Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Emanuela Vrban

Konstrukcije ravnalom i šestarom

Diplomski rad

Osijek, 2013.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Emanuela Vrban

Konstrukcije ravnalom i šestarom

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Matić

Komentor: dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2013.

Sadržaj

Uvod

Geometrijske konstrukcije su dio geometrije u ravnini (planimetriji) koji planimetrijske probleme rješava konstruktivnom metodom. Osnovni objekti (euklidske) geometrije u ravnini su točke, pravci i ravnine i njih smatramo intuitivno jasnim tvorevinama. Svi ostali objekti se iz njih mogu izgraditi. Točke i pravci se ne definiraju, već su oni indirektno definirani svojim svojstvima koja se opisuju sistemom aksioma.

Kroz povijest su mnogi matematičari pokušavali riješiti geometrijske konstrukcije koristeći ravnalo i šestar. Ovaj diplomski rad za cilj ima ukratko opisati i navesti neke primjere takvih konstrukcija.

U radu ćemo prvo obraditi osnovno o geometrijskim konstrukcijama te rješivosti konstrukcija ravnalom i šestarom. Dokazat ćemo Mohr-Mascheronijev teorem koji tvrdi da su pojedine konstrukcije rješive samo šestarom te Poncelet-Steinerov teorem koji tvrdi da su pojedine konstrukcije izvedive samo uporabom jednobridnog ravnala. Na samom kraju rada osvrnut ćemo se na geometriju u nastavi matematike i navest ćemo nekoliko primjera srodnih zadataka.

Poglavlje 1

Geometrijske konstrukcije

Geometrijske konstrukcije su dio geometrije u ravnini (planimetriji) koji planimetrijske probleme rješava konstruktivnom metodom.

Definicija 1. *Bilo koji podskup točaka promatrane ravnine* Π *zvat ćemo geometrijskom figurom ravnine* Π.

Konstruirati neku figuru znači "nacrtati" tu figuru. Za konstrukciju geometrijskih figura trebamo instrumente (sprave, pomagala) kao što su ravnalo i šestar.

Euklidske konstrukcije su one konstrukcije kod kojih je dopušteno upotrebljavati jednobridno ravnalo i šestar.

Aksiomi konstruktivne geometrije

1. Svaka zadana figura je konstruirana.
2. Ako su konstruirane dvije ili više figura, onda je konstruirana i njihova unija.
3. Ako su konstruirane dvije figure, onda se može ustanoviti je li njihova razlika prazan skup ili nije. U slučaju da ta razlika nije prazan skup, ta je razlika konstruirana.
4. Ako su konstruirane dvije ili više figura, onda se može ustanoviti je li njihov presjek prazan skup ili nije. U slučaju da taj presjek nije prazan skup, onda je taj presjek konstruiran.
5. Ako je dana neka neprazna figura, onda je moguće konstruirati točku koja pripada toj figuri.

Aksiomi instrumenata
Ovi aksiomi omogućavaju da se izvedu tzv. fundamentalne konstrukcije.

Aksiomi ravnala - Ravnalom se mogu izvršiti sljedeće konstrukcije:

1. konstrukcija dužine ako su dani krajevi te dužine,
2. konstrukcija polupravca s danom početnom točkom koji prolazi kroz drugu danu točku,

3. konstruirati pravac kroz dvije dane točke.

Aksiomi šestara - Šestarom se mogu izvršiti sljedeće konstrukcije:

1. konstrukcija kružnice ako je dano središte i njen polumjer,
2. konstrukcija bilo kojeg od dva luka kružnice odredenih s dvije točke kružnice ako je dano središte kružnice i krajnje točke toga luka.

Ravnalom nam je dopušteno crtati pravac kroz dvije točke, crtati dužinu ako su poznate krajnje točke i crtati zraku od dane početne točke kroz drugu danu točku.

Šestarom možemo nacrtati svaki od dva kružna luka ako su mu poznate krajnje točke i središte.

Euklidovi postulati:

1. Od svake točke do svake točke može se povući pravac.
2. Ograničeni pravac može se neprekidno produžavati po pravcu.
3. Iz svakog središta sa svakom udaljenošću može se opisati kružnica.
4. Svi pravi kutovi međusobno su jednaki.
5. Ako pravac koji siječe dva druga pravca tvori s njima s iste strane unutarnje kutove čiji je zbroj manji od dva prava kuta, ta dva pravca neograničeno produžena sastaju se s one strane na kojoj je taj zbroj manji od dva prava kuta; odnosno: Točkom izvan pravca može se povući točno jedan pravac paralelan s tim pravcem.

Prva tri Euklidova postulata nam sugeriraju i dopuštaju upotrebu ravnala i šestara pa konstrukcije pomoću ravnala i šestara zovemo još i "Euklidske konstrukcije".

Temeljne operacije koje je moguće izvesti upotrebom ravnala i šestara

1. konstrukcija pravca kroz dvije dane različite točke;
2. konstrukcija sjecišta dvaju danih neparalelnih pravaca od kojih je jedan zadan s dvije različite točke;
3. konstrukcija kružnice sa središtem u danoj točki koja prolazi kroz drugu danu točku;
4. konstrukcija dvaju sjecišta dane kružnice i jednog pravca (koji siječe tu kružnicu) koji je zadan s dvije svoje različite točke; konstrukcija dvaju sjecišta danog pravca i jedne kružnice (koja siječe taj pravac) koja je zadana svojim središtem i jednom svojom točkom;
5. konstrukcija sjecišta jedne dane kružnice i još jedne kružnice (koja siječe prvu kružnicu) koja je zadana svojim središtem i još jednom svojom točkom.

Definicija 2. *Svaki slijed od konačno mnogo izvedenih osnovnih operacija zvat ćemo konstrukcijom pomoću ravnala i šestara, odnosno euklidskom konstrukcijom.*

Definicija 3. *Konstruktivni zadatak sastoji se u tome da se konstruira neka figura odabranim dopuštenim pomagalima (ravnalo i šestar), ako je dana neka druga figura i izvjesni odnosi među dane i tražene figure.*

Bilo koju figuru koja zadovoljava u zadatku postavljene uvijete zovemo rješenjem zadatka, a opisuje se nizom fundamentalnih konstrukcija.
Zadatak može imati jedno ili više rješenja. Zadatak može biti:

- *određeni* - ako postoji konačan broj rješenja;
- *neodređeni* - ako postoji beskonačno mnogo rješenja;
- *preodređeni* -ima rješenja, ali je dano više uvijeta nego što je potrebno tako da ne postoji figura koja zadovoljava sve uvijete;
- *nema rješenja* - ne postoji figura koja zadovoljava početne uvijete.

Konstruktivna zadaća je elementarno rješiva ako je rješiva fundamentalnim konstrukcijama tj. ravnalom i šestarom.
Rješenje konstruktivne zadaće treba sadržavati:
Analizu - traženje načina za rješavanje zadaće, ispituju se veze između dane i tražene figure.
Konstrukciju - na temelju analize konstruira se rješenje.
Dokaz - pokazuje se da dobivena figura zadovoljava sve uvjete zadaće i da je svaki korak u konstrukciji moguć.
Diskusiju - ispituju se svi međusobni položaji danih elemenata koji mogu doći u obzir.

Poglavlje 2

Rješivost konstrukcija ravnalom i šestarom

U ravnini je dana jedinična dužina $\overline{OE}$ čiju duljinu (mjerni broj) označavamo sa 1, dane su još dvije dužine s mjernim brojevima a i b. Pomoću ovih dužina možemo konstruirati dužinu sa mjernim brojem x tako da je

$$x = a + b,\ x = a - b,\ x = n \cdot a,\ x = \frac{a}{n},\ x = a \cdot b,\ x = \frac{a}{b},\ x = \sqrt{a},$$

gdje je n prirodan broj veći od 1. Odnosno, od zadanih dužina možemo konstruirati dužine kojima je mjerni broj jednak zbroju, razlici, umnošku i kvocijentu dviju danih dužina što znači da s tim dužinama možemo izvoditi racionalne operacije te vađenje kvadratnog korijena.

Na temelju ovih razmatranja možemo zaključiti:

Teorem 1. *Ako je x neki nenegativni realni broj koji možemo dobiti pomoću konačno mnogo racionalnih operacija i konačno mnogo vađenja kvadratnih korijena iz mjernih brojeva konačno mnogo danih dužina, tada možemo iz danih dužina pomoću ravnala i šestara konstruirati dužinu čiji mjerni broj je jednak x.*

Ovaj teorem nam kaže da je prikaz broja x pomoću konačno mnogo racionalnih operacija i konačno mnogo vađenja kvadratnog korijena iz mjernih brojeva konačno mnogo danih dužina dovoljan uvijet za mogućnost konstruiranja dužine sa mjernim brojem x iz konačno mnogo danih dužina pomoću ravnala i šestara.

Iskažimo i dokažimo sada i obrat prethodnog teorema.

Teorem 2. *Ako se iz danih dužina s mjernim brojevima m_1, m_2,...,m_n može pomoću ravnala i šestara konstruirati dužina mjernog broja m', tada se ta dužina m' može izračunati iz mjernih brojeva m_1, m_2,...,m_n pomoću konačno mnogo racionalnih operacija i konačno mnogo vađenja kvadratnih korijena.*

<u>*Dokaz:*</u>

Svaka konstrukcija se provodi nizom temeljnih operacija spajanja i sječenja kružnica i pravaca. Provedimo temeljne operacije analitičkom metodom u koordinatnom sustavu.

1. Spojnica danih točaka (a_1, b_1) i (a_2, b_2).

   Jednadžba pravca koji prolazi kroz obje dane točke glasi

$$ax + by + c = 0,$$

   gdje je

$$a = b_1 - b_2,\ b = a_2 - a_1,\ c = a_1 b_2 - b_1 a_2.$$

2. Sjecište (x_s, y_s) dvaju neparalelnih pravaca

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0.$$

   Koordinate sjecišta su ovdje

$$x_s = \frac{b_1 c_2 - c_1 b_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2},\ y_s = \frac{c_1 a_2 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}.$$

   Za neparalelne pravce mora još vrijediti $a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0$

3. Kružnica dana se središtem (a_M, b_M) i jednom njenom točkom (a_1, b_1).

   Jednadžba kružnice je oblika

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

   gdje je

$$a = -2a_M,\ b = -2b_M,\ c = a_M^2 + b_M^2 - (a_M - a_1)^2 - (b_M - b_1)^2.$$

4. Koordinate sjecišta (x_s, y_s) pravca $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ i kružnice $x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$.

   Rješavanjem ovih jednadžbi u slučaju $b_1 \neq 0$ dobivamo

$$x_s = -\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC},\quad y_s = -\frac{a_1}{b_1}x_s - \frac{c_1}{b_1},$$

   gdje je

$$A = a_1^2 + b_1^2,\ B = b_1^2 a_2 + 2a_1 c_1 - a_1 b_1 b_2,\ C = c_1^2 - b_1 c_1 b_2 + b_1^2 c_2.$$

   U slučaju $b_1 = 0$ i $a_1 \neq 0$ imamo

$$x_s = -\frac{c_1}{a_1},\quad y_s = -\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC},$$

   gdje je

$$A = a_1^2,\ B = a_1^2 b_2,\ C = c_1^2 - a_1 c_1 a_2 + a_1^2 c_2.$$

   U oba slučaja je $A > 0$ i ako tražena sjecišta postoje, tj. ako su realna onda i u oba slučaja vrijedi $B^2 - 4AC > 0$.

5. Sjecišta dviju kružnica

$$x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \;\; i \;\; x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Sjecišta tih dviju kružnica su ujedno i sjecišta bilo koje od tih kružnica i pravca

$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0.$$

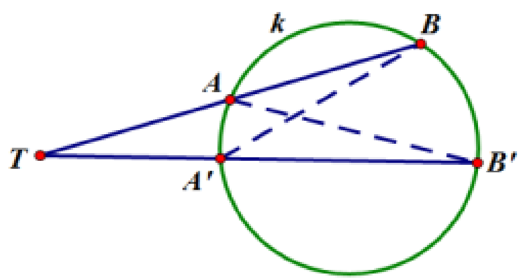
Taj pravac je potencijala tih dviju kružnica pa je ova konstrukcija svedena na prethodnu konstrukciju.

Definicija 4. *Neka je $k(O, r)$ kružnica i T bilo koja točka ravnine. Povucimo točkom T bilo koji pravac koji siječe kružnicu u točkama A i B. Realan broj $|TA|\cdot|TB|$ zovemo potencija točke obzirom na kružnicu k, ako je T izvan k ili unutar k.*

Potencija točke T ne ovisi o izboru pravca kroz T. Povucimo drugi pravac kroz T koji siječe kružnicu u točkama A' i B'. Tada je $\sphericalangle TBA' = \sphericalangle AB'T$, tj. obodni kutovi nad istim lukom su jednaki. Slijedi da su trokuti $\triangle\, TA'B \sim \triangle\, TAB'$ pa imamo

$$\frac{|TA|}{|TB'|} = \frac{|TA'|}{|TB|} \Rightarrow |TA| \cdot |TB| = |TA'| \cdot |TB'|,$$

čime je pokazano da je definicija dobra.
Ako je točka na kružnici onda je njena potencija obzirom na kružnicu jednaka 0. Ako je T vanjska točka onda je potencija točke T s obzirom na kružnicu jednaka kvadratu duljine tangente povučene na kružnicu.



Slika 1: **Potencija točke T s obzirom na kružnicu k**

Definicija 5. *Neka su $k(O_1, r_1)$ i $k(O_2, r_2)$ dvije kružnice. Skup svih točaka ravnine koje imaju jednake potencije obzirom na te kružnice zove se potencijala ili radikalna os tih kružnica.*

Rezultati analitičkog promatranja ovih temeljnih operacija su izrazi koje smo dobili primjenom osnovnih racionalnih operacija i vađenja kvadratnog korijena. Ako je dužina sa mjernim brojem m' dobivena iz dužina s mjernim brojevima m_1,m_2,...,m_n konstrukcijom pomoću ravnala i šestara (konačnim brojem temeljnih operacija), tada se broj m' dade izračunati iz brojeva m_1,m_2,...,m_n pomoću konačno mnogo racionalnih operacija i konačno mnogo vađenja kvadratnog korijena, čime je teorem dokazan.

Prethodnim teoremima je dokazano da je *mogućnost prikaza broja* m' *iz brojeva* m_1,m_2,...,m_n *s konačno mnogo racionalnih operacija i konačno mnogo vađenja kvadratnih korijena nužan i dovoljan uvijet za mogućnost konstruiranja dužine čiji je mjerni broj* m' *iz danih dužina s mjernim brojevima* m_1,m_2,...,m_n *pomoću ravnala i šestara.*

Pitanje rješivosti i nerješivosti geometrijskih konstrukcija ravnalom i šestarom rješavamo algebarskim putem.
Na taj način se kod mnogih geometrijskih konstrukcija mogla dokazati njihova nerješivost ravnalom i šestarom. U pojedinom slučaju takvi dokazi su vrlo složeni, a mi ćemo se ograničiti na neke jednostavnije i poznatije slučajeve.

Definicija 6. *Za neki broj* x *kažemo da je konstruktibilan iz brojeva*

$$a_1, a_2, ..., a_n,$$

ako se taj broj x *može izračunati iz* a_1,a_2,...,a_n *pomoću konačno mnogo racionalnih operacija i konačno mnogo vađenja kvadratnih korijena.*

Npr. broj $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ je konstruktibilan iz racionalnih brojeva. Svaki racionalan broj je konstruktibilan iz broja 1, pa je i broj $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ konstruktibilan iz broja 1.

Za dokaz sljedećeg teorema potrebno nam je proširenje polja racionalnih brojeva takozvanom adjunkcijom jednog elementa. Neka je dano jedno polje K. Adjungiramo jedan element tog polja kako bi dobili element $\sqrt{k}$ ($k \in K, \sqrt{k} \notin K$) koji dobijemo pomoću vađenja kvadratnog korijena nekog elementa iz K. Svi elementi oblika $a+b\cdot\sqrt{k}$ čine polje K', koje je proširenje polja K. Ako je $a + b \cdot \sqrt{k} = 0$, tada zbog $\sqrt{k} \notin K$ slijedi $a = 0$ i $b = 0$.

Teorem 3. *Ako kubna jednadžba*

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

s racionalnim koeficijentima nema ni jedno racionalno rješenje, onda ni jedno njeno rješenje nije konstruktibilno iz racionalnih brojeva.

<u>Dokaz:</u>

Označimo polje racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ sa K_0 i neka postoji jedno rješenje x_1 kubne jednadžbe koje je konstruktibilno iz racionalnih brojeva. Tada bi to rješenje pripadalo nekom proširenju polju K_n ($n \geq 1$) kojega dobijemo adjunkcijom polju K_0, od n kvadratnih korijena. Rješenje x_1 bismo mogli prikazati u obliku $x_1 = p + q \cdot \sqrt{w}$ ($p, q, w \in K_{n-1}, \sqrt{w} \notin K_{n-1}$). No, lako se vidi da je

$$x_2 = p - q \cdot \sqrt{w}$$

također rješenje jednadžbe. Naime, zbog

$$x_1 = p + q \cdot \sqrt{w}$$

dobivamo

$$x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = a + b\sqrt{w}$$

gdje je

$$a = p^3 + 3pq^2w + a_2 \cdot (p^2 + q^2w) + a_1p + a_0 \in K_{n-1},$$

$$b = 3p^2q + q^3w + a_2 \cdot 2pq + a_1q \in K_{n-1}.$$

Kako je x_1 rješenje jednadžbe, slijedi $a + b \cdot \sqrt{w} = 0$ što povlači $a = 0$ i $b = 0$, pa bi time bilo i

$$x_2^3 + a_2x_2^2 + a_1x_1 + a_0 = a - b\sqrt{w} = 0.$$

Oba rješenja x_1 i x_2 bila bi različita, što znači $x_1 - x_2 = 2q\sqrt{w} \neq 0$, jer bi inače bilo $q = 0$, a to bi značilo da je $x_1 = x_2 = p \in K_{n-1}$ što je suprotno sa svojstvom od K_n.

Prema Vièteovim formulama je

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a_2,$$

što znači

$$x_3 = -a_2 - (x_1 + x_2) = -a_2 - 2p,$$

što bi značilo da je $x_3 \in K_{n-1}$ i x_3 bi bilo jedno rješenje konstruktibilno iz racionaalnih brojeva. Ponavljanjem postupka za x_3 dolazimo do zaključka da je $x_1 \in K_{n-2}$ što je kontradikcija. Pretpostavka je bila pogrešna pa nema konstruktibilnog rješenja iz racionalnih brojeva ako ta jednadžba nema racionalnog rješenja. ■

Ovaj teorem ćemo upotrijebiti kod dokaza nerješivosti u obliku obrata ovog teorema: Ako neka kubna jednadžba ($x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$) s racionalnim koeficijentima ima iz racionalnih brojeva konstruktibilno rješenje, tada je najmanje jedno njeno rješenje racionalno.

Sada slijedi:

Rješenja jednadžbe $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ konstruktibilna su ako i samo ako ona ima racionalni korijen.

Teorem 4. *Ako neka kubna jednadžba*

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

s cjelobrojnim koeficijentima ima racionalno rješenje x_1, tada je taj x_1 cijeli broj i djelitelj od a_0.

<u>*Dokaz:*</u>

Neka je x_1 jedno racionalno rješenje jednadžbe. To rješenje možemo pisati u obliku $x_1 = \frac{l}{m}$ (l, $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$, najveći zajednički djelitelj od l i m je 1). Kako je x_1 rješenje, slijedi

$$l^3 + a_2l^2m + a_1lm^2 + a_0m^3 = 0$$

odakle dalje slijedi

$$l^3 = -m \cdot (a_2l^2 + a_1lm + a_0m^2)$$

i odatle $m = 1$ jer m i l nemaju zajedničkih djelitelja većih od 1. Iz prethodne jednakosti slijedi također

$$a_0m^3 = -l \cdot (l^2 + a_2lm + a_1m^2)$$

i odatle vidimo da je l djelitelj od a_0.

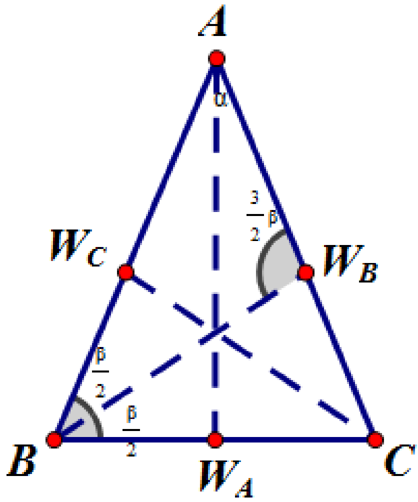
Napokon na temelju prikaza $x_1 = \frac{l}{m}$ slijedi tvrdnja teorema.

Korištenjem prethodnih diskusija možemo dokazati nerješivost nekih geometrijskih konstrukcija pomoću ravnala i šestara. Evo i primjera:

Primjer 1. *Zadane su uz danu jediničnu dužinu tri dužine sa svojim mjernim brojevima (duljinama)*

$$w_\alpha = |AW_A|; \quad w_\beta = |BW_B|; \quad w_\gamma = |CW_C|.$$

Neka su te dužine zadane tako da postoji trokut $\triangle\ ABC$ *kojemu su ove tri dužine simetrale unutarnjih kutova.*



Slika 2: **Nerješivost konstrukcije trokuta ako su mu zadane simetrale kutova**

Rješenje:

Pomoću ravnala i šestara konstruirajmo trokut kojemu su zadane dužine w_α, w_β, w_γ simetrale unutarnjih kutova.

Dokaz nerješivosti:

Dovoljno je dokazati za samo jednu posebnu trojku dužina w_α, w_β, w_γ, za koju postoji trokut $\triangle\ ABC$ takav da su mu to simetrale unutarnjih kutova, da nije moguće konstruirati ravnalom i šestarom takav trokut $\triangle\ ABC$.

Lako je za provjeriti da za $w_\alpha = \frac{1}{2}$, $w_\beta = w_\gamma = 2$ postoji jednakokračan trokut $\triangle\ ABC$ s takvim simetralama unutarnjih kutova. Možemo zadati za simetralu kuta α dužinu $\overline{AW_A}$ mjernog broja w_α i promatrati sve jednakokračne trokute sa w_α kao simetralom kuta pri vrhu A. Lako se vidi da postoje trokuti s ostalim dvjema simetralama od duljine nula do proizvoljno velike duljine. Neprekinutosti radi mora postojati trokut sa simetralama $w_\beta = w_\gamma = 2$.

Promotrimo takav jednakokračan trokut $\triangle\ ABC$ i posebno trokut $\triangle\ ABW_A$. Na temelju sinusovog poučka za trokut $\triangle\ ABW_A$ imajući na umu da je

$$\alpha = 180^\circ - 2\beta \ \ i \ \ \sphericalangle AW_BB = \frac{3}{2}\beta$$

slijedi

$$c \cdot \sin 2\beta = w_\beta \cdot \sin \frac{3}{2}\beta.$$

A kako je $c \cdot \sin\beta = w_\alpha$, $w_\alpha = \frac{1}{2}$ i $w_\beta = 2$, to imamo dalje

$$\frac{1}{2} \cdot \sin 2\beta = 2 \sin \frac{3}{2}\beta \cdot \sin\beta$$

odatle je

$$\cos\beta = 2 \cdot \sin \frac{3}{2}\beta$$

i napokon

$$1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2} = 6 \cdot \sin \frac{\beta}{2} - 8 \cdot \sin^3 \frac{\beta}{2}.$$

Uvrstimo li ovdje $x = 4 \cdot \sin \frac{\beta}{2}$ dobivamao

$$x^3 - x^2 - 12x + 8 = 0.$$

Kad bi $x = 4 \cdot \sin \frac{\beta}{2}$ bio broj koji je konstruktibilan iz $\frac{1}{2}$ i 2, tada bi morala ova jednadžba imati jedno rješenje koje je konstruktibilno iz racionalnih brojeva. Tada bi prema Teoremu 3. ta jednadžba imala najmanje jedno racionalno rješenje, koje bi dalje prema Teoremu 4. moralo biti djelitelj broja 8. No nijedan od brojeva -8, -4, -2, -1, $+1$, $+2$, $+4$, $+8$ nije rješenje, što nas dovodi u kontradikciju. Ova konstrukcija se ne može rješiti pomoću ravnala i šestara.

Napomenimo kako svakako postoje trojke brojeva w_α, w_β, w_γ za koje je ova konstrukcija rješiva.

Poglavlje 3

Mohr - Mascheronijeve konstrukcije

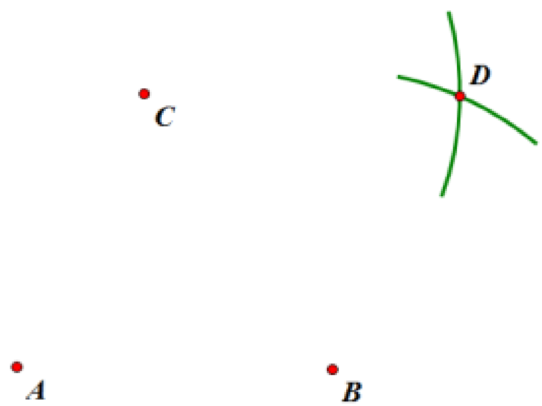
Mohr - Mascheronijeve konstrukcije su one konstrukcije kod kojih je dozvoljeno koristiti samo šestar s promijenjivim otvorom. Koje se sve konstrukcije daju izvesti samo sa šestarom i u kakvom su odnosu s konstrukcijama koje se mogu izvesti s ravnalom i šestarom daje nam teorem:

Teorem 5. (Teorem Mohr - Mascheroni)
Sve konstrukcije koje se mogu izvesti ravnalom i šestarom mogu se izvesti i samo šestarom.

Primijetimo da pravac ne možemo nacrtati jer nemamo ravnalo, ali znamo da je pravac određen ako su poznate njegove dvije točke. Teorem ćemo dokazati tako da pokažemo da možemo samo pomoću šestara odrediti sjecište kružnice i pravca (zadan s dvjema točkama) ili sjecišta dvaju pravaca. To ćemo izvesti nizom konstrukcija:

1. Konstruirajmo pravac paralelan s pravcem AB koji prolazi točkom C.

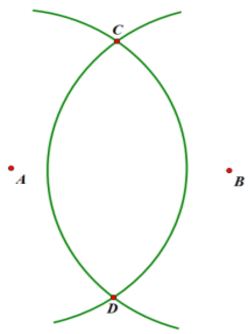
   Rješenje:
   Polumjerom $\overline{AB}$ povučemo kružni luk oko točke C, a polumjerom $\overline{AC}$ kružni luk oko točke B. Sjecište tih lukova je četvrti vrh paralelograma $ABCD$ i točka koja zajedno s točkom C određuje traženu paralelu.



Slika 3: **Konstrukcija pravca koji prolazi kroz C i paralelan je s AB**

2. Konstruirajmo točku D koja je simetrična točki C s obzirom na pravac AB.

   <u>*Rješenje:*</u>
   S centrom u točki A povučemo kružni luk točkom C, također povučemo kružni luk s centrom u točki B. Dobiveno sjecište je tražena točka D.



Slika 4: **Konstrukcija točke D simetrične točki C s obzirom na AB**

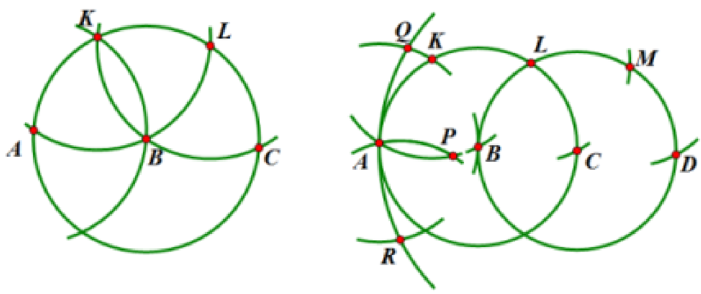
3. Konstruirajmo okomicu na pravac AB koja prolazi točkom C.

   <u>*Rješenje:*</u>
   Konstruiramo prema prethodnoj konstrukciji točku D simetrično točki C s obzirom na pravac AB. Dobiveni pravac CD je tražena okomica. (Vidimo sa prethodne slike)

4. Za dužinu $\overline{AB}$ konstruirajmo dužinu $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AB}$. Također konstruirajmo dužinu $\overline{AN} = n \cdot \overline{AB}$.

   <u>*Rješenje:*</u>
   Na kružni luk sa središtem u točki B koji prolazi točkom A nanesemo polumjer $\overline{AB}$ tri puta od A. Tako dobivamo točku C koja je dijametralno suprotna točki A, prema tome je $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AB}$.

   Ponavljanjem ove konstrukcije s kružnim lukom oko C kroz B dobijemo točku D za koju je $\overline{AD} = 3 \cdot \overline{AB}$. Ponavljanjem postupka lako ćemo dobiti točku N za koju je $\overline{AN} = n \cdot \overline{AB}$.



Slika 5: **Konstrukcija dužine $\overline{AC}$, $|AC| = 2 \cdot |AB|$ te konstrukcija dužine $\overline{AN}$, $|AN| = n \cdot |AB|$**

5. Danu dužinu $\overline{AB}$ podijelimo na n jednakih dijelova.

<u>*Rješenje:*</u>
Odredimo točku D prema prethodnoj konstrukciji, tako da je $\overline{AD} = n{\cdot}\overline{AB}$, $n = 3$. Sa središtem u točki D povučemo kružni luk točkom A. Taj luk siječe kružnicu u dvije točke R i Q. Dva kružna luka koja prolaze točkom A, a sa središtem u R, odnosno Q, sijeku se u točki P. Trokuti $\triangle\, QAP$ i $\triangle\, QAD$ jednakokračni su i imaju jedan kut $\sphericalangle QAP$ zajednički pa su trokuti slični.
Odatle slijedi $\frac{|AQ|}{|AD|} = \frac{|AP|}{|AQ|}$ ili, jer je $|AD| = 3 \cdot |AB|$ i $|AB| = |AQ|$, slijedi

$$\frac{|AQ|}{3 \cdot |AB|} = \frac{|AP|}{|AQ|},$$

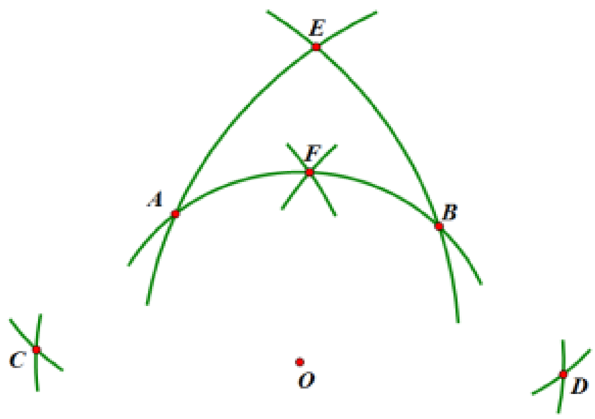
odnosno

$$|AP| = \frac{1}{3}|AB|.$$

6. Konstruirajmo polovište F kružnog luka AB.

<u>*Rješenje:*</u>
Središte kružnice na kojoj leži luk AB označimo sa O. Odredimo točke C i D tako da su $ABOC$ i $ABDO$ paralelogrami. Vidimo da je $OC||AB$ i $OD||AB$ pa su C, O, D kolinearne točke i $|AB| = |CO| = |OD|$.

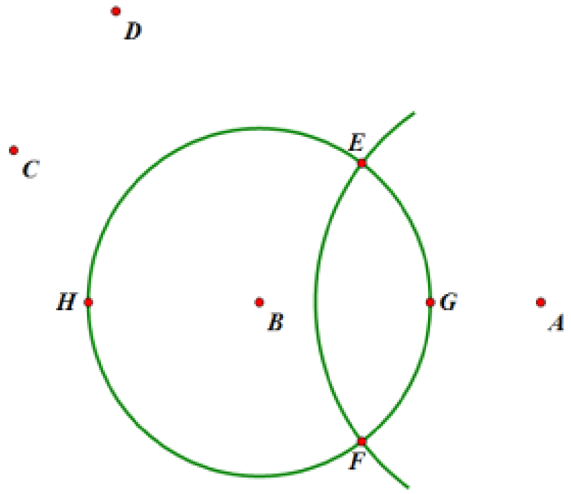
Povucimo kružne lukove sa središtem u C, odnosno u D s polumjerom $|CB|$. Sjecište lukova je točka E. Simetričnost konstrukcije daje $EO \perp CD$. Dalje, povucimo kružne lukove sa središtem u C i D s polumjerom $|OE|$. Oni se sijeku u točki F koja je traženo polovište luka AB.



Slika 6: **Konstrukcija polovišta kružnog luka**

7. Dane su dvije dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Konstruirajmo dužinu $\overline{AH} = \overline{AB} + \overline{CD}$ i $\overline{AG} = \overline{AB} - \overline{CD}$.

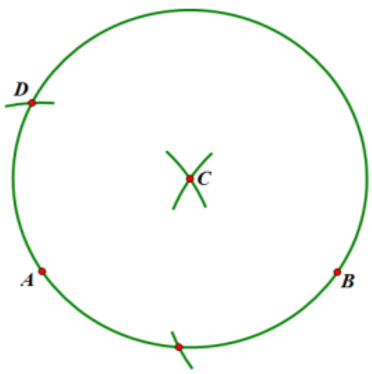
<u>*Rješenje:*</u>
Sa središtem u točki B opišemo kružnicu polumjera $|CD|$. Sa središtem u točki A opišemo kružni luk po volji tako da siječe kružnicu oko B u točkama E i F. Odredimo G i H, polovišta lukova EF. Slijedi $\overline{AH} = \overline{AB}{+}\overline{CD}$ i $\overline{AG} = \overline{AB}{-}\overline{CD}$.



Slika 7: **Konstrukcija zbroja i razlike dviju dužina**

8. U točki A dane dužine $\overline{AB}$ konstrirajmo okomicu na $\overline{AB}$.

   Rješenje:
   Sa središtima A i B opišemo kružne lukove istog po volji odabranog polumjera. sjecište je točka C. Udvostručavanjem dužine $\overline{BC}$ (prema 4.) dobijemo točku D koja određuje traženu normalu AD. Kut $\sphericalangle BAD$ je pravi jer je obodni kut nad promjerom $\overline{BD}$.

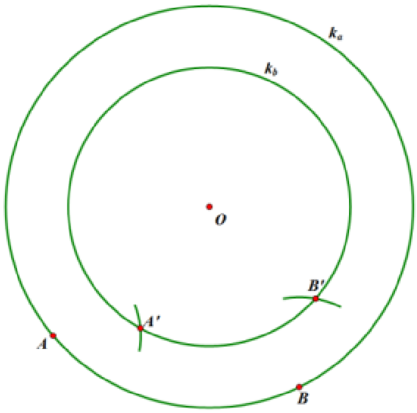


Slika 8: **Konstrukcija okomice na dužinu**

9. Za tri dane dužine a, b, c konstruirajmo dužinu x za koju vrijedi $a : b = c : x$.

   Rješenje:
   Oko odabrane točke O opišemo kružnice k_a i k_b polumjera a i b. Od neke točke A na k_a nanesemo dužinu $\overline{AB}$ duljine c kao tetivu. Oko točke A opišemo kružni luk s nekim polumjerom $\overline{AA'}$ i njime siječemo kružnicu k_b u točki A'. Na isti način dobijemo točku B' kao sjecište kružnog luka oko B s polumjerom $\overline{AA'}$. $(|AA'| = |BB'|)$

Trokuti $\triangle\ AOA'$ i $\triangle\ BOB'$ su sukladni, a trokuti $\triangle\ AOB$ i $\triangle\ A'OB'$ su slični, pa je $\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|AB|}{|A'B'|}$, odnosno $a : b = c : x$.



Slika 9: **Konstrukcija četvrte geometrijske proporcionale**

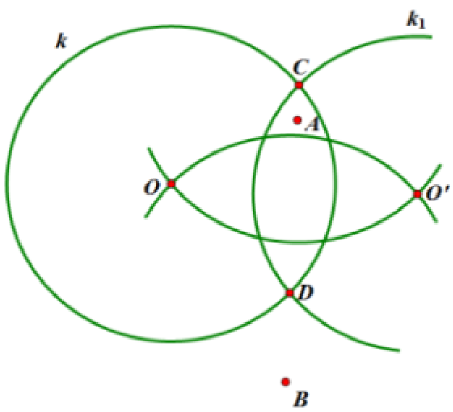
Na osnovi ovih razmatranja, sada možemo dokazati Mohr-Mascheronijev teorem time što ćemo koristeći isključivo šestar konstruirati:

a) sjecišta nekog pravca i kružnice;

b) sjecište dvaju pravaca.

a_1) Neka je zadan pravac točkama A i B i kružnica k, tako da taj pravac ne prolazi središtem O zadane kružnice k. Treba odrediti sjecište tog pravca i kružnice.

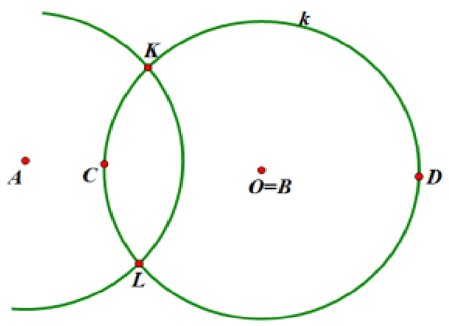
<u>*Rješenje:*</u>
Odredimo točku O_1 simetričnu točki O s obzirom na pravac AB. Sa središtem u O_1 opišemo kružnicu k_1 s polumjerom jednakim polumjeru kružnice k. Zbog simetrije cijele konstrukcije s obzirom na pravac AB su sjecišta C i D kružnica k i k_1 tražena sjecišta kružnice k i pravca AB.



Slika 10: **Konstrukcija sjecišta pravca i kružnice**

a_2) Konstruirajmo sjecišta kružnice k i pravca AB s tim da sada pravac AB prolazi središtem O kružnice k.

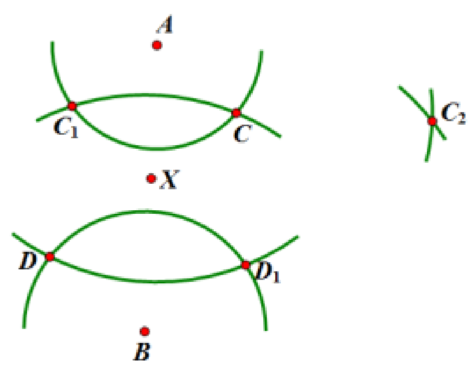
Rješenje:
Neka je zadani pravac određen točkom A i središtem O ($B = O$). Opišimo kružnicu sa središtem u točki A i polumjerom tako da kružnica siječe kružnicu k u točkama K i L. Odedimo polovišta C i D lukova KL. Točke C i D su tražena sjecišta.



Slika 11: **Konstrukcija sjecišta pravca i kružnice kada pravac prolazi središtem kružnice**

b_1) Zadana su dva neparalelna pravca AB i CD koja nisu međusobno okomiti. Treba konstruirati sjecište tih dvaju pravaca.

Rješenje:
Konstruirajmo C_1 i D_1, simetrične točke točkama C i D s obzirom na pravac AB i odredimo točku C_2 tako da je CDD_1C_2 paralelogram. Točke C, C_1, C_2 su kolinearne i $D_1C_2||DC$. Vrijedi $|C_1C_2| : |C_1C| = |C_1D_1| : |C_1X|$, gdje je s X označeno traženo sjecište.
Za tri poznate dužine $\overline{C_1C_2}$, $\overline{C_1C}$, $\overline{C_1D_1}$ odredimo četvrtu geometrijsku proporcionalu $\overline{C_1X}$, te konstruirajmo dužinu $\overline{D_1X} = \overline{C_1D_1} - \overline{C_1X}$ čime je određeno traženo sjecište X pravaca AB i CD.



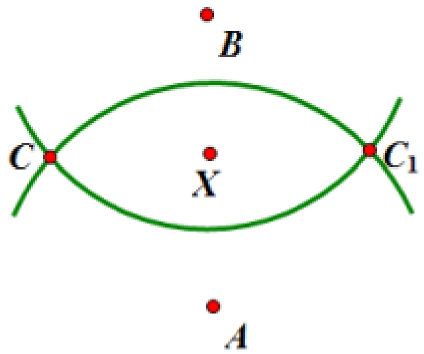
Slika 12: **Konstrukcija sjecišta dvaju pravaca**

b_2) Konstruirajmo sjecište međusobno okomitih pravaca AB i CD.

Rješenje:

Odredimo C_1 simetrično točki C s obzirom na pravac AB. Polovište dužine $\overline{CC_1}$ je traženo sjecište X koje konstruiramo prema 5.

Time je Mohr-Mascheronijev teorem dokazan.



Slika 13: **Konstrukcija sjecišta dvaju okomitih pravaca**

Poglavlje 4

Poncelet - Steinerove konstrukcije

Koje bi se sve geometrijske konstrukcije dale izvesti kada bi dopustili uporabu samo jednobridnog ravnala?

Možemo dokazati da ako su zadane točke i pravci sa svojim koordinatama u nekom Kartezijevom koordinatnom sustavu, samo ravnalom moguće je konstruirati samo one točke i pravce čije se koordinate mogu racionalno izraziti pomoću koordinata danih točaka i pravaca. Takve konstrukcije zahtjevaju rješenja linearnih jednadžbi pa ih nazivamo *linearnim konstrukcijama*. Ne mogu se sve konstrukcije izvedive ravnalom i šestarom izvesti samo ravnalom, ali ima dosta konstrukcija koje se mogu izvesti samo ravnalom.

Razmatrat ćemo konstrukcije koje možemo izvesti samo pomoću ravnala. Postepeno ćemo proširiti područje linearnih konstrukcija kako bi na kraju dokazali Ponclet - Steinerov teorem.

Teorem 6. (Teorem Poncelet - Steiner)
Svaku geometrijsku konstrukciju koja se dade izvesti ravnalom i šestarom, možemo izvesti samo ravnalom ako imamo već danu (nacrtanu) jednu kružnicu s njezinim središtem.

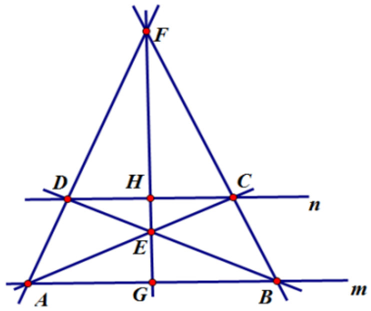
Ovaj teorem ćemo dokazati tako da dokažemo konstrukciju sjecišta pravca i kružnice te sjecišta dviju kružnica. Dokažimo najprije lemu:

Lema 1. *Spojimo li sjecište E dijagonale trapeza $ABCD$ sa sjecištem F njegovih neparalelnih stranica, tada spojnica EF siječe dužinu $\overline{AB}$ (i $\overline{CD}$) u polovištu G (odnosno u H)*

Dokaz:
Na Slici 14, vidimo $|AG| : |GB| = |DH| : |HC|$ i $|AG| : |GB| = |HC| : |DH|$, odakle slijedi:

$$\left(\frac{|AG|}{|GB|}\right)^2 = \frac{|DH|}{|HC|} \cdot \frac{|HC|}{|DH|} = 1,$$

čime je lema dokazana.



Slika 14: **Konstrukcija polovišta dužine**

I. Konstrukcije izvedene pomoću ravnala ako su dana dva paralelna pravca ili ako je dana neka dužina $\overline{AB}$ i njeno polovište G

1. Odredimo polovište G dužine $\overline{AB}$. Dana su dva paralelna pravca $m||n$ i dužina $\overline{AB}$ na pravcu m.

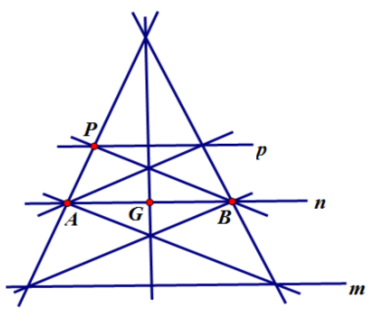
   <u>*Rješenje:*</u>
   Odaberimo točku F koja ne leži ni na m ni na n, spojimo ju sa A i B. FA siječe n u točki D, a FB siječe taj pravac u točki C. Odredimo sjecište dijagonala E. Spojnica EF siječe AB u traženom polovištu G.

2. Dana je dužina $\overline{AB}$ i njezino polovište G. Nekom točkom D treba konstruirati paralelu sa spojnicom AB.

   <u>*Rješenje:*</u>
   Na spojnici AD odaberimo točku F, spojimo ju sa B i G. DB siječe GF u E, a AE siječe BF u točki C. Tražena paralela je spojnica DC.

3. Dana su dva paralelna pravca $m||n$ i točka P, koja ne leži ni na jednom od tih pravaca. Konstruirajmo pravac p koji prolazi točkom P i paralelan je sa m (i n).

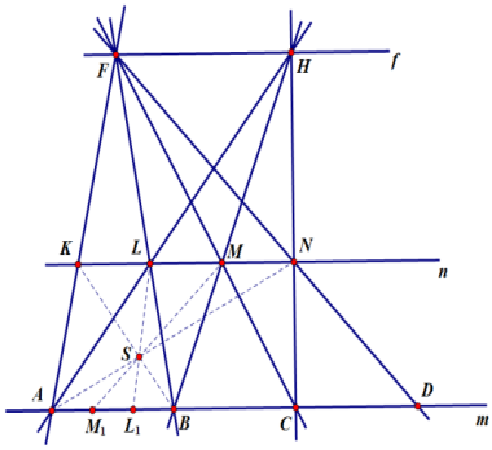
   <u>*Rješenje:*</u>
   Uzmimo neku dužinu $\overline{AB}$ na pravcu n, odredimo njeno polovište G. Prema 2. odredimo traženu paralelu p.



Slika 15: **Konstrukcija pravca kroz točku P paralelno sa danim pravcem**

4. Dana su dva međusobno paralelna pravca $m||n$ i dužina $\overline{AB}$ na pravcu m. Konstruirajmo dužinu $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AB}$ te dužinu $\overline{AN} = k \cdot \overline{AB}$.

   Rješenje:
   Odaberemo točku F koja nije ni na pravcu m ni na n, konstruiramo tom točkom pravac $f||m$ prema 3. Spojnice AF i BF sijeku n u točki K, odnosno L. AL siječe pravac f u točki H, HB siječe n u M, a FM siječe m u C, za koju vrijedi $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AB}$.
   Nadalje, HC siječe n u N, a FN siječe m u točki D, za koju vrijedi $\overline{AD} = 3 \cdot \overline{AB}$. Ponavljanjem konstrukcije možemo po volji umnogostručiti dužinu $\overline{AB}$.



Slika 16: **Konstrukcija umnogostručenja dužine**

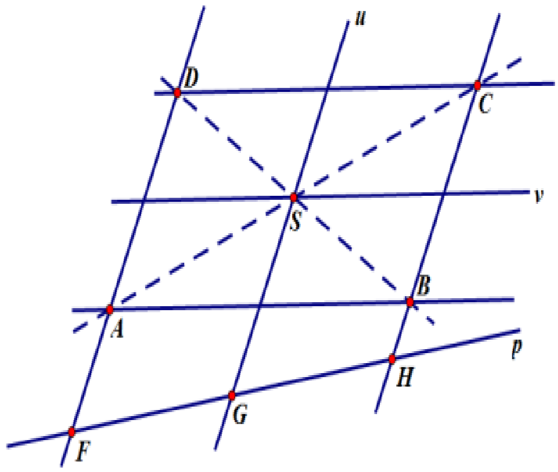
5. Dana su dva paralelna pravca $m||n$ i dužina $\overline{AB}$ na pravcu m. Dužinu $\overline{AB}$ treba podijeliti na k jednakih dijelova.

   Rješenje:
   Konstruirajmo dužinu $\overline{AN} = k \cdot \overline{AB}$ kao u prethodnom zadatku. Neka je dužina $\overline{AB}$ utrostručena, tj. $\overline{AD} = 3 \cdot \overline{AB}$. Tada vrijedi i $\overline{KN} = 3 \cdot \overline{KL}$. Spojnice KB i AN sijeku se u točki S. Točke K, L, M, N sada centralno projiciramo iz S na dužinu $\overline{AB}$. Na temelju omjera o sličnim trokutima imamo $\overline{AM_1} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AB}$.

II. Konstrukcije izvedene pomoću ravnala ako je dan jedan paralelogram

1. Središtem S danog paralelograma $ABCD$ konstruirajmo paralele sa stranicama tog paralelograma (srednjice).

   <u>*Rješenje:*</u>
   Odredimo paralele s pravcem AB (ili CD) odnosno pravcem AD (ili BC) koje prolaze središtem S. (prema I.3.)



Slika 17: **Konstrukcija pravca točkom koji je paralelan s danim pravcem**

2. Zadan je pravac p i točka T. Konstruirajmo pravac koji prolazi točkom T i koji je paralelan s pravcem p.

   <u>*Rješenje:*</u>
   Pravac p siječe pravce AD i BC te srednjicu u u točkama F, G, H tako da je G polovište dužine $\overline{FH}$ (prethodna slika). Ako imamo takvu dužinu s polovištem, tada možemo za konstrukciju paralele s tom dužinom kroz T primijeniti konstrukciju I.2.

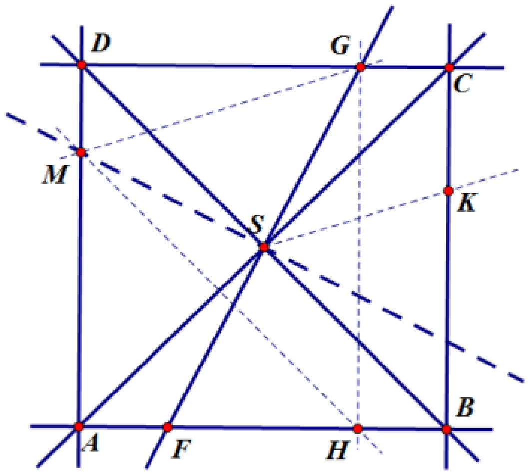
III. Konstrukcije izvedene pomoću ravnala ako je dan jedan kvadrat

Kako je kvadrat ujedno i paralelogram, sve konstrukcije koje smo rješili pod I. i II. možemo riješiti i pomoću danog kvadrata. Uz njih možemo riješiti i još neke:

1. Konstruirajmo bilo koju okomicu na neki pravac FG koji prolazi središtem S kvadrata $ABCD$.

   <u>*Rješenje:*</u>
   Točkom G povučemo pravac $GH||BC$, točkom H povučemo pravac $HM||BD$.

Kako je $|GC| = |HB| = |MD|$, trokuti $\triangle\ SCG$ i $\triangle\ SDM$ su sukladni i zakrenuti međusobno oko S za $90°$. Slijedi da je $MS \perp FG$. Svaka okomica na FG je paralelna sa MS. Iz konstrukcija II. znamo povući paralele s bilo kojim pravcem pa ja zadatak riješen.



Slika 18: **Konstrukcija okomice na neki pravac koji prolazi središtem danog kvadrata**

2. Dan je pravac p i točka P. Konstruirajmo okomicu q na pravac p koja prolazi točkom P.

   Rješenje:
   Konstruirajmo pravac p' središtem S, koji je paralelan sa p (prema II.2.). Prema prethodnom zadatku konstruirajmo okomicu q' kroz S na p', zatim prema II.2. paralelu q s pravcem q' kroz točku P.

3. Konstruirajmo simetralu pravog kuta $\sphericalangle MSG$ čiji je vrh u središtu danog kvadrata.

   Rješenje:
   Spojimo točke M i G te konstruirajmo pravac SK koji je paralelan sa MG. Tražena simetrala je tada okomica na SK kroz S, koju konstruiramo prema III.1.

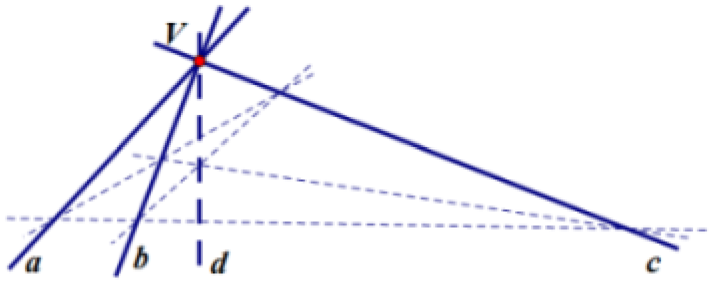
4. Konstruirajmo simetralu bilo kojeg pravog kuta.

   Rješenje:
   Odabrani pravi kut paralelno pomaknemo tako da mu vrh padne u središte S danog kvadrata. Odredimo simetralu tog pravog kuta s vrhom u S i tu simetralu pomaknemo u vrh zadanog kuta.

5. Zadan je kut $\sphericalangle(ab)$. Konstruirajmo kut $\sphericalangle(ad)$ koji je dvostruko veći od zadanog kuta.

   Rješenje:
   Vrhom V zadanog kuta $\sphericalangle(ab)$ postavimo okomicu c na pravac b. Konstruirajmo

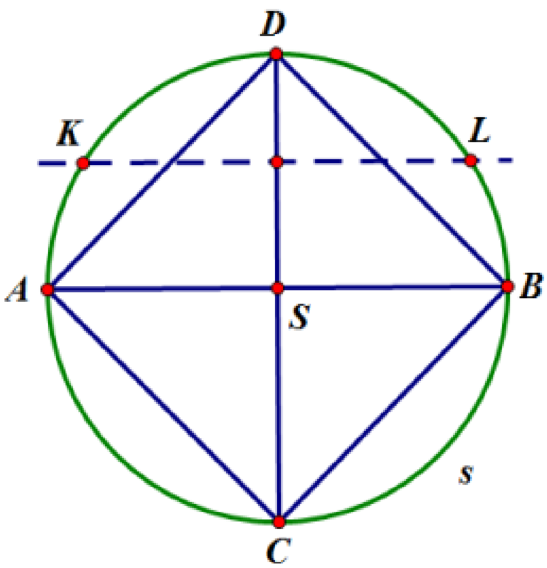
zraku d kroz V. Sada te zrake čine harmoničnu četvorku pravaca $H(ab, cd)$. Takvu figuru nazivamo potpunim četvrovrhom koju također možemo konstruirati samo ravnalom.
Ponavljanjem ove konstrukcije možemo utrostručiti dani kut $\sphericalangle(ab)$ i dalje na isti način nastaviti umnogostručavanje zadanog kuta.



Slika 19: **Konstrukcija udvostručenja kuta**

IV. Konstrukcije izvedene pomoću ravnala ako je dana neka kružnica s sa svojim središtem S

Konstruirajmo ravnalom kvadrat upisan danoj kružnici s.
Povucimo neki promjer $\overline{AB}$. Polovište ove dužine je točka S koja je središte kružnice s. Odaberimo neku točku K na na kružnici te konstruirajmo paralelu s promjerom $\overline{AB}$ koja prolazi točkom K. Paralela siječe kružnicu u točki L. Odredimo polovište M dužine $\overline{KL}$. Pravac SM je okomit na AB. Sjecišta pravca SM i kružnice s su vrhovi C i D traženog upisanog kvadrata.



Slika 20: **Konstrukcija kvadrata upisanog u danu kružnicu**

S danom kružnicom s samo pomoću ravnala možemo izvoditi sve konstrukcije koje smo već izveli, a možemo i još neke.

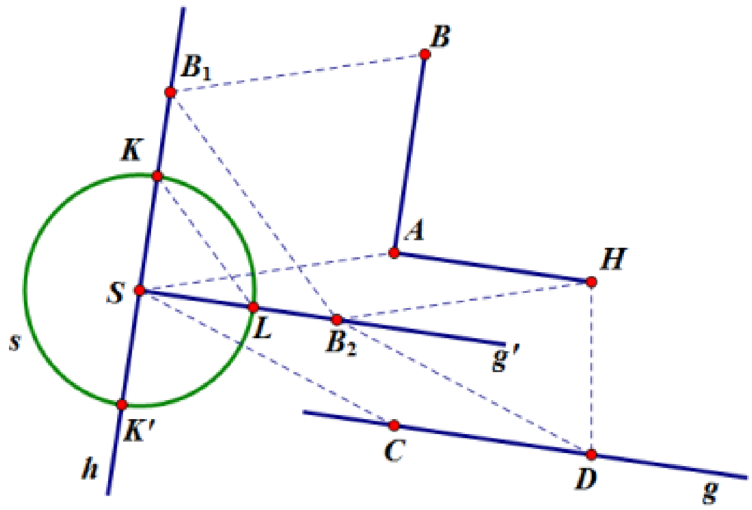
- Možemo raspoloviti bilo koji kut: ako zadani kut paralelno pomaknemo tako da mu vrh padne u središte kružnice S, tada krakovi sijeku tu kružnicu u dvije točke P i Q, a simetrala tog kuta prolazi polovištem dužine $\overline{PQ}$.

- Možemo prenositi danu dužinu na bilo koji pravac:

1. Zadana je dužina $\overline{AB}$, pravac g i točka C na tom pravcu. Odredimo na pravcu g točku D tako da vrijedi $|CD| = |AB|$.

   Rješenje:
   Odredimo pravac h koji prolazi središtem S kružnice s i paralelan je sa AB. Kroz B povucimo paralelu sa SA. Sjecište tih dvaju pravaca označimo sa B_1. Povucimo paralelu s pravcem g kroz središte S, označimo ju sa g'. Točkom B_1 povucimo paralelu s tetivom KL koja siječe g' u točki B_2. Pravac kroz B_2 koji je paralelan sa SC siječe g u traženoj točki D.

   Dužinu $\overline{AB}$ možemo prenjeti od točke C na pravcu g i u suprotnom smjeru ako umjesto točke K upotrijebimo dijametralno suprotnu točku K'.



Slika 21: **Konstrukcija prenašanja dužine**

Da bismo dokazali Poncelet-Steinerov teorem riješimo samo pomoću ravnala, uz danu kružnicu s, još ove konstrukcije:

a) Dane su dvije kružnice k_1 i k_2 sa središtima O_1 i O_2 i polumjerima r_1 i r_2. Odredimo sjecišta tih dviju kružnica.

b) Dana je kružnica k sa središtem O i polumjerom r te pravac p. Odredimo sjecišta pravca i kružnice.

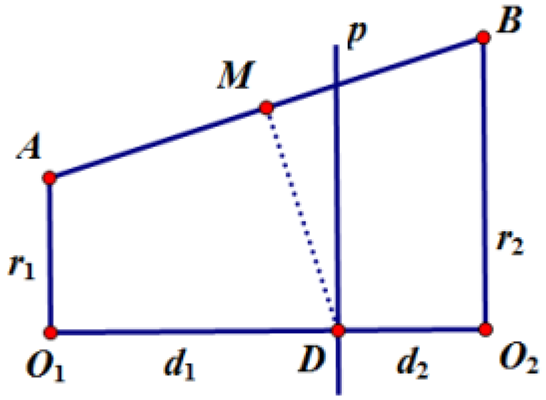
Rješenje a):
Na centralu $\overline{O_1O_2}$ podignimo u O_1 okomicu $|O_1A| = r_2$, a u O_2 okomicu $|O_2B| = r_1$. U polovištu M dužine $\overline{AB}$ podignimo okomicu na tu dužinu, koja siječe centralu O_1O_2 u točki D. Označimo li $d_1 = |\overline{O_1D}|$, $d_2 = |\overline{O_2D}|$ tada vrijedi

$$d_1^2 + r_2^2 = d_2^2 + r_1^2$$

ili

$$d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

što dokazuje da potencijala p kružnica k_1 i k_2 prolazi točkom D i okomita je na centralu O_1O_2.

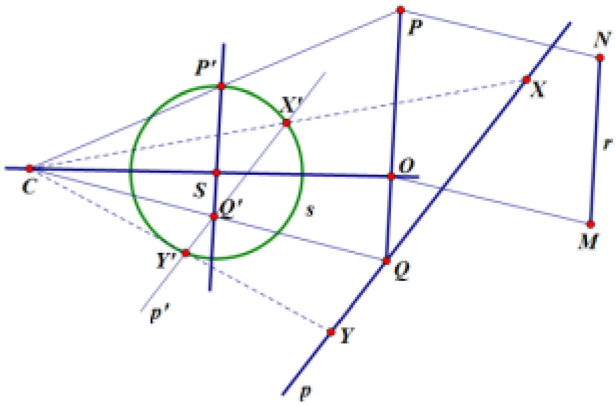


Slika 22: **Konstrukcija potencijale dviju kružnica**

Znamo da se sjecišta dviju danih kružnica nalaze na njihovoj potencijali p pa zadatak a) možemo svesti na konstrukciju sjecišta pravca p i jedne od dviju kružica k_1 ili k_2, što znači da zadatak a) možemo svesti na zadatak b).

Rješenje b):
Zadan je pravac p i kružnica $k(O, r)$ polumjera $r = \overline{MN}$. Konstruirajmo dužinu $\overline{OP}$ koja je paralelna i jednaka sa $\overline{MN}$. Točka P leži na zadanoj kružnici k. Sjecište pravaca OP i p označimo sa Q. Povucimo polumjer $\overline{SP'}$ dane kružnice s koji je paralelan s polumjerom $\overline{OP}$ kružnice k. Spojnice OS i PP' sijeku se u točki C, koja je centar homotetije koja prevodi kružnicu k u danu kružnicu s. Odredimo Q' - sliku točke Q. Pravac p' koji prolazi točkom Q' i paralelan je sa p je slika pravca p za tu homotetiju, a X' i Y' su sjecišta od p' i s slike traženih sjecišta pravca p i kružnice k. Sada lako pronađemo praslike X i Y točaka X' i Y'.

Time je Poncelet-Steinerov teorem dokazan.



Slika 23: **Konstrukcija sjecišta pravca i kružnice**

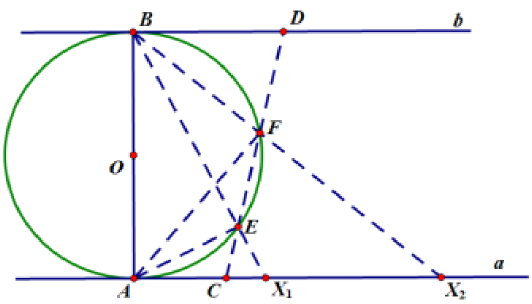
Rješavanje kvadratne jednadžbe konstruktivnim putem

Za kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - px + q = 0,$$

gdje su p i q racionalni brojevi treba konstruktivnim putem odrediti dužine $\overline{AX_1}$ i $\overline{AX_2}$, gdje je $|AX_1| = x_1$ i $|AX_2| = x_2$.

Rješenje:
Nacrtajmo jediničnu kružnicu $k(O, 1)$. U dijametralno suprotnim točkama A i B konstruirajmo tangente a i b na kružnicu k. Na tangente nanesimo dužine $|AC| = \frac{q}{p}$ i $|BD| = \frac{4}{p}$. (ovdje moramo uskladiti predznake tih koeficijenata s orijentacijom tangenata a i b, dok a i b moraju biti jednako orijentirane)
Spojnica CD siječe kružnicu k u točkama E i F, koje projicirane iz točke B na tangentu a daju točke X_1 i X_2. Dužine $\overline{AX_1}$ i $\overline{AX_2}$ predstavljaju korijene kvadratne jednadžbe.



Slika 24: **Konstrukcija korijena kvadratne jednadžbe**

Dokaz:
Označimo $\alpha_1 = \sphericalangle EAC$, $\alpha_2 = \sphericalangle AEC$, $|AX_1| = x_1$ i $|AX_2| = x_2$ i promotrimo trokut $\triangle\, BFD$. Imamo $\sphericalangle FBD = 90° - \alpha_2$, $\sphericalangle BFD = 90° - \alpha_1$, $\sphericalangle BDF = \alpha_1 + \alpha_2$.

Pomoću sinusovog poučka za trokut $\triangle\, BDF$ dobijemo

$$|BD| = \frac{|BF| \cos\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)},$$

a iz trokuta $\triangle\, AFB$ imamo

$$|BF| = 2\cdot\cos\alpha_2$$

odakle dalje imamo

$$|BD| = \frac{2\cos\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)} = \frac{2}{\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{4}{x_1+x_2}.$$

Analogno na temelju sinusovog poučka za trokut $\triangle\, AEC$ imamo

$$|AC| = \frac{AE\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)} = \frac{2\sin\alpha_1\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{x_1x_2}{x_1+x_2}.$$

Za rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe $x^2-px+q=0$ vrijedi

$$x_1+x_2=p, \quad x_1\cdot x_2=q$$

i odatle

$$|AC| = \frac{q}{p} \quad i \quad |BD| = \frac{4}{p}$$

što dokazuje konstrukciju.

Postoje dva rješenja, jedno ili nijedno, ovisno o spojnici CD siječe li, tangira ili ne siječe kružnicu k.
Ako su p i q racionalni brojevi, tada se mogu konstruirati (uz danu kružnicu k) dužine s mjernim brojevima $\frac{q}{p}$ i $\frac{4}{p}$. Odavde vidimo da ovaj problem možemo riješiti uz pomoć jednobridnog ravnala uz samo jednokratnu uporabu šestara, dakle Poncelet-Steinerovom konstrukcijom.

Poglavlje 5

Primjeri zadataka

U nastavi matematike geometrija se spominje kroz sve godine školovanja.
U osnovnoj školi u 5. razredu uči se o skupovima točaka u ravnini - pravac, polupravac, dužina, udaljenost točaka, simetrala dužine, centralna i osna simetrija, te kružnica i krug. Uči se najosnovnije o kutovima i trokutu.
U 6. razredu uči se o trokutu. Prvo o kutovima s okomitim kracima te kutovima uz presječnicu paralelnih pravaca, a kasnije o trokutu - kutovima trokuta, sukladnosti trokuta te konstrukcijama kutova i osnovnim konstrukcijama trokuta koji slijede iz poučaka o sukladnosti, te o konstrukcijama četverokuta.
U 7. razredu uči se o mnogokutu i sličnosti trokuta te kružnici i krugu.
U 8. razredu uči se o preslikavanju ravnine - vektor, translacija, osna simetrija, centralna simetrija, rotacija. Uči se i o geometriji prostora i tijela.
U srednjoj školi u 1. razredu uči se o sukladnosti i sličnosti trokuta te o kružnici i krugu.
U 2. razredu uči se geometrija prostora, uče se poliedri i rotacijska tijela.
U 3. razredu uči se o vektoru, pravcima, kružnici.

Navedimo i nekoliko primjera zadataka vezanih uz konstrukcije.

Zadatak 1. *(Konstrukcija SSS)*
Konstruirajte trokut ABC kojemu su zadane $\overline{AB} = 3.5cm$, $\overline{BC} = 3cm$, $\overline{AC} = 2.5cm$.

Rješenje:
Prvo nacrtamo dužinu $\overline{AB} = c$. Šestarom iz vrha A odredimo duljinu stranice $\overline{AC} = b$, a iz vrha B duljinu stranice $\overline{BC} = a$. Sjecište lukova je točka C - treći vrh trokuta.

Zadatak 2. *(Konstrukcija SKS)*
Konstruirajte trokut ABC kojemu su zadane $\overline{BC} = 6cm$, $\overline{AB} = 4cm$, $\beta = 60°$.

Rješenje:
Prvo nacrtamo dužinu $\overline{BC} = a$. Šestarom iz vrha B konstruiramo kut $\beta = 60°$. Na kraku kuta β odredimo duljinu stranice $\overline{AB} = c$. Spojimo točke A i C.

Zadatak 3. *(Konstrukcija KSK)*

Konstruirajte trokut ABC kojemu su zadane $\overline{AB} = 5cm$, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.

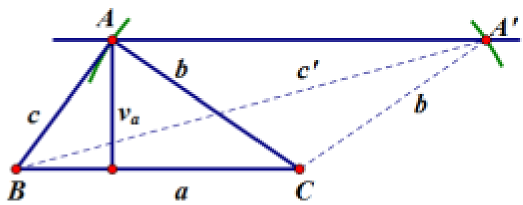
Rješenje:

Prvo nacrtamo dužinu $\overline{AB} = c$. Šestarom iz vrha A konstruiramo kut $\alpha = 30°$, a iz vrha B konstruiramo kut $\beta = 60°$. Sjecište krakova konstruiranih kuteva α i β je točka C - treći vrh trokuta.

Zadatak 4. *Konstruirajte trokut ABC ako je zadano $a = 5cm$, $b = 4.5cm$, $v_a = 3.5cm$.*

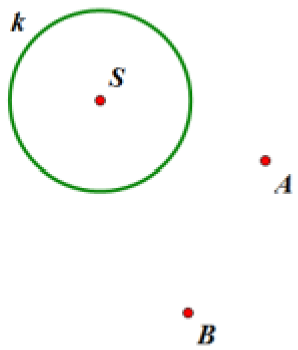
Rješenje:

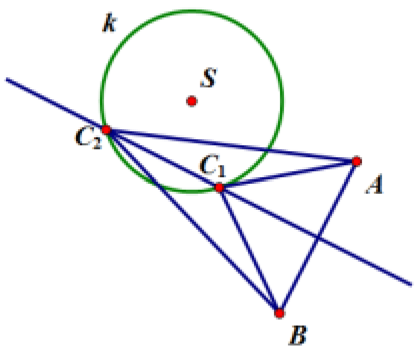
Prvo nacrtamo stranicu $\overline{BC} = a$. Konstruiramo paralelu dužini $\overline{BC}$ na udaljenosti v_a. Kružnica sa središtem C polumjera $|CA| = b$ siječe nacrtanu paralelu u dvije točke A i A'; zato imamo dva rješenja.



Zadatak 5. *(Regionalno natjecanje (ZG) 1997, 5.razred)*

Zadane su dvije točke A i B i kružnica k kao na slici. Konstruiraj sve jednakokračne trokute $\triangle\ ABC$ kojima je $\overline{AB}$ osnovica, a vrh C pripada kružnici.





Rješenje:

Analiza:

Kako je $\overline{AB}$ osnovica jednakokračnog trokuta, vrh C leži na simetrali te dužine.

Konstrukcija:

Konstruiramo simetralu dužine $\overline{AB}$. Presjek te simetrale i kružnice k su točke C_1 i C_2. Traženi trokuti su $\triangle\ ABC_1$ i $\triangle\ ABC_2$.

Zadatak 6. *(Županijsko natjecanje 1997, 5.razred)*

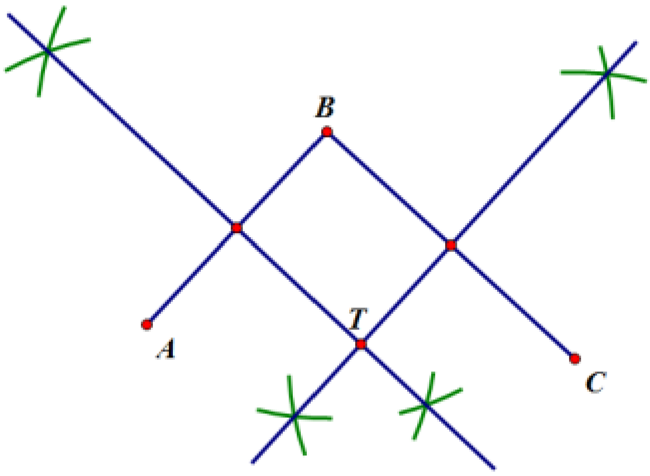
Nacrtaj tri točke A, B i C koje ne leže na istom pravcu. Konstruiraj točku koja je jednako udaljena od svih triju točaka A, B i C.

Rješenje:

Analiza:

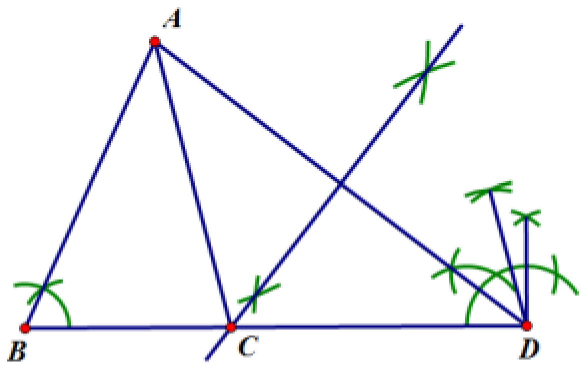
Skup točaka koje su jednako udaljene od točaka A i B je simetrala dužine $\overline{AB}$, također skup točaka koje su jednako udaljene od točaka B i C je simetrala dužine $\overline{BC}$. Presjek tih simetrala je tražena točka koja je jednako udaljena od svih triju točaka.

Konstrukcija:



Zadatak 7. *(Županijsko natjecanje 1997, 7.razred)*
Konstruiraj trokut ABC ako je zadano $a + b = 9cm$, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$.

Rješenje:
Analiza:
Na produžetku stranice $\overline{BC}$ preko vrha C odaberemo točku D tako da je $|CD| = |AC| = b$.
Sada je trokut ACD jednakokračan pa je $\sphericalangle CDA = \sphericalangle CAD = \frac{\gamma}{2}$, jer je $\sphericalangle BCA = \gamma$ vanjski kut trokuta ACD.
Kako je $\alpha = 45°$ i $\beta = 60°$, to je $\gamma = 75°$, pa kut $\frac{\gamma}{2}$ možemo lako konstruirati.
Sada je jasno da trokut ABD možemo konstruirati, a vrh C je presjek simetrale stranice $\overline{AD}$ i pravca BD.
Konstrukcija:
Prvo nacrtamo dužinu $\overline{BD}$ duljine $a + b$.
Kod vrha B konstriramo kut $\beta = 60°$, a kod vrha D kut $\frac{\gamma}{2} = \frac{75°}{2}$.
Presjek drugih krakova tih kutova je vrh A.
Presjek simetrale stranice $\overline{AD}$ i pravca BD je vrh C.



Zadatak 8. *(Državno natjecanje 1997, 7.razred)*

Dan je šiljasti kut $\sphericalangle DCE$ i točka M unutar tog kuta koja ne leži niti na jednom kraku. Na kraku CD konstruiraj točku A, a na kraku CE točku B, tako da točka M dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru $|AM| = |MB| = 2 : 3$.

Rješenje:

Analiza:

Pretpostavimo da je zadatak riješen, tj. da smo odredili točke A i B takve da je $|AM| = |MB| = 2 : 3$.

Nacrtajmo točkom M pravac p paralelan kraku CD do sjecišta N s krakom CE.

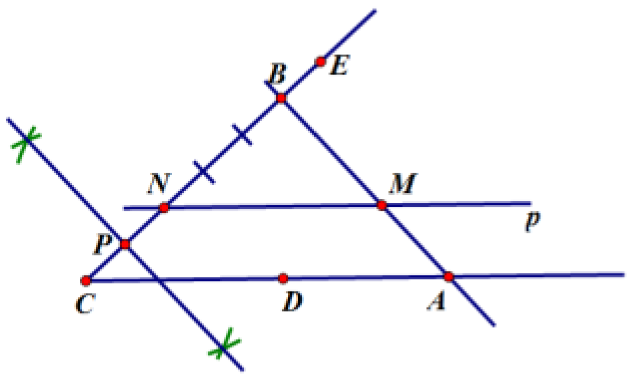
Zbog sličnosti trokuta ABC i MBN zaključujemo da je $|AN| = |NB| = 2 : 3$.

Konstrukcija:

Prvo nacrtajmo pravac $p||CD$ kroz točku M do sjecišta N s krakom CE.

Konstruirajmo polovište P dužine $\overline{CN}$. Zatim odredimo točku B na kraku CE tako da je $|NB| = 3|NP|$.

Pravac BM siječe krak CD u točki A.



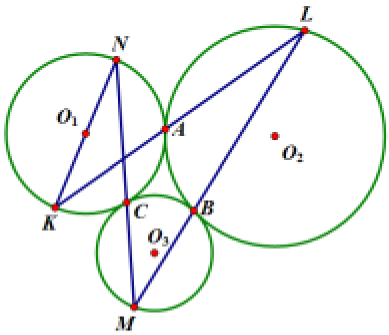
Zadatak 9. *(Općinsko-gradsko natjecanje 1997, 1.razred)*

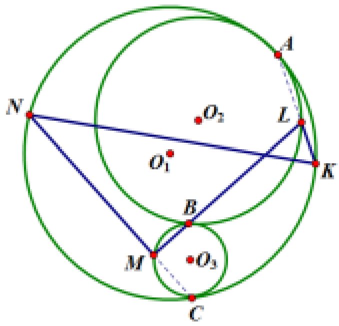
Tri kružnice s nepoznatim središtima, u parovima se dodiruju u točkama A, B i C. Koristeći jedno ravnalo konstruirajte središta tih kružnica.

Rješenje:

Kružnice se mogu dodirivati ili izvana ili se jedan par kružnica dodiruje izvana i svaka od te dvije kružnice dodiruje treću iznutra.
Promatrajmo slučaj kada se kružnice dodiruju izvana.

Neka se kružnice sa središtima O_1 i O_2 dodiruju izvana u točki A. Neka je K bilo koja točka jedne od tih kružnica, a L presjek pravca AK s drugom kružnicom različit od točke A.
Promatranjem jednakokračnih trokuta O_1KA i O_2LA vidi se da su kutevi $\sphericalangle O_1KA$ i $\sphericalangle O_2LA$ jednaki, pa su pravci O_1K i O_2L paralelni.
Neka je M točka treće kružnice (različita od B) koja se nalazi na pravcu LB, a N točka prve koja se nalazi na pravcu MC (i različita od C).
Prema dokazanom je $O_1K||O_2L||O_3M||O_1N$. Zato je KN promjer prve kružnice.
Na isti način konstruiramo još jedan promjer. Time dobivamo središte prve kružnice.
Središta druge i treće kružnice se dobivaju analogno ili malo kraćim postupkom, tj, koristeći pravac O_1A na kojem leži središte druge kružnice.





Zadatak 10. *(Državno natjecanje 1997, 4.razred)*

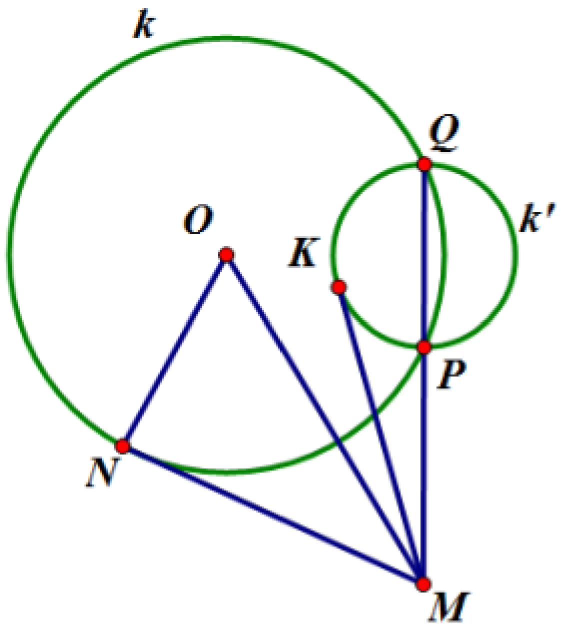
U ravnini je dana kružnica k i točka K. Za bilo koje dvije različite točke P i Q na k, kružnica k' prolazi kroz točke P, Q i K. Neka je M sjecište tangente na kružnicu k' u točki K i pravca PQ. Opišite geometrijsko mjesto točaka M kada P i Q prolaze svim točkama kružnice k.

Rješenje:

Neka je O središte kružnice k i R njezin polumjer. Iz točke M povucimo tangentu na kružnicu k. Budući da je kvadrat duljine tangente jednak produktu duljina sekante i njezinog vanjskog dijela (potencija točke u odnosu na kružnicu) imamo

$$|MK|^2 = |MQ| \cdot |MP| = |MN|^2,$$

$$|OM|^2 - |MK|^2 = |OM|^2 - |MN|^2 = R^2.$$



Sada se pomoću Pitagorinog poučka dokaže da točka M leži na pravcu l, koji je okomit na OK, i to za sve točke za koje je razlika kvadrata udaljenosti od točaka O i K jednaka R^2. Može se pokazati i obratno, tj. da sve točke te okomice l pripadaju našem skupu: ako za točku $M \in l$ konstruiramo proizvoljnu kružnicu, koja dodiruje MK u točki K i siječe k u nekim točkama P i Q, tada pravac PQ siječe l u točki M.

Literatura

[1] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 1, 2. dio*, Element, Zagreb, 2006.

[2] B. Jagodić, N. Sarapa, R. Svedrec, *Matematika 6*, Školska knjiga, Zagreb, 2006.

[3] J. Krajina, I. Gusić, *Matematika 1, 2. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[4] D. Palman, *Geometrijske konstrukcije*, Element, Zagreb, 1996.

[5] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[6] Z. Šikić, V. Draženović - Žitko, M. Marić, L. Krnić, *Matematika 6*, Profil, Zagreb, 2007.

[7] *http://public.carnet.hr/mat-natj/zadaci-OS.htm* , siječanj, 2013.

[8] *http://public.carnet.hr/mat-natj/zadaci-SS.htm* , siječanj, 2013.

Sažetak

Geometrijske konstrukcije su dio geometrije u ravnini (planimetriji) koji planimetrijske probleme rješava konstruktivnom metodom. Osnovni objekti (euklidske) geometrije u ravnini su točke, pravci i ravnine. Svi ostali objekti se iz njih mogu izgraditi. Točke i pravci se ne definiraju, već su oni indirektno definirani svojim svojstvima koja se opisuju sistemom aksioma.

Ovaj diplomski rad imao je za cilj obraditi osnovno o geometrijskim konstrukcijama ravnalom i šestarom. Dopuštajući samo uporabu šestara, konstrukcije koje izvodimo nazivamo Mohr-Mascheronijevim. Dokazujući Mohr-Mascheronijev teorem pokazali smo da se konstukcije koje je moguće izvesti ravnalom i šestarom mogu izvesti i samo šestarom. Dovoljna je jedna uporaba šestara da se može konstruirati samo ravnalom sve ono što se može konstruirati ravnalom i šestarom. Takve konstrukcije nazivamo Poncelet-Steinerovim konstrukcijama. Na kraju rada navedeni su neki zadaci u kojima smo primijenili konstruiranje ravnalom i šestarom.

Ključne riječi
geometrijske konstrukcije, ravnalo, šestar

Title and summary

Title

Ruler and compass constructions

Summary

Geometric constructions are part of plan geometry (planimetry) and it is construction method that we use for solving problems in planimetry. Basic objects of (Euclidean) geometry in-plane are points, directions and plane. From that objects we can construct all other objects. We don't define points and directions; they are indirectly defined because of its properties which are described with system of axioms.

Target of this degree report was basic elaboration of a geometric construction with ruler and pair of compasses. If we use only a pair of compasses, constructions that we make are called Mohr-Masceronies. With proving of Mohr-Masceronies theorem, we showed that all construction that can be made with ruler and pair of compasses also can be made only with pair of compasses. One use of a pair of compasses is enough that we construct only with ruler everything that can be constructed with a ruler and pair of compasses. That kind of construction we call Poncelet-Steiner. On the end of degree report are listed some tasks in which I apply construction with ruler and pair of compasses.

Key words

geometric constructions, ruler, compass

Životopis

Rođena sam 22. kolovoza 1986. godine u Našicama. Osnovnu školu August Harambašić u Donjem Miholjcu upisujem 1993. godine. Svoje osnovnoškolsko obrazovanje završavam 2001. godine te upisujem Srednju školu Donji Miholjac, smjer Opća gimnazija. Nakon uspješno završene srednje škole, u srpnju 2005. godine upisujem Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Tijekom studija prebacujem se na Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike.