

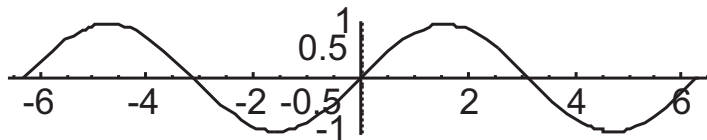
## 6 Primjena trigonometrije u planimetriji

### 6.1 Trigonometrijske funkcije

Funkcija sinus ( $f(x) = \sin x; f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ );

$$\sin(-x) = -\sin x;$$

$$\sin x = \sin(x + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

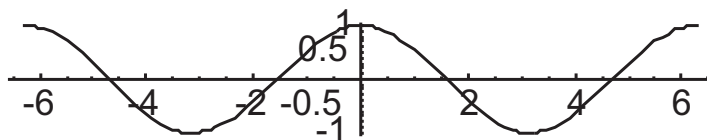


Slika 3. Graf funkcije sinus - sinusoida

Funkcija kosinus ( $f(x) = \cos x; f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ );

$$\cos(-x) = \cos x;$$

$$\cos x = \cos(x + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

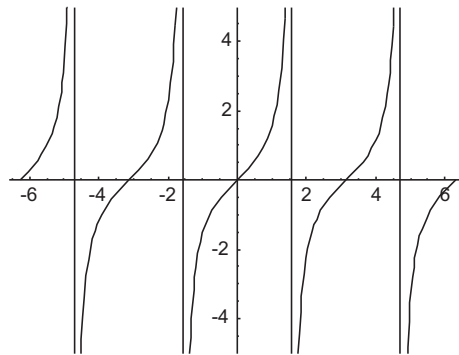


Slika 4. Graf funkcije kosinus - kosinusoida

Funkcija tangens ( $f(x) = \operatorname{tg} x; f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi/2, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ );

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x;$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

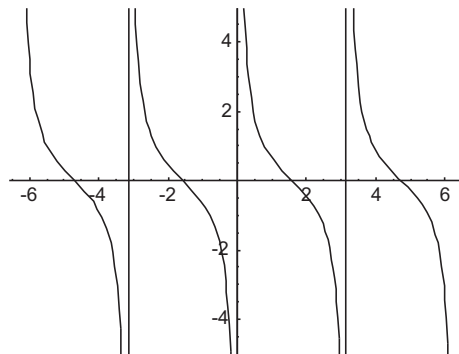


Slika 5. Graf funkcije tangens - tangensoida

Funkcija kotangens ( $f(x) = \text{ctg}x; f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ );

$$\text{ctg}(-x) = -\text{ctg}x;$$

$$\text{ctg}x = \text{ctg}(x + k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$



Slika 6. Graf funkcije kotangens - kotangensoida

Osnovne veze:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\text{tg}\alpha \cdot \text{ctg}\alpha = 1$$

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \text{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Adicione formule:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}$$

Formule dvostrukog kuta:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

**Zadatak 1.** Dokažite sljedeće formule:

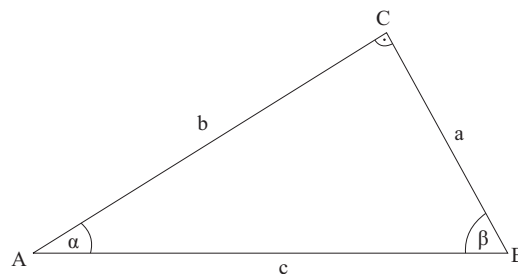
$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

**Zadatak 2.** Zapišite izraz  $\frac{1}{\sin x} + \operatorname{ctg} x$  u obliku umnoška.

**Zadatak 3.** Dokažite:

$$\frac{\sin x - \sin 2x - \sin 4x + \sin 5x}{\cos x - \cos 2x - \cos 4x + \cos 5x} = \operatorname{tg} 3x.$$

## 6.2 Trigonometrija pravokutnog trokuta



Trigonometrijske funkcije šiljastih kutova pravokutnog trokuta:

$$\sin \alpha = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{hipotenuza}} = \frac{a}{c},$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{priležeća kateta}}{\text{hipotenuza}} = \frac{b}{c},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{priležeća kateta}} = \frac{a}{b},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\text{priležeća kateta}}{\text{nasuprotna kateta}} = \frac{b}{a}.$$

Očigledno vrijede sljedeće jednakosti:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

**Zadatak 4.** Izračunajte duljine stranica i kutove pravokutnog trokuta ako je zadano:

1.  $P = 60\text{cm}^2$ ,  $\alpha = 28^\circ 4' 21''$
2.  $a + b = 23\text{cm}$ ,  $c = 17\text{cm}$
3.  $a = 24\text{cm}$ ,  $v = 6.72\text{cm}$
4.  $a : b = 3 : 4$ ,  $v = 19.2\text{cm}$
5.  $O = 120\text{cm}$ ,  $\alpha = 30^\circ$
6.  $a : c = 3 : 5$ , ortogonalna projekcija katete  $a$  na hipotenuzu  $36\text{cm}$

**Zadatak 5.** Visina pravokutnog trokuta dijeli trokut na dva dijela kojima se površine odnose kao  $1 : 4$ . Koliki su kutovi tog trokuta?

**Zadatak 6.** Kut nasuprot osnovice jednakokračnog trokuta jednak je  $\alpha$ , a visina spuštена na krak ima duljinu  $v$ . Koliki su polumjeri  $R$  i  $r$ , tom trokutu opisane i upisane kružnice?

**Zadatak 7.** Dva sukladna pravokutna trokuta  $\triangle ABC$  i  $\triangle ABC_1$  imaju zajedničku hipotenuzu  $\overline{AB}$ , a katete  $\overline{AC}$  i  $\overline{BC_1}$  sijeku se u točki  $D$ . Kolika je površina  $\triangle ABD$  ako je  $|AC| = 10\text{cm}$  i  $\beta = \angle ABC = 64^\circ 30'$ ?

**Zadatak 8.** Simetrala pravog kuta pravokutnog trokuta dijeli hipotenuzu na dijelove čiji su duljine u omjeru  $2 : 3$ . Koliki su kutovi tog trokuta?

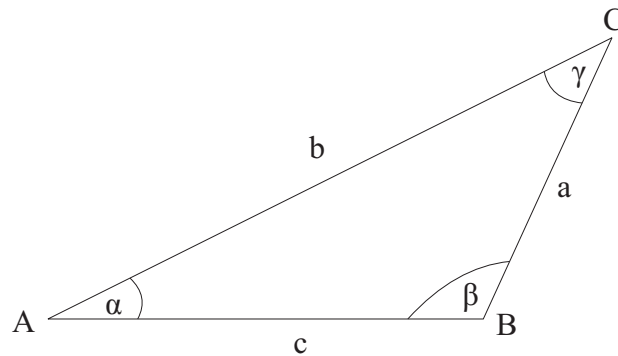
**Zadatak 9.** Točka  $D$  nožište je visine spuštene iz vrha  $A$  jednakokravnog  $\triangle ABC$  na krak  $\overline{AC}$ . Ako je

$$|AC| + |CD| = 2(|AB| + |BD|),$$

koliki su kutovi tog trokuta?

**Zadatak 10.** Izračunajte površinu pravokutnika kojemu je dijagonala  $d$ , a šiljasti kut među dijagonalama je  $\varphi$ .

### 6.3 Trigonometrija kosokutnog trokuta



Kosinusov poučak:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Sinusov poučak:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

$R$  - polumjer trokutu opisane kružnice.

$$P(ABC) = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}ac \sin \beta = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{abc}{4R}.$$

Tangensov poučak:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}, \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2}}, \quad \frac{c+a}{c-a} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma+\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\gamma-\alpha}{2}}.$$

**Zadatak 11.** Dokažite tangensov poučak.

**Zadatak 12.** Dokažite da je duljina  $t_a$  težišnice povučene iz vrha  $A$  trokuta dana sa

$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

Pomoću ovog rezultata dokažite da je

$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos(\alpha)}.$$

**Zadatak 13.** Neka duljine stranica trokuta zadovoljavaju jednakost:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}.$$

Dokažite da je tada  $\beta = 60^\circ$ .

**Zadatak 14.** Ako za površinu trokuta vrijedi jednakost  $P = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2)$ , dokažite da je  $\alpha = 45^\circ$ .

**Zadatak 15.** Dokažite da vrijedi:

$$(b^2 + c^2 - a^2)\operatorname{tg}\alpha + (a^2 + c^2 - b^2)\operatorname{tg}\beta + (a^2 + b^2 - c^2)\operatorname{tg}\gamma = 12P.$$

**Zadatak 16.** Oko trokuta kojemu su duljine stranica  $a = 15\text{cm}$ ,  $b = 20\text{cm}$ ,  $c = 7\text{cm}$  opisana je kružnica. Izračunajte površinu onog odsječka kružnice kojem je stranica  $a$  tetiva.

**Zadatak 17.** Opseg trokuta iznosi  $20\text{cm}$ , a dva su mu kuta  $\alpha = 41.6^\circ$  i  $\beta = 69.5^\circ$ . Izračunajte duljine stranica tog trokuta.

**Zadatak 18.** Izračunajte kutove trokuta ako je  $\alpha : \beta = 1 : 2$  i  $a : b = 1 : \sqrt{3}$ .

**Zadatak 19.** Duljine osnovica trapeza su  $a = 8\text{cm}$  i  $c = 4\text{cm}$ , a kutovi uz veću osnovicu su  $\alpha = 80^\circ$  i  $\beta = 44^\circ$ . Koliki su krakovi tog trapeza?

**Zadatak 20.** Zadanom točkom  $A$  kružnice polumjera  $r$  povučen je promjer  $\overline{AB}$ . Točkom  $A$  povučene su tetive  $\overline{AC}$  i  $\overline{AD}$  takve da su one s različite strane pravca  $AB$  i s njime zatvaraju kutove  $\alpha$  i  $\beta$ . Odredite duljinu tetive  $\overline{CD}$ .

**Zadatak 21.** Duljine stranica trokuta  $ABC$  su tri uzastopna broja, a najmanji kut trokuta je upola manji od njegovog najvećeg kuta. Odredite stranice i kutove trokuta  $ABC$ .

**Zadatak 22.** Jednakokračnom trapezu zadane su osnovice  $a, c$  i krak  $b$ . Odredite polumjer trapezu opisane kružnice.

**Zadatak 23.** U trokutu  $ABC$   $O$  je ortocentar. Odredite duljinu dužine  $\overline{AO}$  ako je  $|AB| = 13\text{cm}$ ,  $|BC| = 14\text{cm}$ ,  $|AC| = 15\text{cm}$ .

**Zadatak 24.** Ako je u tetivnom četverokutu  $ABCD$   $|BC| = |CD|$ , dokažite da se površina toga četverokuta može računati po formuli  $P = \frac{1}{2} \sin \alpha$ , gdje je  $\alpha$  kut u vrhu  $A$  toga četverokuta.