \Leftrightarrow X_{0,n}/n \xrightarrow{\text{g.s./L}_1} X \quad (\text{no ne znamo } X!)$$

c) najdulji zajednički niz : ako su $(X_i)_{i=1}^n, (Y_i)_{i=1}^n$ ergodski stac. nizovi u S

$$L_{m,n} = \max \left\{ K : X_{i_k} = Y_{j_k} \text{ za neke } \begin{matrix} m < i_1 < \dots < i_K \leq n \\ m < j_1 < \dots < j_K \leq n \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Jasno i) $L_{0,m} + L_{m,n} \leq L_{0,n}$, iv) $0 \leq L_{0,n} \leq n$
 $\Rightarrow -L_{m,n}$ je subaditivan
 $\Rightarrow \frac{L_{0,n}}{n} \rightarrow \mu = \sup_{m \geq 1} E \frac{L_{0,m}}{m}$

NAP) Chvatal & Sankoff ('75) pokazali da
 n.j.d. Bernoulli X_n, Y_n $\mu \in (0.72, 0.86\dots)$

Prati smo u 4 koraka

1 korak

$$\bullet \quad i) \Rightarrow X_{0,n}^+ + X_{n,n}^+ \geq X_{0,n}^+$$

$$\Rightarrow X_{0,1}^+ + X_{1,2}^+ + \dots + X_{n-1,n}^+ \geq X_{0,n}^+ \Rightarrow^{ii)} EX_{0,n}^+ \leq n \cdot EX_{0,1}^+ \\ \nearrow \infty \text{ po iv)}$$

$$\bullet \quad |x| = 2x^+ - x \Rightarrow \text{ iz iv)}$$

$$E|X_{0,n}| \leq 2EX_{0,n}^+ - EX_{0,n} \leq C \cdot n < \infty$$

$$\bullet \quad a_n = EX_{0,n} \quad ; \text{ iii)} \Rightarrow a_m + a_{n-m} \geq a_n$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{n} \rightarrow \inf \frac{a_m}{m} \equiv \mu \quad (\text{liminf } \checkmark) \\ \Rightarrow a)$$

2 korak

$$\bullet \quad i) \Rightarrow X_{0,n} \leq X_{0,km} + X_{km,n} \\ \leq X_{0,m} + X_{m,2m} + \dots + X_{(k-1)m, km} + X_{km,n}$$

podijelimo s $n = km + \ell \Rightarrow$

$$\frac{X_{0,n}}{n} \leq \frac{k}{km + \ell} \underbrace{\frac{X_{0,m} + \dots + X_{(k-1)m, km}}{k}}_{\substack{\downarrow \text{ g.s. / } \mathcal{F}_m \text{ po tmu 4} \\ A_m = E(X_{0,m} | \mathcal{F}_m)}} + \frac{X_{km,n}}{n} \quad (*)$$

$$EA_m = EX_{0,m} \quad \uparrow \text{ shift inv. } \sigma\text{-algebra za } T_{0,1} \text{ i } 2$$

$$A_m = E(X_{0,m}) \quad \text{ ako su nizovi u ii) ergodski }$$

Za fiksni $\ell, \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} P(X_{km, km+\ell} > (km+\ell)\varepsilon) \\ = \sum_{k=1}^{\infty} P(X_{0, \ell} > (km+\ell)\varepsilon) < \infty \end{aligned} \quad (**)$$

jer. $EX_{0, \ell}^+ < \infty$
po koraku 1

(*) & (**) $\Rightarrow$

$$\bar{X} := \limsup \frac{X_{0, n}}{n} \leq \frac{A_m}{m} \quad (***)$$

$$\Rightarrow E\bar{X} \leq \frac{EX_{0, m}}{m} \leq \mu$$

(ako su nizovi u ii) ergodski) $\Rightarrow \bar{X} \leq \mu$

3 korak 1

$$\underline{X} := \liminf \frac{X_{0, n}}{n}$$

Pokazuje se $E\underline{X} \geq \mu$. Naime, ako je tako

Kako $-\infty < \mu \leq \mu \leq EX_{0, 1} < \infty$, a

$$E\bar{X} \leq \mu \Rightarrow \underline{X} = \bar{X} \text{ tj. } \exists \text{ g.s. } \lim \frac{X_{0, n}}{n}$$

naime

$$\underline{X} \leq \bar{X} \\ \mu = E\underline{X} = E\bar{X} \in (-\infty, \infty) \Rightarrow \bar{X} = \underline{X} \text{ g.s.}$$

(za dokaz $E\underline{X} \geq \mu$ v. knjiga)

4. korak

Ostalo je pokazati L_1 konvergenciju
prisjetimo se (***) $\Rightarrow$

$$\bar{X} \leq \frac{A_m}{m} =: \Gamma_m, \quad E\Gamma_m = \frac{EX_{0,m}}{m}$$

Neka $\Gamma = \inf \Gamma_m, \quad |z| = z^+ - z^- \Rightarrow$

$$\begin{aligned} E|X_{0,n}/n - \Gamma| &= 2E(X_{0,n}/n - \Gamma)^+ - E(X_{0,n}/n - \Gamma) \leq \\ &\leq 2E(X_{0,n}/n - \Gamma)^+ \end{aligned}$$

Kako $EX_{0,n}/n \geq \mu = \inf \Gamma_m \geq E\Gamma \Rightarrow$
 $\quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad \text{po def. od } \mu$

$$\begin{aligned} E(X_{0,n}/n - \Gamma)^+ &\leq E(X_{0,n}/n - \Gamma_m)^+ + E(\Gamma_m - \Gamma)^+ \\ &\quad \quad \quad \parallel \\ &\quad \quad \quad E(\Gamma_m - \Gamma) \text{ jer } \Gamma_m > \Gamma \end{aligned}$$

No $E\Gamma_m \rightarrow \mu, \quad m \rightarrow \infty$ po a)

koraci 23 $\Rightarrow E\Gamma \geq E\bar{X} \geq E\underline{X} \geq \mu \Rightarrow E\Gamma = \mu$
 $\Rightarrow E(\Gamma_m - \Gamma) \rightarrow 0$

Ograničimo i 2. približnik

$$\begin{aligned} E(X_{0,n}/n - \Gamma_m)^+ &\leq E\left(\frac{X_{0,m} + \dots + X_{(k-1)m, k_m}}{km + l} - \Gamma_m\right)^+ \\ &\quad + E\left(\frac{X_{km, n}}{n}\right)^+ = \frac{E_{0,l}^+}{n} \rightarrow 0_{n \rightarrow \infty} \end{aligned}$$

Uocite još $y^+ \leq |y|$

$$E \left| \frac{X_{0,m} + \dots + X_{k+m, k+m}}{m \cdot k} - \Gamma_m \right| \rightarrow 0$$

greška u D.

Po ergodskom
teoremu



VIII BROWNOVO GIBANJE

- Brown (1828)
- Bachelier (1900)
- Wiener (početak 20og stoljeća)

DEF Sluč. proces $(B_t)_{t \geq 0}$ s vrijednostima u $\mathbb{R}$ zovemo Brownovim gibanjem ako vrijedi:

- $t_0 < t_1 < \dots < t_n \Rightarrow B(t_0), B(t_1) - B(t_0), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ su nezavisne
- $s, t \geq 0 \quad P(B(s+t) - B(s) \in A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx$
- put $t \mapsto B(t)$ je neprekidan g.s.

Iz def. slijedi:

- $(B_t - B_0)_{t \geq 0}$ je nez. proces od B_0 i ima istu razd. kao B. gibanje t.d. $B_0 = 0$ (invarijantnost na translacije)
- Ako $B_0 = 0$, tada $\forall t \geq 0$
$$(B_{st})_{s \geq 0} = (\sqrt{t} B_s)_{s \geq 0}$$
- B. gibanje je sebi sličan (selfsimilar) proces, s indeksom skaliranja $1/2$.

DEF: Brownovo gibanje koje kreće iz 0, tj. slučajni proces $(B_t)_{t \geq 0}$ t.d. $B_0 = 0$

a) (B_t) je gaussovski proces

b) $EB_s = 0$, $EB_s B_t = s \wedge t$

c) $t \mapsto B_t$ je neprežidani put g.s.

Q: Postoji li takav proces?

Porcijatan odgovor daje Kolmogorovljev teorem o proširenju.

THEOREM 1 Na skupu svih realnih funkcija na $[0, \infty)$ $\Omega_0 = \{ \omega : \omega : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \}$

pripadnoj σ -algebri $\mathcal{F}_0$ generiranoj cilindrima

$\{ \omega : \omega(t_i) \in A_i, i=1, \dots, n \}$, $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ postoji

jedinstvena vjerojatnost ν_x t.d.

$$\nu_x(\omega : \omega(0) = x) = 1$$

$$\nu_x(\omega : \omega(t_i) \in A_i) = \mathbb{P}(B_{t_1} \in A_1, \dots, B_{t_n} \in A_n) \quad \forall t_1 < \dots < t_n, A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

gdj. su sl. var. $B_0, B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ nez.

$$B_0 = x, \text{ a } B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \sim N(0, t_k - t_{k-1})$$

Problem :

$$C = \{\omega : t \mapsto \omega(t) \text{ neprek} \} \notin \mathcal{F}_0$$

$\Rightarrow$ Pitbanje $\nu_x(C) = 1$ ili ne nema smisla

Rješenje:

- iskombiti Kolm. teorom da se definiira proces indeksiran na $\Omega_2 = \{m/2^n : m, n \geq 0\}$
- pokazati da je g.s. uniformno neprekidan na konačnim intervalima.
- proširiti proces na skup indeksa $[0, \infty)$ t.d. se dobije mjera na $(C, \mathcal{C})$ gdje je $\mathcal{C}$ ponovo generirana σ -algebra.

Može se pokazati da su putovi B-gibanja lokalno Hölder neprekidni s eksponentom $\frac{1}{2}$, ali nisu Lipschitz neprekidni niti u jednoj točki g.s. $\Rightarrow$ nisu niti diferencijabilni niti u jednoj točki.

VARIJACNA PUTEVA

Ako f na $t \mapsto f(t)$ ima ograničenu varijaciju na segmentu I onda joj i derivacija postoji gotovo svuda na I

$\Rightarrow$ B.g. ima g.s. putove beskonačne varijacije na svakom konačnom intervalu

Ali su mu zato kvadratne varijacije vrlo pravilne

Neka
$$\Delta_{m,n} = B(t^{m/2^n}) - B(t^{(m-1)/2^n})$$

$\Downarrow$

$$\sum_{m \leq 2^n} \Delta_{m,n}^2 \xrightarrow{\text{g.s.}} t$$

(JAKO) MARKOVJEVO SKOLSTVO

$$\mathcal{F}_s^o = \sigma(B_r : r \leq s) \quad \begin{array}{l} \text{sadrži inform. o} \\ \text{B. gibanju do} \\ \text{časa } s \end{array}$$

no zgodnije su

$$\mathcal{F}_s^+ = \bigcap_{t > s} \mathcal{F}_t^o \quad \begin{array}{l} \text{koje su} \quad \text{zdesna} \\ \quad \quad \quad \text{nepredvidne} \\ \text{(dovoljavaju "infinitesimalan} \\ \text{pogled u budućnost") } \end{array}$$

Na $(C, \mathcal{C})$ imamo familiju vjeroj. P_x t.d.
 $B_t(\omega) = \omega(t)$ je B. gibanje koje kreće iz x .

Opet definiramo pomak $\mathcal{U}_s : C \rightarrow C$

$$(\mathcal{U}_s \omega)(t) = \omega(s+t) \quad t \geq 0$$

Ako je Y ograničena, $\mathcal{C}$ razmjerna, a $s \geq 0$

$$\left| E_x(Y \circ \mathcal{U}_s \mid \mathcal{F}_s^+) = E_{B_s} Y \quad \forall x \in \mathbb{R} \right.$$

MARKOVJEVO SKOLSTVO

Kako je d.s. $\in \mathcal{F}_s^o \Rightarrow$

$$E_x(Y \circ \mathcal{U}_s \mid \mathcal{F}_s^+) = E_x(Y \circ \mathcal{U}_s \mid \mathcal{F}_s^o)$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow E_x(Y \mid \mathcal{F}_s^+) = E_x(Y \mid \mathcal{F}_s^o)$$

Posebno ako je $Z \in \mathcal{F}_s^+$ izmjeniva

$Z = E_x(Z | \mathcal{F}_s^0)$ je $\mathcal{F}_s^0$ izmjeniva

Dakle σ -algebre $\mathcal{F}_s^0$ i $\mathcal{F}_s^+$ se razlikuju
ext. na skupovima mjere 0.

THEOREM 2 (BLUMENTHALOV ZAKON 0-1)

Ako $A \in \mathcal{F}_0^+$ $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad P_x(A) = \{0, 1\}$

~~Pr~~ $A \in \mathcal{F}_0^+ \Rightarrow$

No $\mathcal{F}_0^+ = \sigma(B_0)$ je invarij. pod $T_x \Rightarrow$

$$1_A = E_x(1_A | \mathcal{F}_0^+) = E_x(1_A | \mathcal{F}_0^0) = P_x(A) \quad P_x \text{ g.s.}$$

THEOREM 3

$$\tau = \inf \{ t \geq 0 : B_t > 0 \}, \quad P_0(\tau = 0) = 1.$$

THEOREM 4

$$T_0 = \inf \{ t > 0 : B_t = 0 \}, \quad P_0(T_0 = 0) = 1$$

$$Z_t \mathcal{F}_t' = \sigma(B_s : s \geq t) \quad ; \quad \mathcal{I} = \bigcap_{t \geq 0} \mathcal{F}_t' \quad \text{vrijedi.}$$

THEOREM 5

$$A \in \mathcal{I} \Rightarrow P_x(A) \neq 0 \text{ i.e. } 1$$

THEOREM 6

$$\limsup \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty \quad \liminf \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty \quad \text{g.s.}$$

DEF Sluč. varijabla S s vrijednostima u $[0, \infty]$ je zaustavno vrijeme ako je $\{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ za svaki $t \geq 0$.

Uočite mogli smo uvesti i $\{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ u definiciji jer

$$\text{ako } \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t \Rightarrow \{S < t\} = \bigcup_n \{S \leq t - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_t$$

$$\{S < t\} \in \mathcal{F}_t \Rightarrow \{S \leq t\} = \bigcap_n \{S < t + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_t$$

ako su $\mathcal{F}_t$ zdesna neprekidne

Uobičajene σ -algebre

$$\mathcal{N}_x = \{A : A \subset \mathcal{D} \text{ \& } P_x(\mathcal{D}) = 0\} \leftarrow \text{nul skupovi u odn. na } P_x$$

$$\mathcal{F}_s^x = \sigma\{\mathcal{F}_s^+ \cup \mathcal{N}_x\}$$

$\leftarrow$ potpunjenje σ -algebri za P_x

$$\mathcal{F}_s = \bigcap_x \mathcal{F}_s^x$$

$\leftarrow$ filtracija koja ne ovisi o poč. stanju

Definiramo :

$$(\mathcal{V}_S \omega)(t) = \begin{cases} \omega(S(\omega) + t) & \text{na } \{S < \infty\} \\ \Delta & \text{na } \{S = \infty\} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_S = \{A : A \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq 0\}$$

Ako je Y ograničena i td. $(s, \omega) \mapsto Y(s, \omega)$
 $B(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}$ izmjeniva, a S zaustavno vrijeme
 $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\left| E_x(Y_S \circ \mathcal{V}_S | \mathcal{F}_S) = E_{B(S)} Y_S \quad \text{na } \{S < \infty\} \right.$$

JAKO MARKOVJEVO SVOJSTVO

SKOROKHODOVA ULAGANJA

Cilj: za sluč. sekv. naci. zaustavna
vremena $T_0 = 0, T_1, T_2, \dots$ td.

$$B_{T_n} \stackrel{d}{=} S_n$$

bez obzira na radiodu koraka (koji imaju
očekiv. 0 i varijancu σ^2 po pretpostavci)

Dobit ćemo čak da su $(T_k - T_{k-1})$ njd
s očekivanjem σ^2

$$\mathcal{T} = \left\{ \text{zaustavna vremena za koja vrijedi} \right. \\ \left. E B_T = 0, E T = E B_T^2 \text{ i } E T^2 \leq 4 E B_T^4 \right\}$$

Sva ograničena zaustavna vremena
ulaze u klasu $\mathcal{T}$. (v. Billingsley str. 574)

TEOREM 7 Ako je X sl. varij. s očekiv. 0 i
varijancom $< \infty \Rightarrow \exists$ zaustavno vrijeme
 T td.

$$X \stackrel{d}{=} B_T, \quad E T = E X^2 \text{ i } E T^2 \leq 4 E X^4$$

TEOREM 8 Ako su $X_1, X_2, \dots$ njd. s očekiv. 0 i
varijancom $< \infty \Rightarrow \exists$ mon. rastuća zaustavna
vremena $T_1, T_2, \dots$

$$(S_1, \dots, S_n) \stackrel{d}{=} (B_{T_1}, \dots, B_{T_n}) \text{ te}$$

su $(T_k - T_{k-1})$ njd. i

$$E(T_k - T_{k-1}) = E X_1^2 \\ E(T_k - T_{k-1})^2 \leq 4 E X_1^4$$

□

Klasično je

$$Y_n(t) = \frac{1}{\sqrt{tn}} \int_0^{t \wedge n} L_t \, dW_t$$

$$t \in [0, 1]$$

$$X_i \stackrel{\text{njed.}}{\sim}, EX_i = 0, \text{Var } X_i = 1$$

TEOREM 9

Ako (X_i) imaju konačan 4-ti moment, tada postoje procesi $(B_n)_{t \in [0, 1]}$ i $(Z_n(t))_{t \in [0, 1]}$ to. je prvi od njih B-gibanje, a drugi ima iste kon. dim. razdiobe kao $(Y_n^{(t)})_{t \in [0, 1]}$ te vrijedi:

$$P(\|Z_n - W_n\|_\infty \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$