2 Izometrije ravnine

2.1 Svojstva izometrija ravnine i osnih simetrija

Izometrija ravnine je preslikavanje $f : M \to M$ za koje vrijedi:

$$d(f(A), f(B)) = d(A, B), \quad \forall A, B \in M.$$

Za svaki pravac $p \subset M$ postoji jedinstvena izometrija $s_p : M \to M$ različita od identitete i_M za koju je $s_p(T) = T$, $\forall T \in p$. Ta se izometrija ravnine zove osna simetrija s obzirom na pravac p, a pravac p zove se os simetrije.

Fiksna točka izometrije f je točka $T \in M$ za koju vrijedi da je $f(T) = T$.

Napomena. Osna simetrija $s_p : M \to M$ je izometrija ravnine, $s_p \neq i_M$, kojoj su sve točke pravca p fiksne.

Osnovna svojstva izometrija

[T1] **Teorem.** Svaka izometrija ravnine M preslikava bijektivno pravac na pravac.

[T2] **Propozicija.** Neka je $f : M \to M$ izometrija. Tada vrijedi:

(1) Slika dužine $\overline{AB}$ je dužina $\overline{f(A)f(B)}$.

(2) Slika polupravca s početkom u točki O je polupravac s početkom u točki $f(O)$.

(3) Slika poluravnine određene pravcem p je poluravnina određena pravcem $f(p)$.

[T3] **Propozicija.** Neka je $f : M \to M$ izometrija ravnine. Tada vrijedi:

(1) Ako su A i B fiksne točke od f, onda je i svaka točka pravca AB fiksna točka od f.

(2) Ako je $f(A) = B$ i $f(B) = A$, tj. A i B zamijene mjesta, onda je polovište dužine $\overline{AB}$ fiksna točka od f.

(3) Ako su $A, B, C \in M$ tri nekolinearne fiksne točke od f, onda je f identiteta.

(4) Ako je $s_p = s_{p'}$, onda je $p = p'$.

[T4] **Propozicija.** Svaka osna simetrija je involucija, tj. $s_p \circ s_p = i_M$. Osna simetrija s_p nema drugih fiksnih točaka osim onih na samoj osi simerije, a poluravnine određene sa osi simetrije preslikava jednu u drugu. Specijalno, s_p je bijekcija čiji je inverz jednak s_p, tj. $(s_p)^{-1} = s_p$.

[T5] **Propozicija.** Neka su $A, B \in M$, $A \neq B$. Tada postoji jedinstveni pravac p takav da je $s_p(A) = B$.

[T6] **Propozicija.** Neka su $A, B \in M$, $A \neq B$. Skup svih točaka iz M koje su jednako udaljene od A i B je os p jedinstvene osne simetije koja zamijeni mjesta točkama A i B, tj. koja preslikava A u B, a B u A. Taj se pravac zove **simetrala dužine** $\overline{AB}$.

[T7] **Propozicija.** Neka su A i B, $A \neq B$, fiksne točke izometrije $f : M \to M$ i $p = AB$. Tada je $f = i_M$ ili je $f = s_p$.

[T8] **Osnovni teorem o izometrijama.** Svaka izometrija $f : M \to M$ je osna simetrija, kompozicija dviju osnih simetrija ili kompozicija triju osnih simetrija, tj. svaka izometrija je kompozicija najviše tri osne simetrije.

[T9] **Korolar.** Svaka izometrija f ravnine je bijekcija ravnine na samu sebe.

[T10] **Korolar.** Ako se dvije izometrije $f, g : M \to M$ podudaraju u tri nekolinearne točke, onda je $f = g$. Odavde slijedi da je svaka izometrija ravnine potpuno određena s tri para pridruženih točaka (s time da niti jedna trojka nije kolinearna).

Kažemo da je pravac q **okomit** na pravac p ako je $q \neq p$ i $s_q(p) = p$. Pišemo $q \perp p$.

Zadatak 1. Dokažite:

(1) Izometrija ravnine je injektivno preslikavanje.

(2) Ako je f izometrija, tada je i f^{-1} izometrija.

(3) Ako su f_1 i f_2 izometrije, tada je i $f_1 \circ f_2$ izometrija.

Zadatak 2. Provjerite je li relacija "biti okomit" refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Zadatak 3. Koliko osi simetrija ima skup koji se sastoji od:

(1) dvije točke

(2) jednog pravca

(3) pravca i točke izvan njega

(4) kružnice i točke

(5) kružnice i pravca.

Zadatak 4. Zadane su kružnica k i jedna njezina tetiva. Konstruirajte kružnicu k' osnosimetričnu kružnici k u odnosu prema pravcu t na kojemu leži ta tetiva. Koliko osi simetrija ima skup $\{k, k', t\}$?

Zadatak 5. Neka su zadani pravci $p \neq q$ i točka $A \notin p, q$. Odredite točke $(s_p \circ s_q)(A)$ i $(s_q \circ s_p)(A)$.

Zadatak 6. Dokažite da kompozicija dviju osnih simetrija nije osna simetrija.

Zadatak 7. Neka su p_1, p_2 i p_3 pravci koji prolaze točkom T. Dokažite da postoji jedinstveni pravac p kroz točku T takav da je $s_p = s_{p_1} \circ s_{p_2} \circ s_{p_3}$.

Zadatak 8. Neka su p_1, p_2, p_3 pravci koji prolaze kroz točku T. Dokažite da tada vrijedi:

$$s_{p_1} \circ s_{p_2} \circ s_{p_3} = s_{p_3} \circ s_{p_2} \circ s_{p_1}.$$

Zadatak 9. *U ravnini je dano $m = 3^n$, $n \in \mathbb{N}$, pravaca koji prolaze točkom T. Dokažite da postoji jedinstveni pravac $p \ni T$ takav da je*

$$s_p = s_{p_1} \circ s_{p_2} \circ \ldots \circ s_{p_m}.$$

Zadatak 10. Neka su A, B, C, D četiri nekolinearne točke takve da je $d(A, B) = d(C, D)$ i $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ nisu osnosimetrične. Nađite s_1 i s_2 tako da je $(s_2 \circ s_1)(\overline{AB}) = \overline{CD}$.

2.2 Rotacije

Rotacija s centrom O (ili oko točke O) je izometrija ravnine M čija je jedina fiksna točka centar O ili je identiteta i_M.

[TR] **Teorem.** (a) Neka su $p, p' \in M$ dva pravca u ravnini M koji se sijeku u točki O. Tada je kompozicija $r = s_p \circ s_{p'}$ rotacija s centrom u točki O.
(b) Obratno, za svaku rotaciju $r : M \to M$ s centrom O i svaki pravac p kroz O postoje pravci p' i p'' koji se sijeku u O takvi da je $s_{p'} \circ s_p = r = s_p \circ s_{p''}$.

Zadatak 11. Neka su zadane točke A i B. Odredite središte rotacije koja prevodi točku A u točku B. Koliko ima takvih rotacija?

Zadatak 12. Konstruirajte rotaciju (tj. odredite centar rotacije i par pridruženih točaka) koja preslikava:

(a) zadani pravac a u neki drugi zadani pravac b

(b) zadanu dužinu $\overline{AB}$ u samu sebe

(c) zadani paralelogram $ABCD$ u samog sebe.

Zadatak 13. Neka je $a||b$, te $A \in a$ i $B \in b$. Konstruirajte rotaciju r takvu da vrijedi $r(a) = b$ i $r(A) = B$

Zadatak 14. Neka su r_1 i r_2 rotacije s centrom O. Tada je i $r_1 \circ r_2$ rotacija s centrom O i vrijedi da je $r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1$.

Zadatak 15. Dokažite da je inverz rotacije s centrom u O opet rotacija s centrom u O.

2.3 Centralne simetrije

Neka je $O \in M$. **Centralna simetrija** $s_O : M \to M$ je bijekcija definirana ovako: ako je $T \in M$, a $T' = s_O(T)$, onda je O polovište dužine $\overline{TT'}$. (Vektorski: $\overrightarrow{OT'} = -\overrightarrow{OT}$.)

[TC] **Teorem.** Centralna simetrija s_O s centrom u O je kompozicija $s_p \circ s_q$ dviju osnih simetrija s bilo kojim okomitim osima p i q koje prolaze kroz O. Nadalje, $s_p \circ s_q = s_q \circ s_p$. Stoga je s_O rotacija s centrom O i to jedinstvena involutorna rotacija s centrom u O.

Zadatak 16. Konstruirajte centralno simetričnu sliku:

(a) jednakostraničnog trokuta s obzirom na njegovo težište kao centar simetrije. Što je unija, a što presjek tih trokuta?

(b) kružnice u odnosu na proizvoljnu točku koja ne leži na njoj.

Zadatak 17. Koliko centara centralne simetrije ima unija dvaju

(a) pravaca koji se sijeku

(b) paralelnih pravaca.

Zadatak 18. Neka je f izometrija ravnine koja točku A preslikava u A', a točku B u B'. U kakvom položaju moraju biti točke A, A', B, B' da f bude centralna simetrija.

Zadatak 19. Ako za $a \neq b$ vrijedi $s_a \circ s_b = s_b \circ s_a$, onda su pravci a i b okomiti. Dokažite!

2.4 Translacije

Neka je $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{PQ}$ vektor ravnine M. **Translacija** $t_{\overrightarrow{a}} : M \to M$ je izometrija takva da je $t_{\overrightarrow{a}}(T) = T'$, $\overrightarrow{TT'} = \overrightarrow{a}$.

Vrijedi:

$$t_{\overrightarrow{a}} \circ t_{\overrightarrow{b}} = t_{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}$$

$$t_{\overrightarrow{0}} = i_M.$$

Zadatak 20. Dokažite da translacija ravnine preslikava pravac u njemu paralelan pravac.

Zadatak 21. Neka su $A, B \in M$. Dokažite da je tada $s_B \circ s_A = t_{2\overrightarrow{AB}}$.

Zadatak 22. Pet centralnih simetrija s_A, s_B, s_C, s_D, s_E zadovoljava uvjet $s_C \circ s_D \circ s_E \circ s_B \circ s_A = s_E$. U kojem položaju se nalaze točke A, B, C, D, E?

Zadatak 23. Neka su $P_1, \ldots, P_n$ točke ravnine M i $n = 2k$. Uz koji uvjet je izometrija

$$f = s_{P_n} \circ \cdots \circ s_{P_1}$$

identiteta?

Zadatak 24. Translacija $t_{\overrightarrow{a}}$ ravnine M za vektor $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$ je kompozicija osnih simetrija s_p i s_q s obzirom na paralelne pravce p i q koji su okomiti na AB, pri čemu je A leži na p, a polovište P dužine $\overline{AB}$ leži na q. Dokazati!

Zadatak 25. Odredite sve fiksne točke i fiksne pravce sljedećih izometrija:

(1) osne simetrije,

(2) centralne simetrije,

(3) translacije za vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$.