Vježbe 1

asistent: dr. sc. Ivan Soldo

Definicija:

Skup svih *racionalnih brojeva* označavamo s $\mathbb{Q}$ i definiramo s $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. Cijeli broj m može se reprezentirati razlomkom $\frac{m}{1}$, pa racionalni brojevi sadrže cijele, a ovi prirodne brojeve, tj. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Duljina dijagonale kvadrata stranice jedan ($d = \sqrt{2}$) govori nam da postoje brojevi koji nisu racionalni. To su *iracionalni brojevi*. Skup svih iracionalnih brojeva označavamo s $\mathbb{I}$.

Racionalne i iracionalne brojeve nazivamo zajedno *realni brojevi* i označavamo s $\mathbb{R}$. Dakle, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Osim toga je $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$ i $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

1. Dokažite da je kvadrat zbroja kvadrata dvaju cijelih brojeva također zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva.
2. Dokažite da je zbroj kubova triju uzastopnih cijelih brojeva djeljiv s 9.
3. Dokažite da je
$$\frac{x}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$$
cijeli broj za svaki $x \in \mathbb{Z}$.
4. Dokažite da je za sve prirodne brojeve $n > 1$ broj $n^4 + 4$ složen broj.
5. Odredite sve parove (a, b) cijelih brojeva takvih da je $a(a - b) = b$.

1. Dokažite da je kvadrat zbroja kvadrata dvaju cijelih brojeva također zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva.
2. Dokažite da je zbroj kubova triju uzastopnih cijelih brojeva djeljiv s 9.
3. Dokažite da je
$$\frac{x}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$
cijeli broj za svaki $x \in \mathbb{Z}$.
4. Dokažite da je za sve prirodne brojeve $n > 1$ broj $n^4 + 4$ složen broj.
5. Odredite sve parove (a, b) cijelih brojeva takvih da je $a(a - b) = b$.

1. Dokažite da je kvadrat zbroja kvadrata dvaju cijelih brojeva također zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva.
2. Dokažite da je zbroj kubova triju uzastopnih cijelih brojeva djeljiv s 9.
3. Dokažite da je
$$\frac{x}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$
cijeli broj za svaki $x \in \mathbb{Z}$.
4. Dokažite da je za sve prirodne brojeve $n > 1$ broj $n^4 + 4$ složen broj.
5. Odredite sve parove (a, b) cijelih brojeva takvih da je $a(a - b) = b$.

1. Dokažite da je kvadrat zbroja kvadrata dvaju cijelih brojeva također zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva.
2. Dokažite da je zbroj kubova triju uzastopnih cijelih brojeva djeljiv s 9.
3. Dokažite da je
$$\frac{x}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$$
cijeli broj za svaki $x \in \mathbb{Z}$.
4. Dokažite da je za sve prirodne brojeve $n > 1$ broj $n^4 + 4$ složen broj.
5. Odredite sve parove (a, b) cijelih brojeva takvih da je $a(a - b) = b$.

1. Dokažite da je kvadrat zbroja kvadrata dvaju cijelih brojeva također zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva.
2. Dokažite da je zbroj kubova triju uzastopnih cijelih brojeva djeljiv s 9.
3. Dokažite da je
$$\frac{x}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$
cijeli broj za svaki $x \in \mathbb{Z}$.
4. Dokažite da je za sve prirodne brojeve $n > 1$ broj $n^4 + 4$ složen broj.
5. Odredite sve parove (a, b) cijelih brojeva takvih da je $a(a - b) = b$.

6. Neka su a, b i $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ racionalni brojevi. Dokažite da su onda i $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$ također racionalni.
7. Dokažite da je zbroj racionalnog i iracionalnog broja iracionalan broj.
8. Ako su x, y prirodni brojevi takvi da je barem jedan od brojeva $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ iracionalan, dokažite da je onda i $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ iracionalan broj.
9. Dokažite da su brojevi
   a) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$,
   b) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$,

   racionalni, a da je broj $\log_2 3$ iracionalan.

6. Neka su a, b i $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ racionalni brojevi. Dokažite da su onda i $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$ također racionalni.
7. Dokažite da je zbroj racionalnog i iracionalnog broja iracionalan broj.
8. Ako su x, y prirodni brojevi takvi da je barem jedan od brojeva $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ iracionalan, dokažite da je onda i $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ iracionalan broj.
9. Dokažite da su brojevi

   a) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$,
   b) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$,

   racionalni, a da je broj $\log_2 3$ iracionalan.

6. Neka su a, b i $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ racionalni brojevi. Dokažite da su onda i $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$ također racionalni.
7. Dokažite da je zbroj racionalnog i iracionalnog broja iracionalan broj.
8. Ako su x, y prirodni brojevi takvi da je barem jedan od brojeva $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ iracionalan, dokažite da je onda i $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ iracionalan broj.
9. Dokažite da su brojevi

   a) $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$,
   b) $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$,

   racionalni, a da je broj $\log_2 3$ iracionalan.

6. Neka su a, b i $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ racionalni brojevi. Dokažite da su onda i $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$ također racionalni.
7. Dokažite da je zbroj racionalnog i iracionalnog broja iracionalan broj.
8. Ako su x, y prirodni brojevi takvi da je barem jedan od brojeva $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ iracionalan, dokažite da je onda i $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ iracionalan broj.
9. Dokažite da su brojevi

   a) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$,
   b) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$,

   racionalni, a da je broj $\log_2 3$ iracionalan.

10. Neka su a, b, c realni brojevi takvi da je $a+b+c=0$ i $a^2+b^2+c^2=1$. Koliko iznosi $a^4+b^4+c^4$.

11. a) Dokažite da za sve realne brojeve a, b, c za koje je

$$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$$

vrijedi $a=b=c$.

b) Ako je $a+b\geq 1$, dokažite da je $a^4+b^4\geq \frac{1}{8}$.

12. Dokažite da za sve realne brojeve a, b, c za koje je $a+b+c=0$ vrijedi

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{3}=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}.$$

10. Neka su a, b, c realni brojevi takvi da je $a + b + c = 0$ i $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Koliko iznosi $a^4 + b^4 + c^4$.
11. a) Dokažite da za sve realne brojeve a, b, c za koje je
$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$$
vrijedi $a = b = c$.
    b) Ako je $a + b \geq 1$, dokažite da je $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.
12. Dokažite da za sve realne brojeve a, b, c za koje je $a + b + c = 0$ vrijedi
$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} = \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}.$$

10. Neka su a, b, c realni brojevi takvi da je $a + b + c = 0$ i $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Koliko iznosi $a^4 + b^4 + c^4$.
11. a) Dokažite da za sve realne brojeve a, b, c za koje je
$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$$
vrijedi $a = b = c$.
    b) Ako je $a + b \geq 1$, dokažite da je $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.
12. Dokažite da za sve realne brojeve a, b, c za koje je $a + b + c = 0$ vrijedi
$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} = \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}.$$

Definicija:

Otvoreni interval realnih brojeva $\langle a, b\rangle$, određen s dva realna broja a, b, $a < b$, je skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $a < x < b$, tj.

$$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Zatvoreni interval ili *segment* realnih brojeva $[a, b]$, određen s dva realna broja a, b, $a \leq b$, je skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $a \leq x \leq b$, tj.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Definicija:

Pored otvorenih i zatvorenih intervala definiraju se *poluotvoreni intervali*

$$\langle a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \quad [a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

i *beskonačni intervali*

$$\langle -\infty, a\rangle = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \quad \langle -\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

$$\langle a, +\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \quad [a, +\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}.$$

13. Riješite nejednadžbu

$$\frac{6-2x}{1-2x} > \frac{4x-3}{2x-1}.$$

14. Riješite sustav nejednadžbi

a) $\frac{2}{5}x + 1 < \frac{2x-1}{2} < \frac{x^2+5}{x-2}$,

b) $\frac{3-2x}{3} < x + 2 \leq \frac{x^2+1}{x+1}$.

13. Riješite nejednadžbu

$$\frac{6-2x}{1-2x} > \frac{4x-3}{2x-1}.$$

14. Riješite sustav nejednadžbi

a) $\frac{2}{5}x + 1 < \frac{2x-1}{2} < \frac{x^2+5}{x-2}$,

b) $\frac{3-2x}{3} < x + 2 \leq \frac{x^2+1}{x+1}$.