

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Natalija Tvrđy

Vektori u nastavi

Diplomski rad

Osijek, 2012.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Natalija Tvrđy

Vektori u nastavi

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Matić

Komentor: dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2012.

Sadržaj

Uvod	4
1 Povijesni kutak	5
2 Vektori kroz četiri obrazovna ciklusa	7
1. Osnovna škola	8
1.1. Zbrajanje vektora	11
1.2. Oduzimanje vektora	13
1.3. Translacija (usporedni pomak)	14
2. Srednja škola	16
2.1. Zbrajanje vektora	17
2.2. Množenje vektora skalarom	20
2.3. Linearna nezavisnost vektora	22
2.4. Vektori u Kartezijevom koordinatnom sustavu	24
2.5. Dijeljenje dužine u zadanom omjeru	25
2.6. Skalarni umnožak	27
3 Vektori u prostoru	32
1. Produkt vektora	34
1.1. Skalarni produkt	34
1.2. Vektorski produkt	34
1.3. Mješoviti produkt	36
2. Primjeri	38
4 Primjena vektora u planimetriji i stereometriji	42
Literatura	49
Sažetak	50
Summary	51
Životopis	52

Uvod

U svijetu oko nas lako prepozajemo mnoge veličine čija se vrijednost izražava brojem. To su, na primjer, duljina, površina, obujam, temperatura, tlak, masa, energija, ... Njih nazivamo *skalarnim* veličinama.

Međutim, neke se veličine nemogu opisati samo brojem. Za djelovanje sile važan je njezin iznos, ali i smjer djelovanja. Isto tako, brzina je fizikalna veličina koja, uz svoj iznos, mora imati definiran i smjer. Isto će vrijediti i za ubrzanje, moment sile električno ili magnetsko polje, itd.

Takve ćemo veličine nazivati *vektorima*.

Vektori su dakle važan pojam u elementarnoj geometriji i fizici. Vezani su za ravninu gdje im je određen smjer i veličina, pa ih možemo poistovjetiti sa usmjerenim dužinama.

Mogu se množiti s realnim brojevima i međusobno, a mogu se i zbrajati i oduzimati. Ovim radom obuhvaćena je tema vektora i njihove primjene u osnovnim i srednjim školama, te može poslužiti kao podloga za uvodne sadržaje fakultetkih kolegija poput Linearne algebre.

U prvom poglavlju dajemo kratak pregled razvoja vektora kroz povijest i nekoliko istaknutijih ličnosti koje su dale svoj doprinos nastanku današnje važnosti vektora i vektorskog računa.

U nastavi matematike gradivo se nadovezuje jedno na drugo, te je od posebne važnosti točno iznositi činjenice i gradivo kvalitetno obraditi radi daljnjeg cjeloživotnog obrazovanja.

U drugom poglavlju dajemo, uz sve navedene činjenice koje djeci treba izložiti, i pregled očekivanih postignuća i vrijeme obrade određeno Nastavnim planovima i programima za osnovnu i srednje škole. Poglavlje obiluje konkretnim primjerima primjerenima za učenike određenih uzrasta.

Nadalje, dajemo pregled nekih osnovnih pojmova za razumijevanje primjene vektora u prostoru, što se obrađuje još u nekim srednjim školama.

Na kraju dajemo nekoliko primjera primjene vektora u zadacima u kojima se riječ vektor i ne spominje, a koristimo ih u njihovu rješavanju. Takvi se zadaci često mogu riješiti na više načina, mi donosimo ovaj jedan.

Poglavlje 1

Povijesni kutak

Kao i kod drugih matematičkih pojmova, tako je i s vektorima. Zbog njihova zora i jasne intuicije nije moguće točno utvrditi vrijeme njihove pojave.

Uzmimo samo kao primjer *pravilo paralelograma* za zbrajanje vektora.

Možemo li uopće zamisliti da to jednostavno pravilo nisu poznavali i rabili matematičari i fizičari staroga doba?

Vektori su jedan od temeljnih pojmova suvremene matematike, ali njihov začetak nije u matematici nego u fizici.

Prvi ih koristi 1585. godine nizozemac Simon Stevin, a sto godina poslije Isaac Newton tvrdi da je akceleracija uvijek istog smjera kao i sila koja ju je prouzročila. Znanstvenici 16. i 17. stoljeća pronalaze mnoge osobitosti vektora, ali ne koriste riječ *vektor*.

Sama riječ *vektor* je latinskog podrijetla, dolazi od riječi *veho, vectus* - nositi, voziti.

1637. godine Rene Descartes uvodi koordinatni sustav, te nova metoda računanja s vektorima dobiva veliki zamah. Suvremena teorija vektora razvija se tek od sredine 19. stoljeća i vezana je za geometrijski prikaz kompleksnih brojeva.

U razvitku vektorskog računa i primjene djelovali su mnogi veliki matematičari:

- William Rowan Hamilton (1805.-1865.) razmatrajući poopćenja kompleksnih brojeva uz pojam kvaterniona uvodi usmjerene dužine i u trodimenzionalnom prostoru.
- James Clerk Maxwell (1831.-1879.) prvi je razdijelio fizikalne veličine na dvije kategorije, skalarne i vektorske.

- August Ferdinand Moebius je 1827. objavio knjižicu *Baricentički račun* u kojoj je uveo pojam usmjerene dužine. Razvio je aritmetiku usmjerenih dužina te uveo operaciju njihova množenja realnim brojem.



Slika 1.1 *August Ferdinand Moebius*

- Herman Gaussmann (1809.-1877.) razvija *novi geometrijski račun* proširujući koncepciju vektora iz ravnine i trodimenzionalnog prostora na prostor s konačno mnogo dimenzija.



Slika 1.2 *Herman Gaussmann*

Tijekom 19. i 20. stoljeća razvijala se teorija vektora koja je iz oruđa mehanike i geometrije izrasla u danas moderan i snažan jezik primjenjene matematike.

Vektori imaju primjene u najrazličitijim područjima znanosti, od tehničkih pa sve do ekonomskih.

U nastavu matematike kod nas, vektori su uvedeni tek u drugoj polovici 20. stoljeća, iako su u nastavu fizike uvedeni nešto ranije.

U današnjoj nastavi matematike, vektori nisu primjereno zastupljeni. U svim zbirkama (odgovarajućih razreda) srednjih škola nalaze se i zadaci s vektorima, no ne u tolikoj mjeri koliko bi trebali, obzirom na njihovu raznoliku mogućnost primjene.

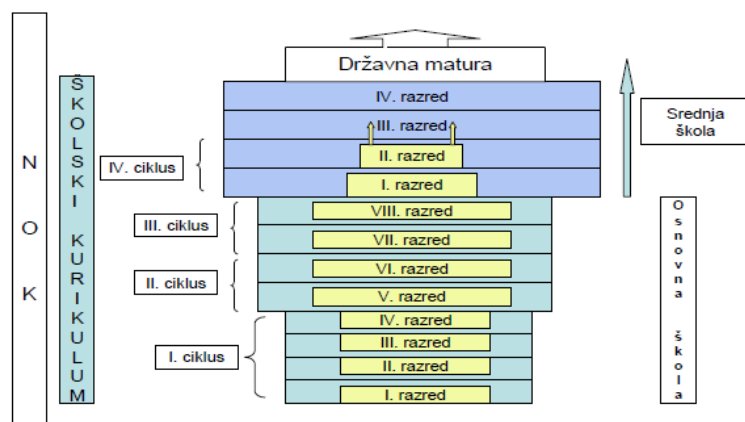
Poglavlje 2

Vektori kroz četiri obrazovna ciklusa

Nacionalni okvirni kurikulum određuje četiri odgojno-obrazovna ciklusa za stjecanje temeljnih kompetencija. Oni su redom:

- Prvi ciklus koji čine I., II., III. i IV. razred osnovne škole.
- Drugi ciklus koji čine V. i VI. razred osnovne škole.
- Treći ciklus koji čine VII. i VIII. razred osnovne škole.
- Četvrti ciklus odnosi se na I. i II. razred srednjih strukovnih i umjetničkih škola, dok u gimnazijama obuhvaća sva četiri razreda. Treba imati na umu da u srednjim strukovnim i umjetničkim školama općeobrazovni sadržaji se mogu poučavati i u završnim razredima, ovisno o profilu i potrebama škole, odnosno učenika.

Odgojno-obrazovni ciklusi ponajprije služe za kurikulumsko planiranje i programiranje odgojno-obrazovnih područja i predmetnih kurikuluma vodeći se načelima međusobne povezanosti i smislene usklađenosti te jasnim opterećenjem učenika tijekom određenog obrazovnog ciklusa.



Slika 2.1 Nacionalni okvirni kurikulum za stjecanje temeljnih kompetencija

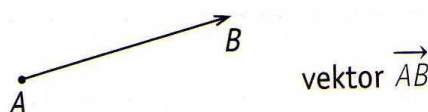
1. Osnovna škola

Vektori se u nastavi matematike osnovnih škola prvi put spominju u drugom polugodištu osmog razreda. Obrađuju se u uvodnom dijelu cjeline Preslikavanja ravnine.

S dužinom smo se prvi put susreli još u nižim razredima osnovne škole. Znamo da je za nacrtanu dužinu, kojoj su krajnje točke A i B svejedno imenujemo li je $\overline{AB}$ ili $\overline{BA}$.

Dužina za koju znamo koja joj je početna, a koja završna točka zove se *usmjerena dužina* ili **vektor**.

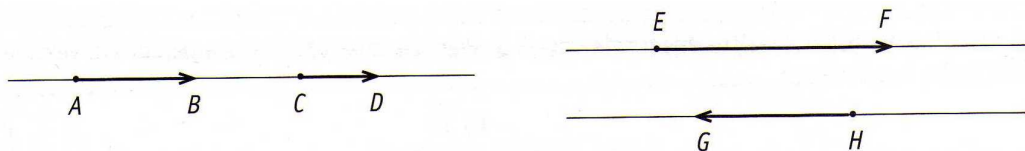
Vektore često označavamo i malim pisanim slovima $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ...



Slika 2.2 Vektor $\overrightarrow{AB}$

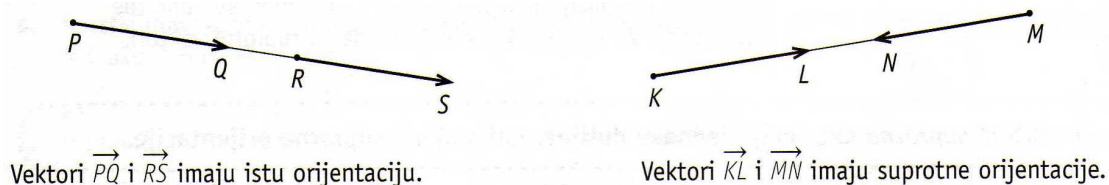
Kako je vektor usmjerena dužina, slijedi da ima i duljinu. Duljina vektora $\overrightarrow{AB}$ jednaka je duljini dužine $\overline{AB}$. Oznaka $|\overrightarrow{AB}| = |\overline{AB}|$.

Smjer vektora razlikuje se od "smjera" u svakodnevnom životu. Za dva vektora koja pripadaju istom ili usporednim pravcima kaže se da su *istog smjera* ili *kolinearni*.



Slika 2.3 Kolinearni vektori

Ako su vektori kolinearni ima smisla govoriti o njihovoj orijentaciji. Ako strelice obaju vektora pokazuju na istu stranu kažemo da imaju *istu orijentaciju*. Ako strelice vektora pokazuju na suprotne strane, kažemo da vektori imaju *suprotne orijentacije*.



Slika 2.4 Orijentacija vektora

Dakle, vektore razlikujemo po:

- duljini,
- smjeru,
- (ako imaju isti smjer) i po orijentaciji.

Dva su vektora *jednaka* ako imaju jednake duljine, isti smjer i istu orijentaciju.

Dva su vektora *suprotna* ako imaju jednake duljine, isti smjer i suprotne orijentacije.

Vektor suprotan vektoru $\vec{a}$ je vektor $-\vec{a}$.

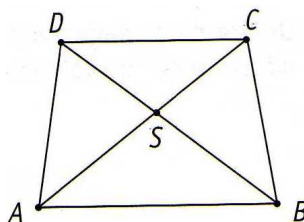
Vektor koji počinje i završava u istoj točki naziva se *nul*-vektor.

Oznaka $\vec{0}$, ima duljinu 0.

Primjer 2.1. *Nacrtan je trapez ABCD. Sjecište njegovih dijagonala je S.*

Pomoću označenih točaka odredite sve vektore koji imaju:

- iste orijentacije kao vektor $\overrightarrow{AB}$*
- suprotnu orijentaciju od vektora $\overrightarrow{SC}$*



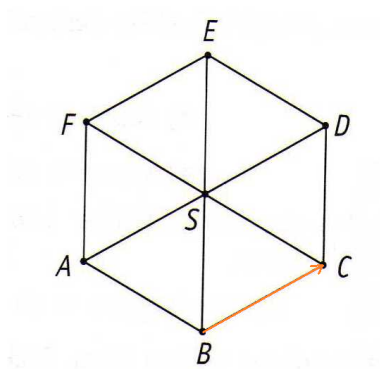
Slika 2.5

Rješenje:

- Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ imaju istu orijentaciju.*
- Od vektora $\overrightarrow{SC}$ suprotno su orijentirani vektori $\overrightarrow{CS}$, $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{SA}$.*

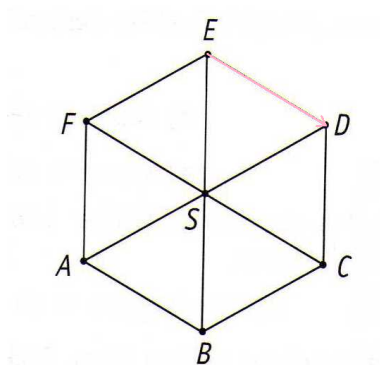
Primjer 2.2. Nacrtan je pravilan šesterokut. Pomoću označnih točaka odredite sve vektore:

a) jednake vektoru $\overrightarrow{BC}$



Slika 2.6 Vektori jednaki vektoru $\overrightarrow{BC}$ su: $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{SD}$ i $\overrightarrow{FE}$

b) suprotne vektoru $\overrightarrow{ED}$



Slika 2.7 Vektori suprotni vektoru $\overrightarrow{ED}$ su: $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{SF}$, $\overrightarrow{CS}$ i $\overrightarrow{BA}$

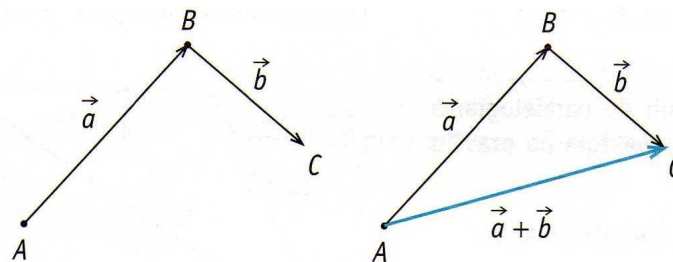
1.1. Zbrajanje vektora

Vektore možemo zbrajati koristeći jedno od sljedeća dva pravila:

- Trebamo nacrtati vektore tako da jedan počinje u završnoj točki drugog, odnosno da se nadovezuju. Zbroj takva dva vektora je vektor koji počinje u početnoj točki prvog vektora, a završava u završnoj točki drugog vektora.

Ovakvo zbrajanje vektora naziva se **zbrajanje vektora po pravilu trokuta**.

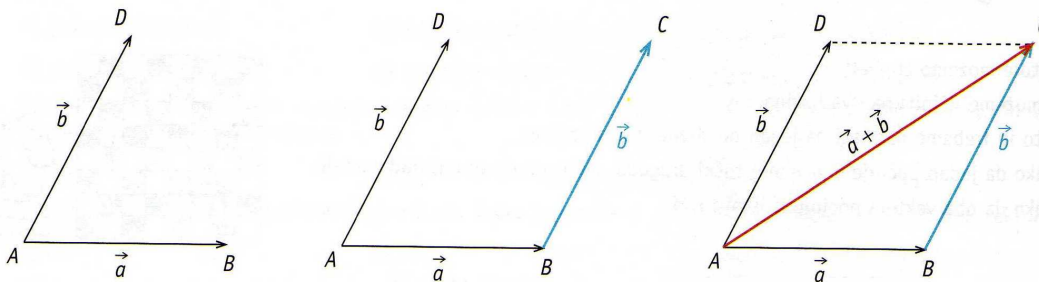
Pogledajmo sliku:



Slika 2.8 Pravilo trokuta

Na slici su dva vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$. Vektor $\overrightarrow{BC}$ počinje u završnoj točki vektora $\overrightarrow{AB}$. Dakle, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

- Trebamo nacrtati vektore tako da počinju u istoj točki. Postupak opisujemo prateći sliku:



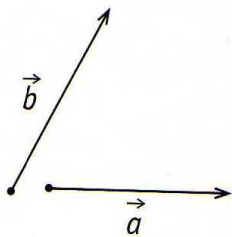
Slika 2.9 Pravilo paralelograma

Vektor $\vec{b}$ treba prenijeti u točku B tako da je $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Sada po pravilu trokuta vrijedi $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Uočimo da smo zbrajajući vektore koji imaju zajednočku početnu točku, nadopunili početnu sliku do paralelograma $ABCD$. Takav postupak zovemo zbrajanje vektora po **pravilu paralelograma**.

Koristeći se ovim primjerom možemo lako pokazati da vrijedi pravilo *komutativnosti*, odnosno da je $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Primjer 2.3. Odredite zbroj vektora sa slike primjenjujući pravilo trokuta i pravilo paralelograma:

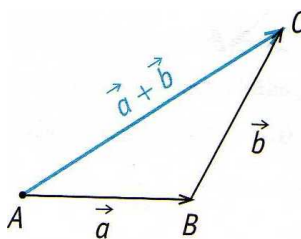


Slika 2.10

Rješenje:

- **Pravilo trokuta**

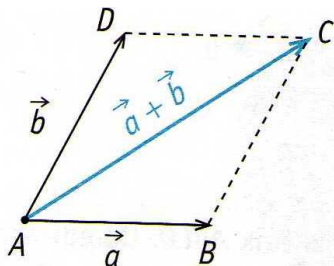
Vektore nacrtamo tako da se vektor $\vec{b}$ nadovezuje na vektor $\vec{a}$. Prenesemo $\vec{a}$ u točku A tako da bude $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, prenesemo $\vec{b}$ u točku B tako da bude $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Tada je $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.



Slika 2.11 Primjena pravila trokuta

- **Pravilo paralelograma**

Nacrtamo vektore sa zajedničkom početnom točkom A tako da bude $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ pri čemu je $ABCD$ paralelogram. Tada je $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.



Slika 2.12 Primjena pravila paralelograma

Zbroj dvaju suprotnih vektora jednak je *nul-vektoru*

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

Primjer 2.4. Nacrtajte točke A i B i odredite vektor $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$.

Rješenje:

$\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ su suprotni vektori, pa je $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Primjer 2.5. Duljine stranica trokuta ABC jesu $|AB| = 3$ cm, $|BC| = 4.5$ cm i $|CA| = 6$ cm. Odredite duljinu vektora $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$.

Rješenje:

$$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}.$$

$$|\overrightarrow{CA}| = |CA| = 6 \text{ cm}.$$

1.2. Oduzimanje vektora

Znamo da za oduzimanje brojeva vrijedi

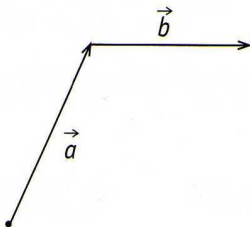
$$a - b = a + (-b).$$

Isto vrijedi i za vektore.

Od vektora $\vec{a}$ **oduzeti** vektor $\vec{b}$ znači vektor $\vec{a}$ **zbrojiti** s vektorom suprotnim vektoru $\vec{b}$.

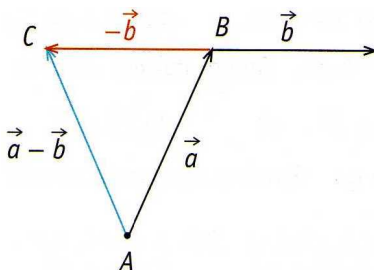
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Primjer 2.6. Od vektora $\vec{a}$ oduzmite vektor $\vec{b}$.



Slika 2.13

Rješenje:



Slika 2.14

Vektor $-\vec{b}$ nadovežemo na vektor $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ tako da vrijedi $\overrightarrow{BC} = -\vec{b}$. Tada je $\overrightarrow{AC} = \vec{a} - \vec{b}$.

Primjer 2.7. Duljine stranica trokuta ABC jesu $|AB| = 3.5 \text{ cm}$, $|BC| = 4 \text{ cm}$ i $|CA| = 6 \text{ cm}$. Odredite duljinu vektora $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA}$.

Rješenje:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}. \\ |\overrightarrow{CB}| &= |CB| = 4 \text{ cm}.\end{aligned}$$

1.3. Translacija (usporadni pomak)

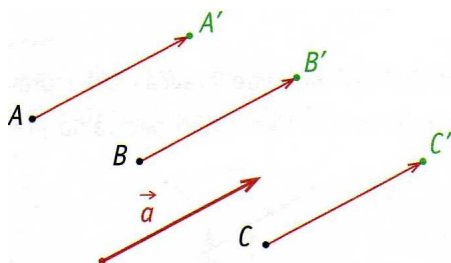
Na početku svakog školskog sata pomičemo stolac da bismo mogli sjesti, a isto tako i pri ustajanju. U svakodnevnom životu vrlo često pomičemo predmete u određenom smjeru.

U matematici je usporadni pomak jedno od preslikavanja ravnine, a zove se **translacija**. Kažemo da točke ravnine translaticiramo za zadani vektor $\vec{a}$.

Definicija 1.1. *Translacija za vektor $\vec{a}$ preslikavanje je ravnine koje svakoj točki T ravnine pridružuje točku T' te ravnine tako da je $\overrightarrow{TT'} = \vec{a}$.*

Nastavnim planom i programom u osnovnoj školi je predviđeno naučiti translaticirati točku, dužinu, pravac, trokut i kružnicu, te prepoznati lik koji je nastao translacijom drugog lika.

Odredimo slike točaka A , B i C pri translaciji za vektor $\vec{a}$:

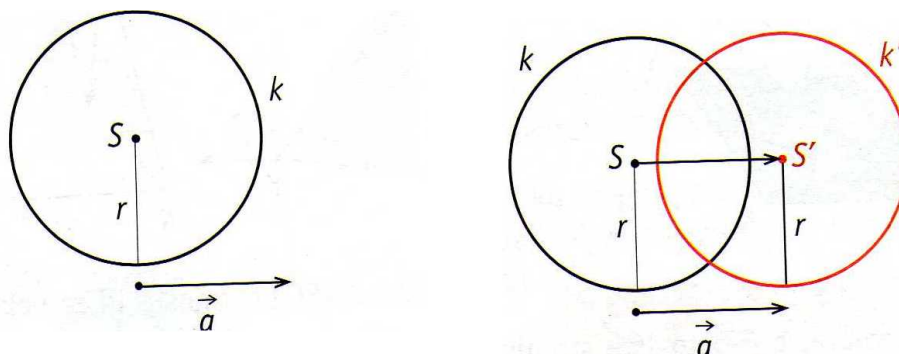


Slika 2.15 Translacija točke

Nacrtamo vektor jednak vektoru $\vec{a}$ kojem je A početna točka. Krajnja točka A' tog vektora je slika točke A pri translaciji za vektor $\vec{a}$, vektor $\overrightarrow{AA'}$ jednak je vektoru $\vec{a}$. Analogno postupamo za određivanje slika točaka B i C .

Primjer 2.8. Translatirajte kružnicu za vektor $\vec{a}$:

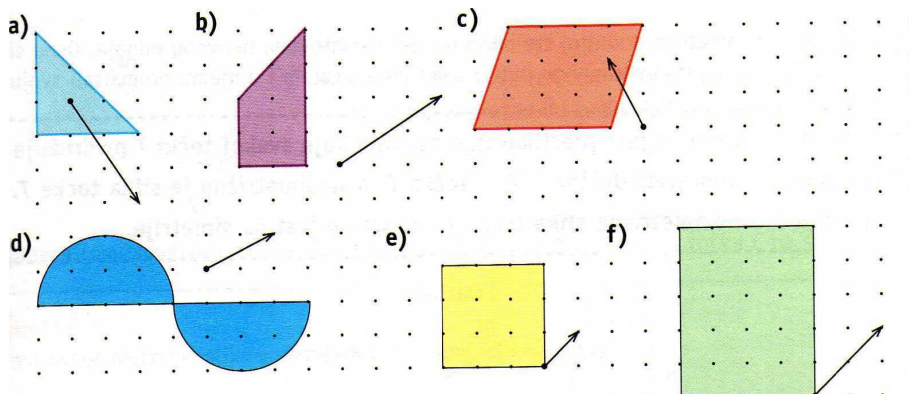
Rješenje:



Slika 2.16

Najprije translatiramo središte kružnice, a zatim oko dobivene točke kao središta opišemo kružnicu radijusa jednakog radijusu zadane kružnice.

Primjer 2.9. Slike najprije precrtajte u bilježnicu pa translatirajte lik za zadani vektor (točkice odgovaraju vrhovima kvadratića u bilježnici).



Slika 2.17 Translacija

Translacijom se likovi preslikavaju u sebi sukladne likove. Tako translacija dužinu preslikava u njoj paralelnu dužinu iste duljine, pravac u njemu paralelan pravac, trokut u njemu sukladan trokut, a kružnicu ili krug u kružnicu ili krug istog radijusa.

U ispitu znanja najčešće se pojavljuju zadaci zbrajanja i oduzimanja vektora kao u Primjeru 2.2., zatim primjena na pravilnim likovima kao u Primjeru 2.3 ili 2.6, te translacija nekog od likova (vrlo često trokuta).

U ovoj cjelini se obrađuju još i druga preslikavanja ravnine (osna simetrija, centralna simetrija i rotacija), pa je vrlo teško odrediti usvojenost samih vektora kroz ispit znanja. Srednja ocjena u jednom osmom razredu od 25 učenika u Osnovnoj školi Pleternica, gdje sam radila, bila je 3.00, s tim da je samo nekoliko učenika riješilo zadatak sa vektorima. To je samo mali pokazatelj kako djeca u osnovnoj školi taj pojam teško shvaćaju.

2. Srednja škola

Učenici trećih razreda srednjih škola trebaju savladati osnovna znanja iz vektorske algebre i uočiti mogućnost i snagu vektorskih metoda u geometrijskim zadacima i problemima.

U strukovnim trogodišnjim školama vektori se samo spominju, dok se nešto više obrađuju u četverogodišnjim. Prema gimnazijskom nastavnom planu i programu, obrada vektora je predviđena za drugo polugodište trećeg razreda, te ima zasebnu cjelinu Vektori.

Na samom početku cjeline uvode se osnovni pojmovi (pojam vektora, duljina vektora, smjer vektora, orijentacija vektora, jednakost, odnosno suprotnost vektora, te nul-vektor) koje smo jednako tako definirali u poglavlju prije.

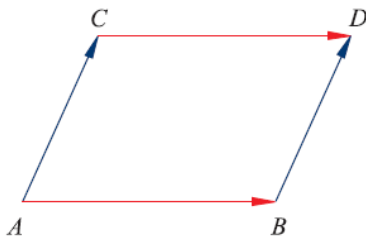
Jedina razlika je u definiranju jednakosti vektora, gdje se uvodi kriterij za jednakost vektora i pojam radijvektora koji nije prije bio poznat učenicima.

- **Kriterij za jednakost vektora**

Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ jednaki su onda i samo onda ako je četverokut $ABCD$ paralelogram.

Pokažimo:

Jedan je smjer ove tvrdnje očit: ako je četverokut $ABCD$ paralelogram, tada vrijedi $|AB| = |CD|$, a pravci AB i CD su paralelni i orijentacije vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ su identične.



Slika 2.18 Kriterij jednakosti vektora

Obratno, ako je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, tada su u četverokutu $ABCD$ dvije nasuprotne stranice paralelne i jednake duljine, što je dovoljno da bi on bio paralelogram.

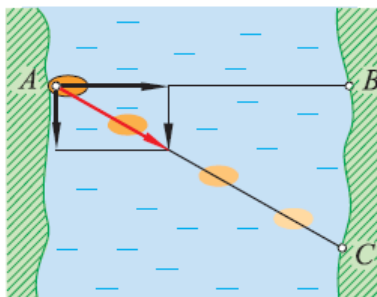
Definicija 2.1. Neka je O bilo koja točka ravnine (ili prostora) i $\overrightarrow{AB}$ zadani vektor. Tada postoji jedinstvena točka T u ravnini (ili prostoru) za koju je $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{AB}$. Vektor $\overrightarrow{OT}$ nazivamo **radijvektor** točke T .

2.1. Zbrajanje vektora

Zbrajanje vektora definira se koristeći fizikalni pristup:

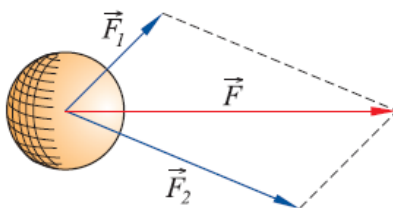
- Ako čamac plovi preko rijeke brzinom 3 m/s okomito na njezin tok, a brzina vode je 1 m/s, kakva će biti njegova putanja?

Na ovo pitanje su znali odgovoriti i stari Grci. Čamac će se gibati po pravcu koji je dijagonala pravokutnika koji čine pojedina gibanja. Krene li čamac iz točke A prema točki B i ako cijelo vrijeme vozi okomito na tok vode, stići će na obalu u točki C .



Slika 2.19

- Prije nešto više od 400 godina nizozemski znanstvenik Simon Stevin rješavao je općenitiji problem gibanja tijela na koje djeluju različite sile. Mnogo prije nego je u matematici uveden pojam vektora, on je ispravno odgovorio na pitanje: *može li se djelovanje dviju sila zamijeniti djelovanjem samo jedne sile koja će imati isti učinak?*



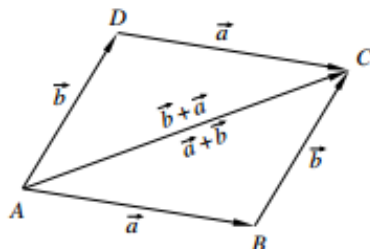
Slika 2.20

Zatim se definira zbrajanje vektora koristeći pravilo paralelograma i pravilo trokuta. Primjeri su identični onima obrađenim u osnovnoj školi. Novost su svojstva operacije zbrajanja vektora.

Svojstva operacije zbrajanja vektora

- Komutativnost zbrajanja vektora: za bilo koja dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vrijedi

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

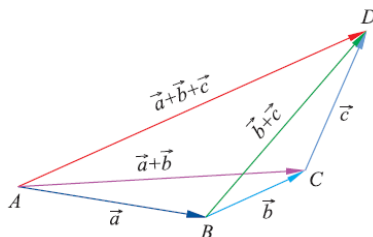


Slika 2.21 Komutativnost zbrajanja

- Asocijativnost zbrajanja vektora: za bilo koja tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ vrijedi

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

Zbroju ulančanih vektora odgovara vektor koji ima početak u početku prvog, a završetak u završetku posljednjeg.



Slika 2.22 Asocijativnost zbrajanja

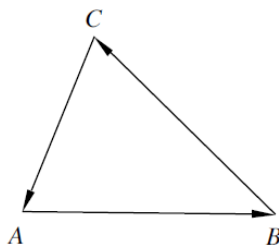
- Svojstvo suprotnog vektora: ako je $\vec{a}$ bilo koji vektora onda za vektora $-\vec{a}$ vrijedi

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}.$$

- Svojstvo nulvektora: ako je $\vec{a}$ bilo koji vektor, onda vrijedi

$$\vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

Primjer 2.10. Neka je ABC bilo koji trokut. Odredite zbroj vektora $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.
Rješenje:



Slika 2.23

To su vektori stranica ovog trokuta koji su odabrani da budu ulančani. Prema pravilu za zbrajanje, rezultat je vektor kojemu je početna točka početak prvog, a završna točka završetak trećeg vektora:

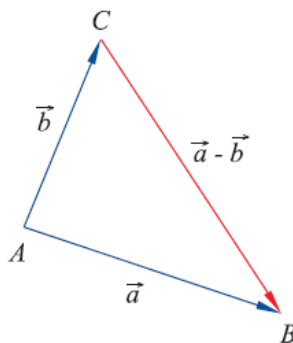
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

Oduzimanje vektora

Oduzimanje vektora je operacija izvedena iz zbrajanja. Razlika vektora definira se kao zbroj sa suprotnim vektorom:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Definicija 2.2. Razlika vektora $\vec{a} - \vec{b}$ vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ određuje se tako da se izaberu vektori jednaki početnima, a koji imaju zajednički početak. Tada je razlika vektor koji spaja završetak drugog sa završetkom prvog vektora.



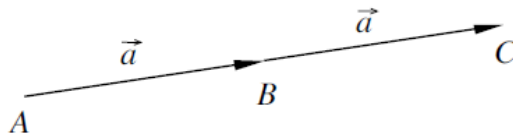
Slika 2.24 Razlika vektora $\vec{a} - \vec{b}$.

2.2. Množenje vektora skalarom

Skalarom podrazumjevamo realan broj. U skupu realnih brojeva množenje je bila operacija izvedena iz zbrajanja. Tako je, na primjer, zbroj $a + a$ jednak broju $2a$, te $a + a + a = 3a$, itd. Prirodno je zahtijevati da isto svojstvo vrijedi i za vektore.

Vektor $2\vec{a}$ definiramo kao zbroj $\vec{a} + \vec{a}$.

Odredimo taj vektor: neka je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, nacrtamo još jedan vektor $\vec{a}$ s početnom točkom B, pa je $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$; pritom su točke A, B i C kolinearne i vrijedi $|\vec{a}| = |AB| = |BC|$, onda je $2\vec{a} = \overrightarrow{AC}$.



Slika 2.25 Vektor $2\vec{a}$

Za vektor $2\vec{a}$ vrijedi:

- njegov smjer isti je kao i za vektor $\vec{a}$
- vektori $\vec{a}$ i $2\vec{a}$ imaju istu orijentaciju
- za njegovu duljinu vrijedi $|2\vec{a}| = 2|\vec{a}|$.

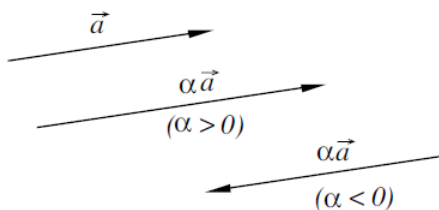
Postavlja se pitanje kako množiti vektor negativnim brojem. Prisjetimo se svojstava množenja realnih brojeva: umnožak realnog broja a i negativnog broja -2 je broj suprotan broju $2a$. To ćemo svojstvo zahtijevati i za množenje vektora negativnim skalarom: umnožak $(-2)\vec{a}$ bit će vektor suprotan vektoru $2\vec{a}$.

Definicija 2.3. Vektor $\vec{a}$ množi se skalarom α tako da se dobije vektor $\alpha\vec{a}$ sa svojstvima:

1. duljina mu je jednaka umnošku apsolutne vrijednosti skalara i duljine vektora

$$|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$$

2. smjer mu je jednak smjeru vektora $\vec{a}$
3. orijentacija mu je jednaka orijentaciji vektora $\vec{a}$ ako je $\alpha > 0$, a suprotna orijentaciji vektora $\vec{a}$ ako je $\alpha < 0$.

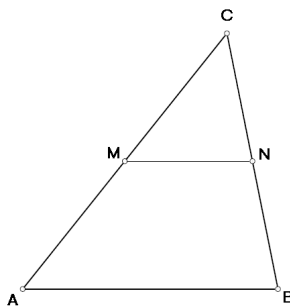


Slika 2.26 Množenje vektora skalarom

Koristeći se vektorima možemo vrlo zorno i jednostavno dokazati neke važne geometrijske činjenice.

Primjer 2.11. Dokažite **Poučak o srednjici trokuta**: Dužina koja spaja polovišta dviju stranica trokuta zove se srednjica, paralelna je trećoj stranici i od nje upola kraća.

Rješenje:



Slika 2.27

Neka je dan trokut ABC i neka su M i N polovišta njegovih stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$.

Možemo zapisati jednakosti:

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}$$

Zbrojimo ove dvije jednakosti i dobivamo:

$$\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC} \text{ i } \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NB} \implies 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}.$$

Vektori su kolinearni, a vektor $\overrightarrow{AB}$ dvostruko je dulji od vektora $\overrightarrow{MN}$.

Time je poučak dokazan.

Definicija 2.4. Za vektor $\vec{a}_0$ kažemo da je **jedinični vektor** ili **ort** ako je njegova duljina $|\vec{a}_0| = 1$.

Podijelimo li bilo koji vektor $\vec{a}$ (različit od nulvektora) njegovom duljinom¹, dobit ćemo jedinični vektor $\vec{a}_0$:

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Ovako definiran vektor $\vec{a}_0$ je kolinearan vektoru $\vec{a}$, ima istu orijentaciju i duljina mu iznosi:

$$|\vec{a}_0| = \left| \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right| = \frac{1}{|\vec{a}|} |\vec{a}| = 1.$$

Kriterij kolinearnosti

- Vektori $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ ($\vec{a}_2 \neq 0$) kolinearni su onda i samo onda kad postoji skalar k takav da vrijedi

$$\vec{a}_1 = k\vec{a}_2.$$

2.3. Linearna nezavisnost vektora

Definicija 2.5. *Linearna kombinacija* dvaju vektora $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ je svaki izraz oblika

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2.$$

Skalare α_1, α_2 nazivamo koeficijentima linearne kombinacije, a ako su oba jednaka nuli onda je linearna kombinacija jednaka nulvektoru.

Kriterij kolinearnosti isto tako možemo zapisati kao jednu linearnu kombinaciju vektora:

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= k\vec{a}_2 \\ 1 \cdot \vec{a}_1 - k \cdot \vec{a}_2 &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Definicija 2.6. Dva su vektora $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ **linearno nezavisna** ako iz jednakosti

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = \vec{0}$$

nužno slijedi da je $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

U suprotnom slučaju su $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ **linearno zavisni**. Tada postoji linearna kombinacija jednaka nulvektoru, kojoj svi koeficijenti nisu jednaki nuli.

Za svaka dva linearno nezavisna vektora $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ kažemo da čine **bazu vektorskog prostora** V^2 .

¹Zapravo se radi o množenju vektora skalarom jednakim recipročnoj vrijednosti duljine vektora.

Primjer 2.12. *Primjeri linearno zavisnih i nezavisnih vektora:*

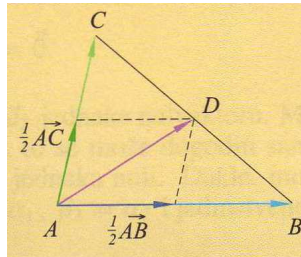
- linearno zavisni vektori su: vektori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$ paralelograma $ABCD$.
- linearno nezavisni vektori su: vektor $\vec{i}$ kojeg reprezentira orijentirana dužina $\overrightarrow{OE_1}$ i vektor $\vec{j}$ kojeg reprezentira orijentirana dužina $\overrightarrow{OE_2}$ gdje je O - ishodište, E_1 - točka $(1, 0)$ i E_2 - točka $(0, 1)$ pravokutnog koordinatnog sustava u ravnini.

Kolinearnost i linearna nezavisnost

- Dva su vektora kolinearna onda i samo onda kad su linearno zavisna.
- $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ su nekolinearni vektori onda i samo onda ako su linearno nezavisni.

Primjer 2.13. *Neka je u trokutu ABC točka D polovište stranice $\overline{BC}$. Izrazite vektor težišnice $\overrightarrow{AD}$ kao linearnu kombinaciju vektora stranica $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.*

Rješenje:



Slika 2.28

Vrijedi:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

Zbrojimo ove dvije jednakosti i dobivamo:

$$2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}.$$

Vektori $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{BD}$ imaju istu duljinu i smjer, a suprotne orijentacije, zato su oni suprotni vektori i vrijedi:

$$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} = \vec{0} \implies 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.$$

Konačno dobivamo tražni izraz:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Rastav vektora

Neka su $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ linearno nezavisni vektori: baza u V^2 . Svaki se vektor $\vec{b} \in V^2$ može prikazati kao linearna kombinacija vektora baze:

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2.$$

Kažemo da smo vektor $\vec{b}$ rastavili na komponente po vektorima $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$. Koeficijenti α_1 i α_2 linearne kombinacije nazivaju se *koordinate* vektora $\vec{b}$ u prikazu pomoću vektora $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$.

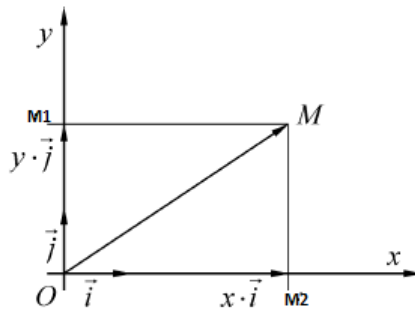
Prikaz vektora u obliku $\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2$ je jedinstven, što znači da postoji samo jedan izbor koordinata α_1 i α_2 za koje vrijedi izraz.

2.4. Vektori u Kartezijevom koordinatnom sustavu

Dva su istaknuta vektora u Kartezijevom koordinatnom sustavu.

$\vec{i}$: jedinični vektor na osi apscisa,
 $\vec{j}$: jedinični vektor na osi ordinata.

Par vektora $(\vec{i}, \vec{j})$ čine bazu Kartezijevog pravokutnog sustava.



Slika 2.29

Definicija 2.7. Radijvektor $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ točke $M(x, y)$ možemo prikazati kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{i}, \vec{j}$ ovako:

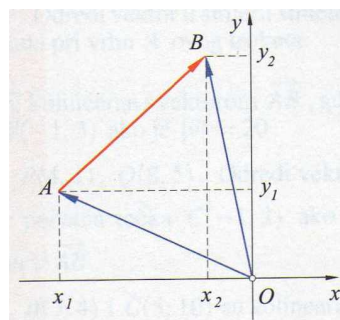
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Realne brojeve x i y nazivamo **koordinate vektora** $\overrightarrow{OM}$.

Općenitije vrijedi:

Vektor $\overrightarrow{AB}$ s početkom u točki $A(x_1, y_1)$ i završetkom u točki $B(x_2, y_2)$ ima prikaz:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$



Slika 2.30

Kriterij za jednakost vektora

Dva su vektora $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$ jednaka onda i samo onda ako im se podudaraju njihove pravokutne koordinate:

$$\vec{a} = \vec{b} \iff a_x = b_x, \quad a_y = b_y$$

Duljina vektora

Formula za udaljenost dviju točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ glasi

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ta je udaljenost jednaka duljini vektora $\overrightarrow{AB}$:

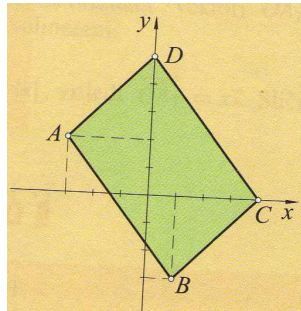
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Općenitije: duljina vektora $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ je

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Primjer 2.14. Tri uzastopna vrha paralelograma su točke $A(-3, 2)$, $B(1, -3)$ i $C(4, 0)$. Odredite duljinu dijagonale $\overline{BD}$ paralelograma.

Rješenje:



Slika 2.31

Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ su jednaki. Iz te činjenice odredit ćemo koordinate točke $D(x, y)$. Izjednačimo $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$ i $\overrightarrow{DC} = (4 - x)\vec{i} + (0 - y)\vec{j}$: $4\vec{i} - 5\vec{j} = (4 - x)\vec{i} + (0 - y)\vec{j}$. Izjednačavanje odgovarajućih komponenti daje $x=0$ i $y=5$.

Tako smo odredili točku $D(0, 5)$.

Konačno je: $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2} = \sqrt{65}$.

2.5. Dijeljenje dužine u zadanom omjeru

Neka je $\overline{AB}$ zadana dužina i C neka njezina točka. Kažemo da C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru λ ako vrijedi $|AC| : |CB| = \lambda$.

Dijeljenje dužine u zadanom omjeru možemo jednostavno opisati korištenjem vektora:

Neka je λ pozitivan realan broj. Točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru λ ako vrijedi

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}.$$

Ako znamo koordinate točaka A i B u Kartezijevom sustavu, onda iz posljednje jednadžbe možemo lako odrediti koordinate točke C koja dužinu $\overline{AB}$ dijeli u omjeru λ :

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \quad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}.$$

Polovište dužine

Polovište P dužine $\overline{AB}$ je točka koja dužinu dijeli na dva jednaka dijela.

Kako je $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{PB}| \implies \lambda = 1$.

Dobivamo da polovište P ima koordinate:

$$x_P = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_P = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

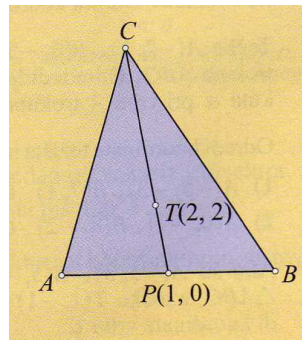
Težište trokuta

Težište T trokuta ABC s vrhovima $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ ima koordinate:

$$x_T = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_T = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Primjer 2.15. Točka $B(3, -1)$ vrh je trokuta ABC , točka $P(1, 0)$ polovište je njegove stranice $\overline{AB}$, a točka $T(2, 2)$ težište trokuta. Odredite koordinate ostalih dvaju vrhova trokuta.

Rješenje:



Slika 2.32

Točka P polovište je stranice $\overline{AB}$. Kako je zadana točka B , onda možemo odrediti koordinate točke A .

$$\text{Iz } x_P = \frac{x_A + x_B}{2} \implies 1 = \frac{x_A + 3}{2} \implies x_A = -1.$$

$$\text{Analogno, } y_P = \frac{y_A + y_B}{2} \implies y_A = 1.$$

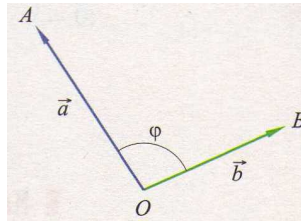
Koordinate točke C odredit ćemo iz koordinata točaka A , B i T .

$$\text{Iz } x_T = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \implies x_C = 4.$$

$$\text{Analogno, } y_T = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \implies y_C = 6.$$

2.6. Skalarni umnožak

Upoznajemo još jednu operaciju - množenje vektora. Rezultat ovog množenja je skalar, zato se ta operacija naziva *skalarni umnožak* ili *skalarni produkt*.



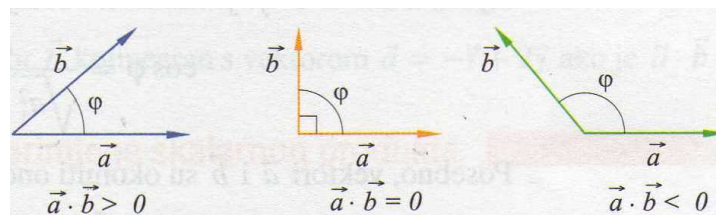
Slika 2.33

Definicija 2.8. *Skalarni umnožak ili skalarni produkt* vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je realan broj $\vec{a} \cdot \vec{b}$ definiran s

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi,$$

gdje je φ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Ako je neki (ili oba) od vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nulvektor, onda se pojam kuta između vektora ne definira, tada je skalarni produkt po definiciji jednak nuli.



Slika 2.34

Ako je skalarni umnožak jednak nuli, onda je ili jedan od vektora nulvektor, ili je kut između vektora pravi, pa su vektori okomiti. Tada pišemo $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Skalarni umnožak se može izračunati iz prikaza vektora u koordinatnom sustavu: Skalarni umnožak vektora $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ i $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$ računa se formulom

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

Kut između vektora

Ako su zadani vektori $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ i $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$, primjenom skalarnog produkta možemo izračunati kut između tih dvaju vektora:

$$\text{vrijedi } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2} \cdot \cos \varphi.$$

Također je $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$, pa izjednačavanjem dobivamo:

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}.$$

Svojstva skalarnog umnoška

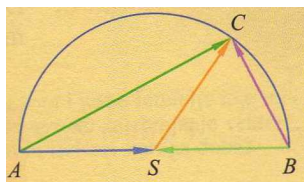
Za sve vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ i svaki skalar $\lambda \in \mathbf{R}$ vrijedi:

1. pozitivnost: $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$, $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \iff \vec{a} = 0$
2. komutativnost: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
3. homogenost: $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$
4. distributivnost: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

Primjeri i primjene skalarnog umnoška

Vektori se koriste u mnogim dokazima jer zorno i jednostavno dolazimo do rješenja, tako se vektorski dokazuju i Poučak o srednjici trokuta, Poučak o srednjici trapeza, Talesov poučak i mnogi drugi.

Primjer 2.16. *Dokažite Talesov poučak: obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.*
Rješenje:



Slika 2.35

Neka je $\overline{AB}$ promjer kružnice, S središte i C bilo koja točka na luku kružnice. Moramo pokazati da je $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

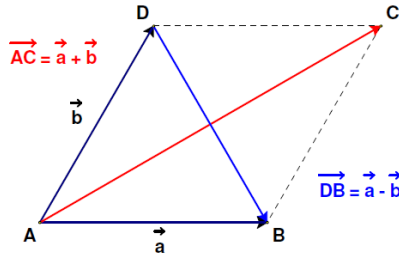
Zaista,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SC}) \cdot (\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SC}) \\ &= \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SC} \\ &= -\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AS} + (\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS}) \cdot \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SC} \\ &= -|\overrightarrow{AS}|^2 + |\overrightarrow{SC}|^2 = 0.\end{aligned}$$

Koristili smo činjenicu da su $\overrightarrow{AS}$ i $\overrightarrow{BS}$ suprotni vektori.

Primjer 2.17. Dokažite da su dijagonale romba međusobno okomite.

Rješenje:



Slika 2.36

Dva su vektora međusobno okomita ako je njihov skalarni produkt jednak nuli:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \implies \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Sa slike: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$.

Budući su kod romba sve stranice sukladne vrijedi: $|\vec{a}| = |\vec{b}| \implies |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$.

Dijagonale romba su okomite ako je njihov skalarni produkt jednak nuli, odnosno: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$. Provjerimo:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = \left[|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Primjer 2.18. Dokažite da se sve tri visine trokuta sijeku u jednoj točki.

Rješenje:

Sa H označimo presječnu točku dviju visina spuštenih iz vrhova B i C .

Tada je $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$, odnosno $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ i $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Moramo pokazati da vrijedi $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$, odnosno $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}) \cdot \overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH}) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0. \end{aligned}$$

Primjer 2.19. Izračunajte $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$, ako je $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$ i ako su vektori $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{y} = -4\vec{a} + 5\vec{b}$ međusobno okomiti.

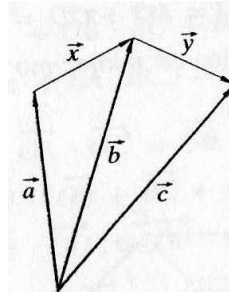
Rješenje:

Neka je $|\vec{a}| = |\vec{b}| = a$. Vektori $\vec{x}$ i $\vec{y}$ su međusobno okomiti pa vrijedi $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$. Odnosno,

$$\begin{aligned} (2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-4\vec{a} + 5\vec{b}) &= 0 \\ -8\vec{a}^2 + 5\vec{b}^2 + 6\vec{a}\vec{b} &= 0 \\ 6|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) &= 8|\vec{a}|^2 - 5|\vec{b}|^2 \\ \cos \varphi &= \frac{3a^2}{6a^2} = \frac{1}{2} \\ \varphi &= 60^\circ \end{aligned}$$

Primjer 2.20. Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ imaju početak u zajedničkoj točki i u parovima su linearno nezavisni. Ako je završetak vektora $\vec{b}$ jednako udaljen od završetaka vektora $\vec{a}$ i $\vec{c}$, pokažite da su vektori $\vec{a} - \vec{c}$ i $\vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b}$ međusobno okomiti.

Rješenje:



Slika 2.37

$|\vec{x}| = |\vec{y}|$ ili $|\vec{b} - \vec{a}| = |\vec{c} - \vec{b}|$, odnosno $(\vec{b} - \vec{a})^2 = (\vec{c} - \vec{b})^2$, iz čega slijedi niz jednakosti:

$$\vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a}^2 = \vec{c}^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b}^2,$$

$$\vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c}^2 = 0,$$

$$(\vec{a} - \vec{c})(\vec{a} + \vec{c}) - 2\vec{b}(\vec{a} - \vec{c}) = 0,$$

$$(\vec{a} - \vec{c})(\vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b}) = 0.$$

Posljednja jednakost znači da su vektori $\vec{a} - \vec{c}$ i $\vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b}$ međusobno okomiti.

Primjer 2.21. Dvije težišnice trokuta su međusobno okomite. Dokažite da je tada zbroj kvadrata duljine tih težišnica jednak kvadratu duljine treće težišnice.

Rješenje:

Neka su t_a i t_b međusobno okomite težišnice trokuta ABC , trebamo pokazati da je tada:

$$t_a^2 + t_b^2 = t_c^2.$$

Za vektore težišnica trokuta vrijedi: $\vec{t}_a + \vec{t}_b + \vec{t}_c = \vec{0}$, a odatle je

$$\vec{t}_a + \vec{t}_b = -\vec{t}_c$$

$$(\vec{t}_a + \vec{t}_b)^2 = (-\vec{t}_c)^2$$

$$\vec{t}_a^2 + \vec{t}_b^2 + 2\vec{t}_a \cdot \vec{t}_b = \vec{t}_c^2$$

zbog $\vec{t}_a \perp \vec{t}_b \implies \vec{t}_a \cdot \vec{t}_b = 0$, pa je

$$t_a^2 + t_b^2 = t_c^2.$$

Primjer 2.22. Odredite realan broj m tako da vektori $\vec{a} = (2m - 1)\vec{i} + 3\vec{j}$ i $\vec{b} = 3\vec{i} + (2m - 1)\vec{j}$ zatvaraju sa vektorom $\vec{i}$ jednake kutove.

Rješenje:

Za jedinične vektore $\vec{i}$ i $\vec{j}$ vrijedi: $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$ i $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$.

Promotrimo skalarne produkte vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ s vektorom $\vec{i}$.

Uvjet je da zatvaraju s vektorom jednake kutove:

iz $\vec{a} \cdot \vec{i} = |\vec{a}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos \alpha$ i $\vec{b} \cdot \vec{i} = |\vec{b}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos \alpha$

slijedi da je

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|} \text{ i } \cos \alpha = \frac{\vec{b} \cdot \vec{i}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{i}|} \\ \Rightarrow \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|} &= \frac{\vec{b} \cdot \vec{i}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{i}|} \Rightarrow \frac{((2m - 1)\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot \vec{i}}{\sqrt{(2m - 1)^2 + 3^2} \cdot 1} = \frac{(3\vec{i} + (2m - 1)\vec{j}) \cdot \vec{i}}{\sqrt{3^2 + (2m - 1)^2} \cdot 1} \\ &\Rightarrow \frac{(2m - 1)\vec{i} \cdot \vec{i} + 3\vec{j} \cdot \vec{i}}{\sqrt{(2m - 1)^2 + 3^2}} = \frac{3\vec{i} \cdot \vec{i} + (2m - 1)\vec{j} \cdot \vec{i}}{\sqrt{3^2 + (2m - 1)^2}} \\ &\Rightarrow \frac{(2m - 1) \cdot 1 + 3 \cdot 0}{\sqrt{(2m - 1)^2 + 9}} = \frac{3 \cdot 1 + (2m - 1) \cdot 0}{\sqrt{9 + (2m - 1)^2}} \\ \Rightarrow \frac{2m - 1}{\sqrt{(2m - 1)^2 + 9}} &= \frac{3}{\sqrt{9 + (2m - 1)^2}} \Rightarrow 2m - 1 = 3 \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow m = 2. \end{aligned}$$

Poglavlje 3

Vektori u prostoru

Vektori u prostoru obrađuju se prema Nastavnom planu i programu u trećem razredu prirodoslovno matematičke gimnazije. U tu svrhu koristi se dodatna literatura: dodatak za 3. razred prirodoslovno - matematičke gimnazije.

Učenici upoznaju skalarni i vektorski produkt, te definiraju mješoviti produkt.

Na državnoj maturi, vektori se mogu pojaviti na višoj razini ispita iz matematike gdje se pojavljuju zadaci vezani uz linearne kombinacije vektora.

Detaljnije proučavanje vektora možemo sresti na studiju matematike u sklopu kolegija iz linearne algebre na prvoj godini. Konkretno na Odjelu za matematiku u Osijeku u sklopu kojegija Geometrija ravnine i prostora.

Na mnogim drugim studijima uvodi se pojam vektora, skalarni, vektorski i mješoviti produkt, zatim linearne kombinacije vektora, linearna zavisnost i nezavisnost te prikaz vektora u ortonormiranoj bazi.

Uglavnom se obrađuju u uvodnim kolegijima matematike.

Prema dostupnim podacima, vektori se spominju i proučavaju na:

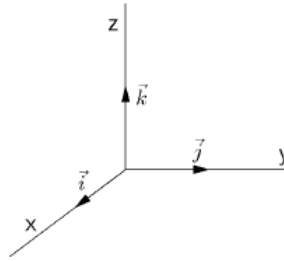
- Studijima strojarstva, brodogradnje, elektrotehnike i računarstva.
- Studijima arhitekture i geodezije (u zadacima se pojavljuju vektorski i skalarni produkt, izračunavanje površine trokuta, jednakost vektora, kut između vektora).
- Građevinskom fakultetu (vektori predstavljaju ključni dio gradiva kolegija Mehanika I i Mehanika II gdje se koriste za proučavanje djelovanja sila).
- Fakultetu prometnih znanosti (u zadacima se izračunava kut između vektora, te koristi jednakost vektora).
- Kemijsko - tehnološkom, Prehrambeno - biotehnološkom, Tekstilno - tehnološkom fakultetu
- Pomorskom fakultetu
- Ekonomskom fakultetu (konkretno, vektori se spominju i koriste na Ekonomskom fakultetu u Osijeku u kolegiju Kvantitativne metode za poslovno odlučivanje).

U ovom poglavlju nalaze se primjeri koji mogu poslužiti za bolje shvaćanje pojmova vektora, primjene skalarnog i vektorskog produkta.

Ali isto tako kao temelj za razumijevanje pojmova koji se mogu upoznati na raznim studijima, ne samo matematike, kao što je ranije navedeno.

Koordinatni sustav Euklidskog prostora ima tri dimenzije, odnosno tri koordinatne osi: os x - apscisa, os y - ordinata i os z - aplikata.

Na osi x jedinični vektor ima početak u ishodištu, a kraj u točki $(1, 0, 0)$ i označavamo ga s $\vec{i}$, na osi y jedinični vektor je s početkom u ishodištu i krajem u $(0, 1, 0)$ i označavamo ga s $\vec{j}$, a na osi z jedinični vektor je s početkom u ishodištu i krajem u $(0, 0, 1)$ i označavamo ga s $\vec{k}$. Ova tri vektora zovemo **koordinatnim vektorima**.



Slika 3.1

Vektorski prostor $\mathbf{V}^3$ ili $\mathbf{X}_0$ (što je češća oznaka i u daljnjem tekstu ćemo ju koristiti) je skup svih radijvektora u prostoru snabdjeven operacijama zbrajanja i množenja skalarom.

Položaj svake točke prostora jednoznačno je određen uređenom trojkom koordinata (x, y, z) . Samim tim i vektor $\overrightarrow{AB}$ gdje $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ ima tri komponente:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}, \\ \overrightarrow{AB} &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.\end{aligned}$$

Uređena trojka linearno nezavisnih vektora iz $\mathbf{X}_0$ naziva se **baza vektorskog prostora $\mathbf{X}_0$** . Posebno je pogodno ako za bazu vektorskog prostora $\mathbf{X}_0$ izaberemo baš uređenu trojku međusobno okomitih i jediničnih vektora, koje obično označavamo s $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Takav izbor baze se zove *ortonormirana baza vektorskog prostora*.

Neka vektorski prostor ima za bazu skup jediničnih vektora $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, znači da se svaki vektor prostora može na jedinstven način prikazati pomoću jediničnih vektora:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Brojeve a_x, a_y, a_z zovemo *koordinate* vektora $\vec{a}$ u bazi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Također vrijede i slične formule za jednakost i zbrajanje dva koordinatno zadana vektora, kao i množenje vektora skalarom: dani su vektori $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ i skalar λ te vrijedi:

- jednakost vektora

$$\vec{a} = \vec{b} \iff a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z,$$

- zbrajanje vektora

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k},$$

- množenje vektora skalarom

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}.$$

1. Produkt vektora

Rezultat produkta vektora u vektorskom prostoru $\mathbf{X}_0$ može biti skalar ili vektor:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \text{skalar} \\ \vec{a} \times \vec{b} &= \text{vektor}\end{aligned}$$

1.1. Skalarni produkt

Skalarno množenje u $\mathbf{X}_0$ izvodimo analognim načinom koristeći standardna svojstva iz $\mathbf{V}^2$ uz dodatak treće dimenzije tamo gdje ona postoji.

Skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednak je zbroju umnožaka odgovarajućih koordinata vektora:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Slijedi uvjet ortogonalnosti (okomitosti):
vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su ortogonalni $\iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$

Kao i formula za kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (pod uvjetom da niti $\vec{a}$ niti $\vec{b}$ nije jednak nulvektoru):

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

1.2. Vektorski produkt

Definicija 1.1. Vektorski produkt dva nenulvektora $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{X}_0$ je **vektor** $\vec{c} \in \mathbf{X}_0$ koji označavamo s $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, ima svojstva:

$$(i) \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi, \quad \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

Apsolutna vrijednost vektorskog produkta jednaka je površini paralelograma što ga zatvaraju ta dva vektora.

$$(ii) \quad \text{vektor } \vec{c} \text{ je okomit na ravninu određenu vektorima } \vec{a}, \vec{b},$$

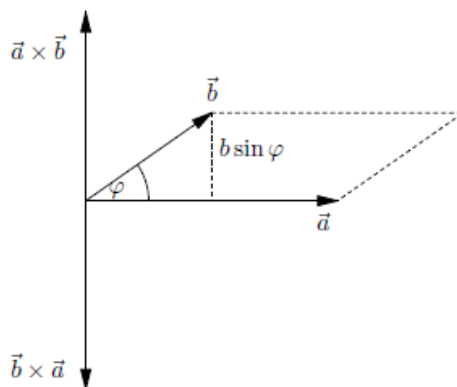
$$(iii) \quad \text{trojka } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ čini desni sustav.}$$

Ako je jedan od vektora $\vec{a}, \vec{b}$ nulvektor, vektor $\vec{c}$ također je nulvektor.

Međutim vrijedi i obrat: ako je vektorski umnožak jednak nulvektoru, vektori moraju biti kolinearni.

Naime, iz $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ slijedi $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi = 0$. Sad je ili jedan od vektora jednak nulvektoru (i onda jasno kolinearan s drugim) ili je $\sin \varphi = 0$. U tom slučaju kut između vektora jednak je $\varphi = 0^\circ$ ili $\varphi = 180^\circ$, pa su vektori kolinearni.

Pojasnimo još orijentaciju sustava: razlikujemo dvije različite orijentacije sustava - pozitivni (desni) i negativni (lijevi). Desni sustav je dobio ime po tome što raspored njegovih osiju odgovara rasporedu prva tri prsta desne ruke: ako os x usmjerimo u smjeru koji pokazuje palac desne ruke, a os y u smjeru kažiprsta, tada srednjak određuje položaj osi z .



Slika 3.2 Vektorski produkt

Vrijede još i slijedeća svojstva:

- *antikomutativnost*: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- *homogenost*: $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$
- *distributivnost s desna*: $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
distributivnost s lijeva: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ako je $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$ ili ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni
- Vrijedi (tablica množenja za ortonormiranu bazu $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ vektorskog prostora $\mathbf{X}_0$):

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Teorem 1. Za vektore $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{X}_0$ zadane u pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

vrijedi formula

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Dokaz:

Primjenom tablice množenja dobivamo:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\&= -a_y b_x \vec{k} + a_z b_x \vec{j} + a_x b_y \vec{k} - a_z b_y \vec{i} - a_x b_z \vec{j} + a_y b_z \vec{i} \\&= \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x) \\&= \vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\end{aligned}$$

odakle direktno slijedi tražena formula. ■

1.3. Mješoviti produkt

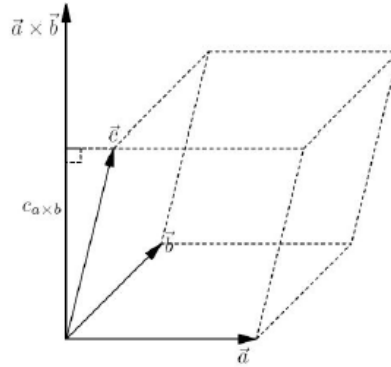
Mješoviti produkt tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{X}_0$ je realan broj definiran s:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Uporabom formule za skalarni i vektorski produkt za vektore $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$ dobivamo:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot [(b_y c_z - b_z c_y) \vec{i} + (b_z c_x - b_x c_z) \vec{j} + (b_x c_y - b_y c_x) \vec{k}] \\&= a_x(b_y c_z - b_z c_y) - a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x) \\&= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Geometrijsko značenje mješovitog produkta:



Slika 3.3

Pretpostavimo da su zadana tri linearno nezavisna vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{X}_0$ kao na slici.

Vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ je vektor okomit na ravninu određenu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a njegova duljina jednaka je površini paralelograma kojeg određuju ti vektori. Skalarni produkt možemo shvatiti kao produkt duljine vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ (površine paralelograma) i projekcije vektora $\vec{c}$ na vektor $\vec{a} \times \vec{b}$. Ovu projekciju možemo shvatiti kao visinu paralelepipeda određenog vektorima $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, a onda mješoviti produkt vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ predstavlja volumen tog paralelepipeda.

Iz definicije mješovitog produkta i njene geometrijske interpretacije neposredno slijedi tvrdnja da su tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **komplanarni** onda i samo onda ako je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

Linearna zavisnost vektora

Ovdje razlikujemo linearnu zavisnost dva vektora (kolinearnost) i linearnu zavisnost tri vektora (komplanarnost).

Po analogiji sa uvjetom zavisnosti dva vektora u ravnini, možemo zaključiti da su dva vektora u prostoru $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ i $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ linearno zavisni ako i samo ako vrijedi:

$$a_x : b_x = a_y : b_y = a_z : b_z.$$

Za provjeru linearne nezavisnosti tri vektora koristimo jednostavan kriterij: neka su dani vektori $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ i $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$, linearno su zavisni ako i samo ako je

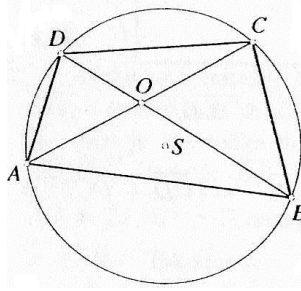
$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

2. Primjeri

Primjer 3.1. U tetivnom četverokutu $ABCD$ dijagonala $\overline{BD}$ raspolavlja dijagonalu $\overline{AC}$. Dokažite da vrijedi:

$$2|BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2.$$

Rješenje:



Slika 3.4

Ako je O sjecište dijagonala zadana četverokuta, tada je $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC}$. Također je:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}.$$

Stoga je:

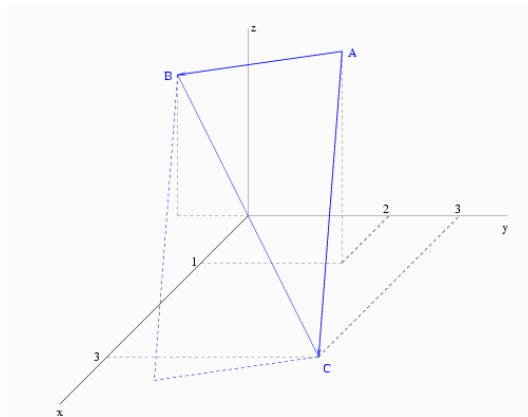
$$\begin{aligned} |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{DA}^2 \\ &= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD})^2 \\ &= \overrightarrow{OB}^2 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2 - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2 + \\ &\quad \overrightarrow{OD}^2 - 2\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OA}^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD}^2 \\ &= 2\overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{OD}^2 \\ &\quad - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} \\ &= 2|OB|^2 + 4|OA|^2 + 2|OD|^2 \\ &= 2(|OB|^2 + 2|OA| \cdot |OC| + |OD|^2) \\ &= 2(|OB|^2 + 2|OB| \cdot |OD| + |OD|^2) \\ &= 2(\overrightarrow{OB}^2 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD}^2) \\ &= 2(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB})^2 \\ &= 2\overrightarrow{BD}^2 = 2|BD|^2, \end{aligned}$$

$$\text{odnosno: } |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 2|BD|^2.$$

Primjer 3.2. Izračunajte površinu trokuta ABC zadanog s $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, -1, 2)$, $C = (3, 3, 0)$.

Rješenje:

Površina trokuta jednaka je polovici površine paralelograma razapetog s vektorima $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$.



Slika 3.5

Kako je $\vec{AB} = -\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{AC} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ vrijedi:

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \left| \vec{i}(9 + 1) - \vec{j}(3 + 2) + \vec{k}(-1 + 6) \right| = \frac{1}{2} \sqrt{150} \approx 6.12.$$

Uočimo da na jednostavan način rješavamo naočigled složen problem, jer smo našli površinu trokuta smještenog u prostoru, a nismo ga morali ni skicirati. Na isti način možemo provjeriti leže li tri točke na pravcu, jer će u tom slučaju površina trokuta biti jednaka nuli.

Na sličan način možemo izračunati površinu bilo kojeg poligonalnog lika u prostoru, jer svaki takav lik možemo rastaviti na trokute.

Primjer 3.3. Točka D uzeta je na hipotenuzi $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta ABC , okomica u D na hipotenuzu siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki E . Točka F je simetrična točki E s obzirom na točku D . Točke G i H su polovišta dužina $\overline{CD}$, odnosno $\overline{AF}$. Dokažite da je $\sphericalangle BGH$ pravi.

Rješenje:

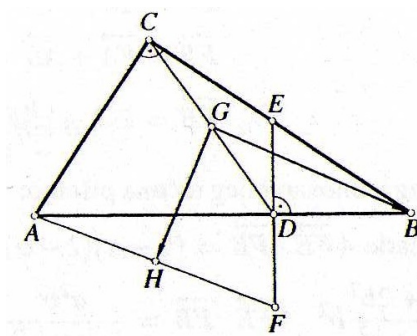
Dovoljno je pokazati da je $\overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GB} = 0$.

$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FH}$$

$$2\overrightarrow{GH} = (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DF} + (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{FH}).$$

Budući je $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{FH} = \vec{0}$ i $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{ED}$ imamo:

$$2\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{ED}.$$



Slika 3.6

Zbog $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$

vrijedi: $2\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB}$,

pa je $2\overrightarrow{GH} \cdot 2\overrightarrow{GB} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{ED})(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB})$

ili

$$4\overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{DB}$$

$$(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{DB} = 0)$$

$$= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{CB}$$

$$= \overrightarrow{CA} \cdot (\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EB}) + \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{CB}$$

$$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{CB}$$

$$(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{EB} = 0)$$

$$= \overrightarrow{ED}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})$$

$$= \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

a odatle je $\overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GB} = 0$.

Primjer 3.4. Nađite duljine dijagonala paralelograma određena vektorima $\vec{AB} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{AD} = 3\vec{j} - \vec{k}$

Rješenje:

Ako je C četvrti vrh paralelograma $ABCD$, vektori dijagonala $\vec{AC}$ i $\vec{BD}$ su jednaki:
 $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = 3\vec{i} + \vec{j}$,
 $\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB} = -3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$.

Zato je:

$$|\vec{AC}| = \sqrt{9 + 1 + 0} = \sqrt{10}, |\vec{BD}| = \sqrt{9 + 25 + 4} = \sqrt{38}.$$

Primjer 3.5. Izračunajte tangens kuta što ga čine vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ i $\vec{b} = -\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.

Rješenje:

$$\operatorname{tg}\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}}{\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}} = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{\vec{a} \cdot \vec{b}}.$$

Budući je

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) \times (-\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) \\ &= -6\vec{i} \times \vec{j} + 2\vec{i} \times \vec{k} + \vec{j} \times \vec{i} - \vec{j} \times \vec{k} - 2\vec{k} \times \vec{i} - 6\vec{k} \times \vec{j} \\ &= -6\vec{k} - 2\vec{j} - \vec{k} - \vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{i} \\ &= 5\vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k}. \end{aligned}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{25 + 16 + 49} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 + 3 + 2 = 3.$$

$$\text{Konačno: } \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{10}.$$

Primjer 3.6. Vektori $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ i $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ određuju trokut. Odredite duljinu visine trokuta spuštene na stranicu a .

Rješenje:

$$P = P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(9 + 8)\vec{k}| = \frac{17}{2}.$$

Budući da je $a = |\vec{a}| = \sqrt{9 + 16} = 5$ i $2P = a \cdot v_a$, slijedi:

$$v_a = \frac{2P}{a} = \frac{17}{5}.$$

Poglavlje 4

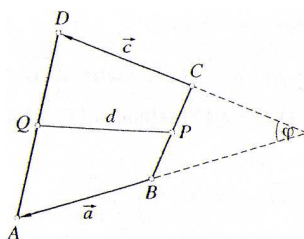
Primjena vektora u planimetriji i stereometriji

U nekoliko primjera prikazana je primjena vektora u planimetriji i stereometriji u zadacima gdje se se riječ *vektor* ne spominje, a koristi se u rješavanju zadanog problema.

Zadaci poput Primjera 4.1 i 4.2 su pogodni za teže zadatke na pismenim ispitima u trećem razredu matematičke gimnazije. Primjeri 4.3, 4.4, 4.5 i 4.7 odgovaraju primjerima zadataka kakvi se pojavljuju na natjecanjima iz matematike u četvrtom razredu srednje škole, dok se Primjer 4.6 može pojaviti na pismenom ispitu na prvoj godini studija.

Primjer 4.1. *Duljine dviju nasuprotnih stranica konveksnog četverokuta su $|AB| = a$ i $|CD| = c$, te kut tih dviju stranica φ . Izračunajte udaljenost polovišta drugih dviju stranica četvarokuta $ABCD$. Koja je planimetrijska interpretacija posebna slučaja $\varphi = 90^\circ$?*

Rješenje:



Slika 4.1

Polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{DA}$ označimo s P , odnosno Q , a udaljenost $|PQ| = d$.

Neka je $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$, tada je

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AQ};$$

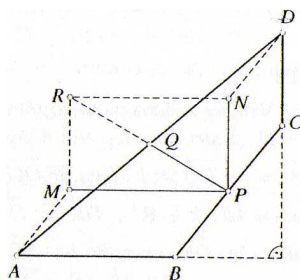
$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DQ}.$$

Zbrajanjem i kvadriranjem ovih jednakosti dobivamo:

$$2\overrightarrow{PQ}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD};$$

$$d = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\varphi}.$$

U posebnom slučaju $\varphi = 90^\circ$ imamo: $(2d)^2 = a^2 + c^2$ što se lako planimetrijski pokaže:



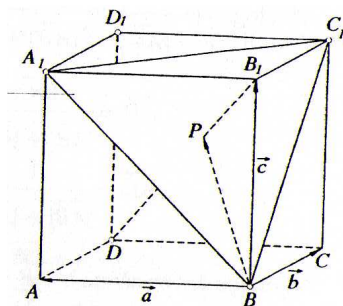
Slika 4.2

Neka je $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{BA} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{CD} = \vec{c}$, tada je očito da vrijedi:

$$\overrightarrow{PR} = 2\overrightarrow{PQ} = \vec{a} + \vec{c} \implies (2d)^2 = a^2 + c^2.$$

Primjer 4.2. Dijagonala $\overline{DB_1}$ kocke $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ siječe ravninu određenu točkama A_1, B i C_1 u točki P . U kojem omjeru točka P dijeli dijagonalu $\overline{DB_1}$?

Rješenje:



Slika 4.3

Neka je $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{c}$ ($|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$).

Vektor $\overrightarrow{BP}$ leži u ravnini A_1BC_1 , te je linearno zavisn s vektorima $\overrightarrow{BA_1}$ i $\overrightarrow{BC_1}$, tj. postoje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tako da je:

$$\overrightarrow{BP} = \alpha \overrightarrow{BA_1} + \beta \overrightarrow{BC_1} = \alpha(\vec{a} + \vec{c}) + \beta(\vec{b} + \vec{c}) = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + (\alpha + \beta)\vec{c}$$

Također:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BP} &= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DP} \\ &= \overrightarrow{BD} + \gamma \overrightarrow{DB_1} \\ &= \overrightarrow{BD} + \gamma(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BB_1}) \\ &= (1 - \gamma)\overrightarrow{BD} + \gamma\overrightarrow{BB_1} \\ &= (1 - \gamma)(\vec{a} + \vec{b}) + \gamma\vec{c} \\ &= (1 - \gamma)\vec{a} + (1 - \gamma)\vec{b} + \gamma\vec{c}. \end{aligned}$$

Iz:

$$\overrightarrow{BP} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + (\alpha + \beta) \vec{c} \text{ i } \overrightarrow{BP} = (1 - \gamma) \vec{a} + (1 - \gamma) \vec{b} + \gamma \vec{c}$$

dobijemo:

$$1 - \gamma = \alpha,$$

$$1 - \gamma = \beta,$$

$$\alpha + \beta = \gamma,$$

a odatle:

$$2 - 2\gamma = \alpha + \beta;$$

$$2 - 2\gamma = \gamma$$

$$\gamma = \frac{2}{3},$$

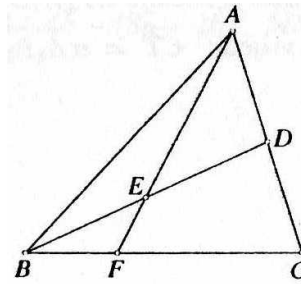
što znači da je: $\overrightarrow{DP} = \frac{2}{3} \overrightarrow{DB_1}$, pa je $\overrightarrow{PB_1} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DB_1}$, a odatle: $|DB| : |PB_1| = 2 : 1$.

Točka P dijeli dijagonalu $\overrightarrow{DB_1}$ u omjeru $2 : 1$.

Primjer 4.3. Dokažite da pravac koji prolazi vrhom A trokuta ABC i polovištem težišnice $\overrightarrow{BD}$ dijeli stranicu $\overrightarrow{BC}$ u omjeru $2 : 1$.

Rješenje:

Označimo: $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, tada je $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \vec{b} - \vec{c}$.



Slika 4.4

Vrijede jednakosti:

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{b} - \vec{c} - \frac{1}{2} \vec{b} = \frac{1}{2} \vec{b} - \vec{c},$$

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} = \frac{1}{4} \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{c},$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \vec{c} + \frac{1}{4} \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{c} = \frac{1}{2} \vec{c} + \frac{1}{4} \vec{b},$$

$$\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{AE}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nadalje, vrijedi:

$$\overrightarrow{BF} = \mu \overrightarrow{BC} = \mu \vec{b} - \mu \vec{c},$$

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = -\vec{c} + \lambda \overrightarrow{AE} = -\vec{c} + \lambda \left(\frac{1}{2} \vec{c} + \frac{1}{4} \vec{b} \right) = \frac{\lambda}{4} \vec{b} + \left(\frac{\lambda}{2} - 1 \right) \vec{c}.$$

Iz te dvije jednakosti proizlazi da je:

$$\mu = \frac{\lambda}{4} \text{ i } -\mu = \frac{\lambda}{2} - 1$$

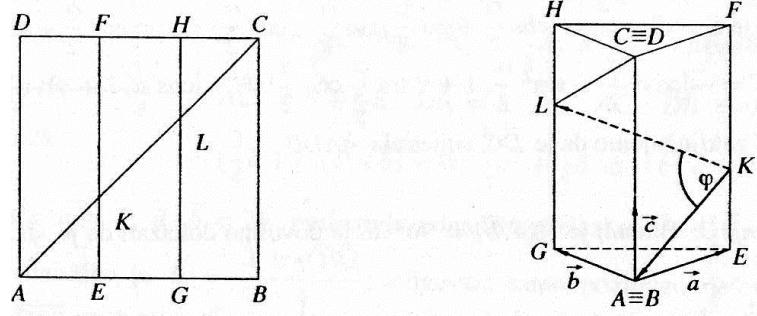
$$\frac{\lambda}{4} = -\frac{\lambda}{2} + 1$$

$$\lambda = \frac{4}{3} \implies \mu = \frac{1}{3}.$$

$$\overrightarrow{BF} = \mu \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} \implies \overrightarrow{FC} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC} \implies |BF| : |CF| = 1 : 2.$$

Primjer 4.4. Kvadrat $ABCD$ podijeljen je s dvije usporednice na tri sukladna pravokutnika. Od toga kvadrata načini se trostrana prizma kojoj su te usporednice pobočni bridovi. Izračunajte kut što ga sada čine dva susjedna dijela dijagonale $\overline{BD}$ (podijeljena navedenim usporednicama).

Rješenje:



Slika 4.5

Uz oznake kao na slikama treba izračunati $\varphi = \angle(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KL})$.

Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AG}$, $\vec{c} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, tada je $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$,

$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$, $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = \angle(\vec{b}, \vec{c}) = 90^\circ$,

zato je :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}a^2, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0.$$

$$\overrightarrow{KA} = -\vec{a} - \vec{c},$$

$$\overrightarrow{KL} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c},$$

$$|\overrightarrow{KA}| = \sqrt{(-\vec{a} - \vec{c})^2} = a\sqrt{2},$$

$$|\overrightarrow{KL}| = \sqrt{(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2} = a\sqrt{2}.$$

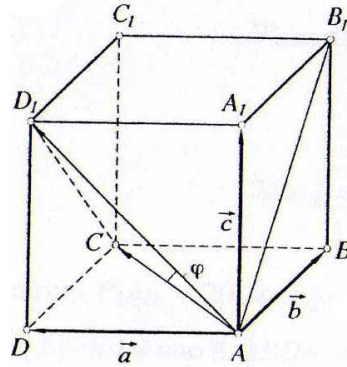
$$\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KL} = (-\vec{a} - \vec{c})(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}^2 - \vec{a}\vec{b} - \vec{a}\vec{c} + \vec{a}\vec{c} - \vec{b}\vec{c} - \vec{c}^2 = -\frac{1}{2}\vec{a}^2.$$

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KL}}{|\overrightarrow{KA}| \cdot |\overrightarrow{KL}|} = \frac{-\frac{1}{2}\vec{a}^2}{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}} = -\frac{1}{4}$$

$$\varphi = 104^\circ 28' 39''.$$

Primjer 4.5. Izračunajte kut kojeg zatvaraju dvije plošne dijagonale povučene iz jednog vrha kocke.

Rješenje:



Slika 4.6

Iz vrha A kocke mogu se povući tri plošne dijagonale: $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD_1}$ i $\overrightarrow{AB_1}$.

Izračunajmo $\varphi = \angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD_1})$.

Ako je $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$,

tada je $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AD_1} = \vec{a} + \vec{c}$.

Za vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vrijedi: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$, $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a} = 0$.

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{c})}{|\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{a} + \vec{c}|} = \frac{\vec{a}^2 + \vec{a}\vec{c} + \vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c}}{\sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} \cdot \sqrt{(\vec{a} + \vec{c})^2}} = \frac{a^2}{(\sqrt{2}a)^2},$$

jer je $(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{c})^2 = 2a^2$.

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Isto se tako pokaže da je $\angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}) = \angle(\overrightarrow{AD_1}, \overrightarrow{AB_1}) = \frac{\pi}{3}$.

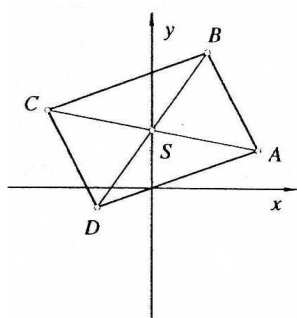
Zadatak ima jednostavno geometrijsko rješenje.

Trokut ACD_1 je jednakostraničan, jer su mu sve tri stranice dijagonale sukladnih kvadrata, pa je $\varphi = 60^\circ$.

Isto vrijedi i za trokute ACB_1 i AD_1B_1 .

Primjer 4.6. Zadane su točke $A(6,1)$ i $B(3,4)$. Odredite koordinate preostala dva vrha paralelograma $ABCD$, čije se dijagonale sijeku na osi y , a čija je površina jednaka $P = 30$.

Rješenje:



Slika 4.7

Ako je S sjecište dijagonala promatrana paralelograma.

Tada je $S(0, y)$.

$$P = 4 \cdot P_{SBA} = 4 \cdot \frac{1}{2} |\vec{SA} \times \vec{SB}| \text{ ili } |\vec{SA} \times \vec{SB}| = 15.$$

$$\begin{aligned} \vec{SA} &= 6\vec{i} + (1 - y)\vec{j}, \\ \vec{SB} &= 3\vec{i} + (4 - y)\vec{j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{SA} \times \vec{SB} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 1 - y & 0 \\ 3 & 4 - y & 0 \end{vmatrix} \\ &= [6(4 - y) - 3(1 - y)]\vec{k} \\ &= (21 - 3y)\vec{k}. \end{aligned}$$

$$|\vec{SA} \times \vec{SB}| = |21 - 3y| = 15$$

$$21 - 3y = \pm 15$$

$$y = 7 \pm 15$$

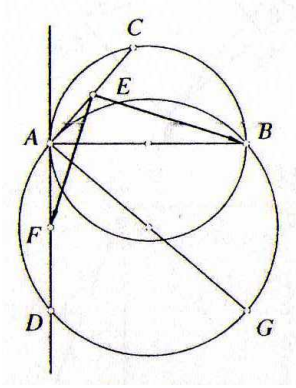
$$y_1 = 2, y_2 = 12.$$

$S_1(0, 2)$, pa je $C_1(-6, 3)$ i $D_1(-3, 0)$.

$S_2(0, 12)$, pa je $C_2(-6, 23)$ i $D_2(-3, 20)$.

Primjer 4.7. Dvije kružnice sijeku se tako da im je zajednička tetiva promjer jedne od njih. U jednoj točki tog promjera povuku se tangente na obje kružnice koje na svakoj od njih određuju po jednu tetivu. Dokažite da je trokut kojemu su vrhovi polovišta tih tetiva i druga rubna točka promjera, pravokutan.

Rješenje:



Slika 4.8

Treba pokazati da je trokut FBE pravokutan trokut.

Uz oznake kao na slici dovoljno je pokazati da je $\overrightarrow{EB} \perp \overrightarrow{EF}$, odnosno da je $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$.

Pri tome ćemo koristiti očite jednakosti:

$$(*) \quad \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AG} = 0.$$

Polazimo od:

$$2\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$$

$$2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED}$$

a odatle je:

$$\begin{aligned} 4\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{EA}^{(*)} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{ED} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}^{(*)} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}^{(*)} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EA} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EA} \\ &= 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{CB}^{(*)} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= 2\overrightarrow{EA}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \\ &= 2\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AG}^{(*)} = 0, \end{aligned}$$

tj. $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$ te je trokut FBE pravokutan.

Bibliografija

- [1] V. BAJROVIĆ, *Matematika 8, udžbenik i zbirka zadataka za osmi razred osnovne škole, 2. dio*, Element, Zagreb, 2006.
- [2] B. DAKIĆ, N. ELEZOVIĆ, *Matematika 3, 2. dio*, Element, Zagreb, 2006.
- [3] B. DAKIĆ, N. ELEZOVIĆ, *Matematika 3, dodatak za 3. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije*, Element, Zagreb, 2009.
- [4] M. HALAPA, *Matematika i fizika*
- dostupno na:
<http://www.halapa.com/matpdf/25ms001.pdf>
<http://www.halapa.com/matpdf/25ms041.pdf>
- [5] A. MARIĆ, *Vektori - zbirka riješenih zadataka*, Element, Zagreb, 1997.
- [6] T. NEMETH, G. STAJČIĆ, *Matematika 8, udžbenik i zbirka zadataka za osmi razred osnovne škole, 2. polugodište*, Profil, Zagreb, 2007.
- [7] R. SCITOVSKI, *Geometrija ravnine i prostora (Vektori u ravnini i prostoru)*,
- dostupno na: http://www.mathos.unios.hr/geometrija/Materijali/Geo_1.pdf
- [8] I. SLAPNIČAR, *Matematika 1*, FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I BRODOGRADNJE U SPLITU
- dostupno na: <http://lavica.fesb.hr/mat1>
- [9] MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA
Nastavni planovi i programi za osnovnu i srednje školu, Nacionalni okvirni kurikulum,
- dostupno na: <http://public.mzos.hr>

Sažetak

Vektor je pojam koji je uveden da bi se razlikovale veličine koje se pojavljuju u prirodi, a imaju duljinu, smjer i orijentaciju. Poistovjećujemo ga sa usmjerenom dužinom $\overline{AB}$, a označavamo $\vec{AB}$.

Povijesno područje primjene vektorskih operacija počinje u klasičnoj mehanici, gdje se vektorima pregledno opisuju sile i formuliraju fizikalni zakoni. Povijesni kutak ukratko opisuje razvoj vektora.

Danas su dalekosežna poopćenja vektorskog računa polazna osnova gotovo u svim granama matematike, tehnike i teorijske fizike.

U drugom poglavlju nalaze se temeljni pojmovi i primjeri koje učenici trebaju savladati u osnovnoj i srednjoj školi. Treće i četvrto poglavlje sadrži obilje primjera primjene vektora u rješavanju raznih zadataka u kojima je vektorski račun jedan od načina rješenja danih problema.

Summary

Vector is a term that has been introduced to distinguish variables that occur in nature. It has a length, direction and orientation. We identify it with directional length $\overline{AB}$ and represent it with $\overrightarrow{AB}$.

The historical area of application of vector operations started in classical mechanics, where the force vectors clearly describe and formulate physical laws. Historic Corner briefly describes the development of vectors.

Today, the sweeping generalizations of vector account baseline in almost all branches of mathematics and theoretical physics techniques.

The second chapter provides basic concepts and examples that students should master in the elementary and high school. The third and fourth chapters contain a wealth of examples of vector in solving various tasks in vector calculus which is one of the ways of solution of given problems.

Životopis

Rođena sam 31. prosinca 1986. godine u Požegi. Osnovnu školu fra Kaje Adžića u Pleternici upisala sam 1993. godine. Svoje osnovnoškolsko obrazovanje završila sam 2001. godine. Iste godine upisala sam Ekonomsku školu u Požegi koju uspješno završavam 2005. godine. U srpnju iste godine upisujem Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Trenutno sam zaposlena u Osnovnoj školu fra Kaje Adžića u Pleternici.