

Prvi kolokvij iz Diferencijalnog računa

1. [10 bod] Zadane su funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ formulama $f(x) = x - 1$ te $g(x) = \frac{x-3}{x-2}$. Ispitajte je li funkcija $g \circ f$ injekcija na svom području definicije.
2. a) [3 bod] Nadopunite definiciju:

Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je periodična s periodom $T > 0$, ako vrijedi

b) [5 bod] Odredite temeljni period funkcije $f(x) = 3 \sin(3x + 2) + 2 \cos(2x + 3)$.
3. [10 bod] Pokažite da skup $S = \left\{ \frac{n+2}{n+4} : n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \right\}$ ima infimum i supremum.
4. [10 bod] U skupu realnih brojeva riješite jednadžbu $\frac{|x-1|}{|x-4| + |2x-3|} = 1$.
5. a) [2 bod] Navedite primjer niza realnih brojeva koji ima dva gomilišta.
 b) [2 bod] Navedite primjer niza realnih brojeva koji je omeđen, a nije konvergentan.
 c) [3 bod] Navedite primjer realne funkcije realne varijable koja nije definirana u nekoj točki, a ima limes u toj točki.
 d) [3 bod] Navedite primjer niza realnih brojeva koji ima jedno gomilište, a nije konvergentan.
 e) [2 bod] Navedite primjer niza realnih brojeva koji ima monoton podniz.
6. [10 bod] Odredite L takav da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n+1} = L$. Pokažite da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0(\varepsilon)$ takav da je

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{2n+3}{3n+1} - L \right| < \varepsilon.$$

Specijalno odredite $n_0(0.05)$.

7. Izračunajte limese sljedećih nizova:

a) [5 bod] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 2} \sin n!}{n+1}$

b) [5 bod] $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n + \sqrt{2n + \sqrt{2n} - \sqrt{2n}}}$

c) [5 bod] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}}{\sqrt{n+3}}$

d) [5 bod] $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 1}{3n^2 + 1} \right)^{\frac{2n^2 - 1}{n+1}}$

e) [10 bod] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{2a}{3n^2} \right) + \left(x + \frac{4a}{3n^2} \right) + \cdots + \left(x + \frac{(2n-2)a}{3n^2} \right) \right],$

gdje se suma unutar uglatih zagrada sastoji od n pribrojnika.

8. [10 bod] Primjenom Heineove definicije pokažite da postoji $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Prvi kolokvij iz Diferencijalnog računa

1. [10 bod] Zadane su funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ formulama $f(x) = x - 1$ te $g(x) = \frac{x-2}{x-3}$. Ispitajte je li funkcija $g \circ f$ injekcija na svom području definicije.
2. a) [3 bod] Nadopunite definiciju:
 Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je periodična s periodom $T > 0$, ako vrijedi

 b) [5 bod] Odredite temeljni period funkcije $f(x) = 3 \cos(2x + 3) + 2 \sin(3x + 2)$.
3. [10 bod] Pokažite da skup $S = \left\{ \frac{n+5}{n-1} : n \in \mathbb{N}, n \geq 5 \right\}$ ima infimum i supremum.
4. [10 bod] U skupu realnih brojeva riješite jednadžbu $\frac{|x-2|}{|x-5| + |2x-8|} = 1$.
5. a) [2 bod] Navedite primjer Cauchyjevog niza realnih brojeva.
 b) [2 bod] Navedite primjer niza realnih brojeva koji je monotono rastući, a nije konvergentan.
 c) [3 bod] Navedite primjer realne funkcije realne varijable koja je definirana u nekoj točki, a nema limes u toj točki.
 d) [3 bod] Navedite primjer niza realnih brojeva koji ima jedno gomilište, a nije konvergentan.
 e) [2 bod] Navedite primjer niza realnih brojeva koji ima monoton podniz.
6. [10 bod] Odredite L takav da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{4n+1} = L$. Pokažite da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0(\varepsilon)$ takav da je

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{3n+2}{4n+1} - L \right| < \varepsilon.$$

Specijalno odredite $n_0(0.05)$.

7. Izračunajte limese sljedećih nizova:

a) [5 bod] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{n^4 + 5} \cos n!}{n^2 + 3}$

b) [5 bod] $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3n + \sqrt{3n + \sqrt{3n} - \sqrt{3n}}}$

c) [5 bod] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\sqrt{3n + \sqrt{3n + \sqrt{3n + \sqrt{3n}}}}}}{\sqrt{3n + 2}}$

d) [5 bod] $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3 + 1}{2n^3 - 1} \right)^{\frac{3n^3 + 1}{n - 1}}$

e) [10 bod] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(y + \frac{a}{2n^2} \right) + \left(y + \frac{3a}{2n^2} \right) + \cdots + \left(y + \frac{(2n-3)a}{2n^2} \right) \right],$

gdje se suma unutar uglatih zagrada sastoji od n pribrojnika.

8. [10 bod] Primjenom Heineove definicije pokažite da postoji $L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.