Vježbe 2

Definicija 1.

Apsolutna vrijednost realnog broja x, u oznaci $|x|$ je broj

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Svojstva

1) $|-x| = |x|$
2) $x \leq |x|$
3) $|xy| = |x||y|$
4) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0$
5) $|x+y| \leq |x| + |y|$
6) $|x-y| \leq |x| + |y|$
7) $|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a$
8) $||x| - |y|| \leq |x-y|$

1. Dokažite da za sve $a, b, c \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leq |a| + |b| + |c|.$$

2. Dokažite da za sve $x, y \in \mathbb{R}$, $xy \geq 0$ vrijedi

$$\left|\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy}\right| + \left|\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy}\right| = |x| + |y|.$$

3. Neka su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $x^2 + y^2 = 1$. Dokažite da je tada $|x + y| \leq \sqrt{2}$.

4. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Dokažite da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$|x + x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \geq |x| - (|x_1| + \cdots + |x_n|).$$

1. Dokažite da za sve $a, b, c \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leq |a| + |b| + |c|.$$

2. Dokažite da za sve $x, y \in \mathbb{R}$, $xy \geq 0$ vrijedi
$$\left|\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy}\right| + \left|\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy}\right| = |x| + |y|.$$

3. Neka su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $x^2 + y^2 = 1$. Dokažite da je tada $|x + y| \leq \sqrt{2}$.

4. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Dokažite da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$|x + x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \geq |x| - (|x_1| + \cdots + |x_n|).$$

1. Dokažite da za sve $a, b, c \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leq |a| + |b| + |c|.$$

2. Dokažite da za sve $x, y \in \mathbb{R}$, $xy \geq 0$ vrijedi
$$\left|\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy}\right| + \left|\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy}\right| = |x| + |y|.$$

3. Neka su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $x^2 + y^2 = 1$. Dokažite da je tada $|x + y| \leq \sqrt{2}$.

4. Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Dokažite da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$|x + x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \geq |x| - (|x_1| + \cdots + |x_n|).$$

1. Dokažite da za sve $a, b, c \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leq |a| + |b| + |c|.$$

2. Dokažite da za sve $x, y \in \mathbb{R}$, $xy \geq 0$ vrijedi
$$\left|\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy}\right| + \left|\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy}\right| = |x| + |y|.$$

3. Neka su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $x^2 + y^2 = 1$. Dokažite da je tada $|x + y| \leq \sqrt{2}$.

4. Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Dokažite da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$|x + x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \geq |x| - (|x_1| + \cdots + |x_n|).$$

5. Dokažite da za $a \geq -1, a \neq 0$ vrijedi

$$\frac{4a^2 + a + 1}{4|a|} \geq \sqrt{a+1}.$$

6. Riješite jednadžbu
   a) $|x+1| - |x-3| = 2$,
   b) $|2 - |1 - |x-1||| = 0$.

7. Riješite nejednadžbu $|2x+3| + |x+3| \leq 2$.

5. Dokažite da za $a \geq -1, a \neq 0$ vrijedi

$$\frac{4a^2 + a + 1}{4|a|} \geq \sqrt{a+1}.$$

6. Riješite jednadžbu
   a) $|x+1| - |x-3| = 2$,
   b) $|2 - |1 - |x-1||| = 0$.

7. Riješite nejednadžbu $|2x+3| + |x+3| \leq 2$.

5. Dokažite da za $a \geq -1, a \neq 0$ vrijedi

$$\frac{4a^2 + a + 1}{4|a|} \geq \sqrt{a+1}.$$

6. Riješite jednadžbu
   a) $|x+1| - |x-3| = 2$,
   b) $|2 - |1 - |x-1||| = 0$.

7. Riješite nejednadžbu $|2x+3| + |x+3| \leq 2$.

5. Dokažite da za $a \geq -1, a \neq 0$ vrijedi

$$\frac{4a^2 + a + 1}{4|a|} \geq \sqrt{a+1}.$$

6. Riješite jednadžbu
   a) $|x+1| - |x-3| = 2,$
   b) $|2 - |1 - |x-1||| = 0.$

7. Riješite nejednadžbu $|2\,x + 3| + |x+3| \leq 2.$

8. U pravokutnom koordinatnom sustavu skicirajte skup

$$A = \{(x, y) : |x - 2| + |y + 1| = 5\}.$$

9. Skicirajte graf funkcije
   a) $f(x) = |2x - 5|$,
   b) $f(x) = |x^2 + 3x - 4|$.

8. U pravokutnom koordinatnom sustavu skicirajte skup

$$A = \{(x, y) : |x - 2| + |y + 1| = 5\}.$$

9. Skicirajte graf funkcije
   a) $f(x) = |2x - 5|$,
   b) $f(x) = |x^2 + 3x - 4|$.

8. U pravokutnom koordinatnom sustavu skicirajte skup

$$A = \{(x, y) : |x - 2| + |y + 1| = 5\}.$$

9. Skicirajte graf funkcije
    a) $f(x) = |2x - 5|$,
    b) $f(x) = |x^2 + 3x - 4|$.

Definicija 1.

Neprazni skup $S \subset \mathbb{R}$ je odozgo omeđen ako postoji realni broj $M \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leq M$ za svaki $x \in S$. Broj M s tim svojstvom zovemo majoranta skupa S.

Definicija 2.

Neprazni skup $S \subset \mathbb{R}$ je odozdo omeđen ako postoji realni broj $m \in \mathbb{R}$ takav da je $x \geq m$ za svaki $x \in S$. Broj m s tim svojstvom zovemo minoranta skupa S.

Definicija 3.

Neprazni skup $S \subset \mathbb{R}$ je omeđen ako je omeđen odozgo i odozdo.

Definicija 1.

Neprazni skup $S \subset \mathbb{R}$ je odozgo omeđen ako postoji realni broj $M \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leq M$ za svaki $x \in S$. Broj M s tim svojstvom zovemo majoranta skupa S.

Definicija 2.

Neprazni skup $S \subset \mathbb{R}$ je odozdo omeđen ako postoji realni broj $m \in \mathbb{R}$ takav da je $x \geq m$ za svaki $x \in S$. Broj m s tim svojstvom zovemo minoranta skupa S.

Definicija 3.

Neprazni skup $S \subset \mathbb{R}$ je omeđen ako je omeđen odozgo i odozdo.

Definicija 1.

Neprazni skup $S \subset \mathbb{R}$ je odozgo omeđen ako postoji realni broj $M \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leq M$ za svaki $x \in S$. Broj M s tim svojstvom zovemo majoranta skupa S.

Definicija 2.

Neprazni skup $S \subset \mathbb{R}$ je odozdo omeđen ako postoji realni broj $m \in \mathbb{R}$ takav da je $x \geq m$ za svaki $x \in S$. Broj m s tim svojstvom zovemo minoranta skupa S.

Definicija 3.

Neprazni skup $S \subset \mathbb{R}$ je omeđen ako je omeđen odozgo i odozdo.

Primjer 1. Ispitajte omeđenost sljedećih skupova:

i) $[2, +\infty\rangle$,

ii) $\langle -\infty, 3\rangle$,

iii) $[2, 3\rangle \cup \{5\}$,

iv) $\langle -\infty, 5\rangle \cup [12, 14]$,

v) $S = \left\{ \frac{2n}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Primjer 1. Ispitajte omeđenost sljedećih skupova:

i) $[2, +\infty\rangle$,

ii) $\langle -\infty, 3\rangle$,

iii) $[2, 3\rangle \cup \{5\}$,

iv) $\langle -\infty, 5\rangle \cup [12, 14]$,

v) $S = \left\{ \frac{2n}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Primjer 1. Ispitajte omeđenost sljedećih skupova:

i) $[2, +\infty\rangle$,

ii) $\langle -\infty, 3\rangle$,

iii) $[2, 3\rangle \cup \{5\}$,

iv) $\langle -\infty, 5\rangle \cup [12, 14]$,

v) $S = \left\{\frac{2n}{n+3} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Primjer 1. Ispitajte omeđenost sljedećih skupova:

i) $[2, +\infty\rangle$,

ii) $\langle -\infty, 3\rangle$,

iii) $[2, 3\rangle \cup \{5\}$,

iv) $\langle -\infty, 5\rangle \cup [12, 14]$,

v) $S = \left\{ \frac{2n}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Primjer 1. Ispitajte omeđenost sljedećih skupova:

i) $[2, +\infty\rangle$,

ii) $\langle -\infty, 3\rangle$,

iii) $[2, 3\rangle \cup \{5\}$,

iv) $\langle -\infty, 5\rangle \cup [12, 14]$,

v) $S = \left\{ \frac{2\,n}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Definicija 4.

Realni broj M nazivamo supremum skupa S ako ima sljedeća dva svojstva:

i) M je majoranta skupa S, tj. $x \leq M$ za svako $x \in S$;

ii) M je najmanja majoranta skupa S, tj. za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x_0 \in S$ takav da je $M - \varepsilon < x_0$.

Oznaka: $M = \sup S$

Ako je $\sup S \in S$ nazivamo ga maksimalnim elementom skupa S.

Definicija 4.

Realni broj M nazivamo supremum skupa S ako ima sljedeća dva svojstva:

i) M je majoranta skupa S, tj. $x \leq M$ za svako $x \in S$;

ii) M je najmanja majoranta skupa S, tj. za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x_0 \in S$ takav da je $M - \varepsilon < x_0$.

Oznaka: $M = \sup S$

Ako je $\sup S \in S$ nazivamo ga maksimalnim elementom skupa S.

Definicija 4.

Realni broj M nazivamo supremum skupa S ako ima sljedeća dva svojstva:

i) M je majoranta skupa S, tj. $x \leq M$ za svako $x \in S$;

ii) M je najmanja majoranta skupa S, tj. za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x_0 \in S$ takav da je $M - \varepsilon < x_0$.

Oznaka: $M = \sup S$

Ako je $\sup S \in S$ nazivamo ga maksimalnim elementom skupa S.

Definicija 5.

Realni broj m nazivamo infimum skupa S ako ima sljedeća dva svojstva:

i) m je minoranta skupa S, tj. $x \geq m$ za svako $x \in S$;

ii) m je najveća minoranta skupa S, tj. za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x_0 \in S$ takav da je $m + \varepsilon > x_0$.

Oznaka: $m = \inf S$

Ako je $\inf S \in S$ nazivamo ga minimalnim elementom skupa S.

Definicija 5.

Realni broj m nazivamo infimum skupa S ako ima sljedeća dva svojstva:

i) m je minoranta skupa S, tj. $x \geq m$ za svako $x \in S$;

ii) m je najveća minoranta skupa S, tj. za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x_0 \in S$ takav da je $m + \varepsilon > x_0$.

Oznaka: $m = \inf S$

Ako je $\inf S \in S$ nazivamo ga minimalnim elementom skupa S.

Definicija 5.

Realni broj m nazivamo infimum skupa S ako ima sljedeća dva svojstva:

i) m je minoranta skupa S, tj. $x \geq m$ za svako $x \in S$;

ii) m je najveća minoranta skupa S, tj. za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x_0 \in S$ takav da je $m + \varepsilon > x_0$.

Oznaka: $m = \inf S$

Ako je $\inf S \in S$ nazivamo ga minimalnim elementom skupa S.

Primjer 2. Odredite, ako postoje, infimum, supremum, minimum i maksimum zadanoga skupa:

i) $[2, +\infty\rangle$,

ii) $\langle -\infty, 3\rangle$,

iii) $[2, 3\rangle \cup \{5\}$,

iv) $\langle -\infty, 5\rangle \cup [12, 14]$,

v) $S = \left\{ \frac{2n}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Primjer 2. Odredite, ako postoje, infimum, supremum, minimum i maksimum zadanoga skupa:

i) $[2, +\infty\rangle$,

ii) $\langle -\infty, 3\rangle$,

iii) $[2, 3\rangle \cup \{5\}$,

iv) $\langle -\infty, 5\rangle \cup [12, 14]$,

v) $S = \left\{ \frac{2n}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Primjer 2. Odredite, ako postoje, infimum, supremum, minimum i maksimum zadanoga skupa:

i) $[2, +\infty\rangle$,

ii) $\langle -\infty, 3\rangle$,

iii) $[2, 3\rangle \cup \{5\}$,

iv) $\langle -\infty, 5\rangle \cup [12, 14]$,

v) $S = \left\{ \frac{2n}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Primjer 2. Odredite, ako postoje, infimum, supremum, minimum i maksimum zadanoga skupa:

i) $[2, +\infty\rangle$,

ii) $\langle -\infty, 3\rangle$,

iii) $[2, 3\rangle \cup \{5\}$,

iv) $\langle -\infty, 5\rangle \cup [12, 14]$,

v) $S = \left\{ \frac{2n}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Primjer 2. Odredite, ako postoje, infimum, supremum, minimum i maksimum zadanoga skupa:

i) $[2, +\infty\rangle$,

ii) $\langle -\infty, 3\rangle$,

iii) $[2, 3\rangle \cup \{5\}$,

iv) $\langle -\infty, 5\rangle \cup [12, 14]$,

v) $S = \left\{ \frac{2n}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}$.