

INTEGRALNI RAČUN

ZADACI ZA VJEŽBU

PRIMJENE INTEGRALA

1. Odredite površine likova omeđenih krivuljama

a) $y = 4x - x^2$, $y = 2x^2 - 5x$,

b) $y = x^3$, $y = 2x$.

2. Odredite površinu elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Zadatak riješite i prijelazom na parametarsku jednadžbu elipse: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

3. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom parabole $y = ax - x^2$, $a > 0$, oko osi x .

4. Izračunajte volumen elipsoida nastalog rotacijom elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ oko
a) osi x , b) osi y .

5. Nađite volumen torusa koji nastaje rotacijom kružnice $x^2 + (y - 3)^2 = 1$ oko osi x .

6. Odredite duljinu luka krivulje zadane parametarski s

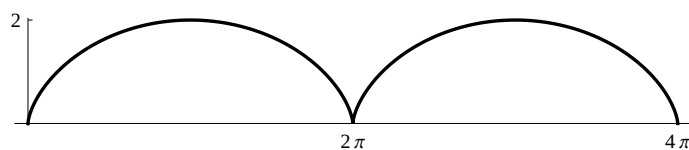
$$x = \frac{1}{3}t^3 - t, \quad y = t^2 + 2, \quad t \in [0, 3].$$

7. Odredite duljinu luka krivulje $y = \ln x$ za $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{5}]$.

8. Odredite volumen i oplošje tijela koje nastaje rotacijom jednog svoda cikloide zadanog s

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

oko osi x .



Slika 1. Cikloida ($a = 1$)

9. Odredite srednju vrijednost funkcije $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ na intervalu $[1, 4]$.
10. Sila potrebna za održavanje opruge rastegnutoj x jedinica od njene prirodne dužine proporcionalna je s x ($F(x) = kx$, $k > 0$). Ako je opruga duljine 15cm rastegnuta na duljinu 20cm silom od 30N, odredite rad potreban da bi se opruga rastegla na duljinu 25cm.
11. Lik je omeđen pravcima $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$. Odredite momente i koordinate težišta toga lika.