

Prvi kolokvij iz Diferencijalnog računa

1. a) [3 bod] Nadopunite sljedeću definiciju:
Za funkciju $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je injekcija, ako za svaka dva elementa $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$ vrijedi _____.
- b) [5 bod] Navedite primjer jedne funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, koja nije injekcija.
- c) [2 bod] Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ injekcija, takva da jednadžba $f(x) = 5$ ima rješenje. Koliki je maksimalni broj međusobno različitih rješenja ove jednadžbe?
2. Zadan je skup $S = \left\{ \frac{2n+1}{n+4} : n \in \mathbb{N} \right\}$.
a) [10 bod] Dokažite da je S omeđen. b) [10 bod] Dokažite da je $\sup S = 2$.
3. a) [5 bod] Nadopunite sljedeću definiciju:
Realni broj a je gomilište niza (a_n) ako svaka ε okolina broja a sadrži _____.
- b) [5 bod] Odredite skup svih gomilišta niza (a_n) , $a_n = 1 + \frac{2}{n} + \cos \frac{n\pi}{2}$.
4. Izračunajte limese sljedećih nizova:
a) [5 bod] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^4+5} - 3\sqrt{3n+1}}{n^2 - 6n + 6}$ b) [5 bod] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n^2+5} \sin n$
c) [5 bod] $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{7}{2}}(\sqrt{n^7+1} - \sqrt{n^7})$ d) [5 bod] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+2)! + (3n+3)!}{(3n+4)!}$
e) [5 bod] $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+4}{3n^2+1} \right)^{3n^2+5}$ f) [5 bod] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{14^n - 3 \cdot 5^n}{5 \cdot 14^n + 5^{n+1}}$
5. Izračunajte sljedeće limese:
a) [5 bod.] $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^3-8}$ b) [5 bod.] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(15x)}{\sin(-2x)}$ c) [5 bod.] $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2}{x-5}$
d) [5 bod.] $\lim_{x \rightarrow 0} (1+4x^2)^{\frac{5}{x^2}}$ e) [5 bod.] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{x}$.
6. [5 bod.] Primjenom Cauchyjeve definicije pokažite da je $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Prvi kolokvij iz Diferencijalnog računa

1. a) [3 bod] Nadopunite sljedeću definiciju:
Za funkciju $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je surjekcija, ako za svaki element $y \in \mathbb{R}$, _____ $x \in D$ takav da je _____.
b) [5 bod] Navedite primjer jedne funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, koja nije surjekcija.
c) [2 bod] Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijekcija. Koliki je maksimalni broj međusobno različitih rješenja jednadžbe $f(x) = 5$?
2. Zadan je skup $S = \left\{ \frac{2n-1}{n+2} : n \in \mathbb{N} \right\}$.
a) [10 bod] Dokažite da je S omeđen. b) [10 bod] Dokažite da je $\sup S = 2$.
3. a) [5 bod] Nadopunite sljedeću definiciju:
Realni broj a je _____ niza (a_n) ako _____ ε okolina broja a sadrži beskonačno mnogo članova niza.
b) [5 bod] Odredite skup svih gomilišta niza (a_n) , $a_n = 1 + \frac{2}{n} + \sin \frac{n\pi}{2}$.
4. Izračunajte limese sljedećih nizova:
a) [5 bod] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n^4 - 1} - 5\sqrt{2n^4 + 1}}{n^2 - 6n + 6}$ b) [5 bod] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n^2+5} \cos n$
c) [5 bod] $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{9}{2}} (\sqrt{n^9 + 1} - \sqrt{n^9})$ d) [5 bod] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(7n+2)! + (7n+3)!}{(7n+4)!}$
e) [5 bod] $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2 + 3}{5n^2 + 1} \right)^{2n^2+5}$ f) [5 bod] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{13^n - 3 \cdot 5^n}{5 \cdot 13^n + 5^{n+1}}$
5. Izračunajte sljedeće limese:
a) [5 bod.] $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^3-27}$ b) [5 bod.] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(-35x)}{\sin(-2x)}$ c) [5 bod.] $\lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{2}{x-9}$
d) [5 bod.] $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 9x^2)^{\frac{8}{x^2}}$ e) [5 bod.] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+11x)}{x}$.
6. [5 bod.] Primjenom Cauchyjeve definicije pokažite da je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.