1 Osnovni pojmovi euklidske geometrije ravnine

Euklidska ravnina je skup M čije elemente nazivamo **točkama**, a neke njezine istaknute podskupove nazivamo **pravcima**. Ta dva tipa objekata zadovoljavaju tzv. aksiome euklidske geometrije ravnine a neki među njima su npr.

- Za svake dvije različite točke $A, B \in M$ postoji jedinstveni pravac $p \in M$ kojemu one pripadaju. Kaže se da su točke A i B incidentne s pravcem p ili da leže na pravcu p. (Pišemo $p = AB$.)
- (Aksiom uređaja.) Na svakom pravcu ravnine postoje točno dva međusobno suprotna linearna uređaja ($\preceq$ i $\succeq$).

Pomoću aksioma uređaja definira se pojam "**ležati između**": ako su A i B dvije različite točke onda prema prvom aksiomu incidencije postoji jedinstveni pravac na kojem one leže. Za točku T tog pravca kažemo da leži između točaka A i B ako vrijedi $A \preceq T \preceq B$ ili $A \succeq T \succeq B$.

Skup svih točaka pravca AB koje leže između točaka A i B nazivamo **dužinom** (i označavamo s $\overline{AB}$). Točke A i B nazivamo **krajevima** te dužine.

Polupravac kojemu je A početna točka (vrh polupravca), a prolazi još i točkom $B \neq A$ je skup svih onih točaka T pravca AB za koje, u slučaju $A \preceq B$, vrijedi $A \preceq T \preceq B$ ili $A \preceq B \preceq T$.

Skup K je **konveksan** ako $\forall A, B \in K$ vrijedi da je $\overline{AB} \in K$.

Trokut ABC ($\triangle ABC$) je najmanji konveksni skup koji sadrži tri nekolinearne točke A, B, C. Točke A, B, C su **vrhovi**, a dužine $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ **stranice** trokuta.

Funkciju $d : M \times M \to \mathbb{R}$ nazivamo **metrikom** (**razdaljinskom funkcijom ili funkcijom udaljenosti**) na M ako za sve $A, B, C \in M$ vrijedi:

1. $d(A, B) \geq 0$,
2. $d(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A = B$,
3. $d(A, B) = d(B, A)$,
4. (Nejednakost trokuta) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$, pri tome znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $C \in \overline{AB}$.

Realan broj $d(A,B)$ nazivamo **duljinom** dužine $\overline{AB}$ ili **udaljenošću** točaka A i B, a ponekad koristimo i oznaku $|\overline{AB}|$, $|AB|$.

Napomena. Zbog 4. svojstva metrike, u $\triangle ABC$ vrijedi

$$d(A,B) < d(A,C) + d(C,B)$$

tj. zbroj duljina dviju stranica trokuta uvijek je (strogo) veći od duljine treće stranice.

Zadatak 1. Za svaki pravac $p \subset M$ definiramo binarnu relaciju ρ na $M \setminus p$ sa:

$$A\rho B \Longleftrightarrow \overline{AB} \cap p = \emptyset.$$

Dokažite da je ρ relacija ekvivalencije koristeći tzv. **Paschov aksiom** koji glasi ovako:

> Ako pravac siječe jednu stranicu trokuta i ne prolazi niti jednim vrhom na toj stranici onda on siječe još bar jednu stranicu tog trokuta.

Zadatak 2. Dokažite da za svaki par točaka $A, B \in M$, $A \neq B$, postoji jedinstvena točka $C \in AB$ za koju je $d(A,C) = d(B,C)$. Ta točka leži između točaka A i B i zove se polovište dužine $\overline{AB}$.

Zadatak 3. Neka su A, B, C bilo koje tri točke pravca takve da je $A \prec B \prec C$, a P polovište dužine $\overline{BC}$. Dokažite da vrijedi:

$$d(A,B) \cdot d(A,C) = [d(A,P)]^2 - [d(B,P)]^2.$$

Zadatak 4. Neka je T bilo koja točka na stranici $\overline{AB}$ $\triangle ABC$. Dokažite da vrijedi

$$\frac{1}{2}[d(A,C) + d(B,C) - d(A,B)] \leq d(C,T) \leq \frac{1}{2}[d(A,C) + d(B,C) + d(A,B)].$$

Zadatak 5. Dokažite da je duljina svake stranice trokuta manja od njegovog poluopsega.

Zadatak 6. Neka je T bilo koja točka unutar $\triangle ABC$. Dokažite da je zbroj udaljenosti točke T do vrhova tog trokuta

a) veći od njegova poluopsega,

b) manji od njegova opsega.

Zadatak 7. Neka je dan konveksan četverokut $ABCD$. Ako je opseg $\triangle ABD$ manji od opsega $\triangle ACD$ dokažite da je tada duljina dužine $\overline{AB}$ manja od duljine dužine $\overline{AC}$.

Zadatak 8. Dokažite da u konveksnom četverokutu postoji stranica čija je duljina manja od duljine dulje dijagonale.