

7 Trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe

7.1 Trigonometrijske jednadžbe

Napomena. $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$, $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$.

Zadatak 1. Riješite sljedeće trigonometrijske jednadžbe:

1. $2 + \cos 4x = 2 \sin^2 x$
2. $\sin 3x \cdot \sin x + 1 = 0$
3. $\frac{1 - \cos x}{\sin x} + \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} = 0$
4. $\operatorname{tg} 3x \cdot \cos x = 0$
5. $\cos x - 2 \cos 3x + \cos 5x = 0$
6. $\sin^2 x + \cos^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$
7. $2 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$
8. $3 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 2$
9. $11 \operatorname{ctg} x - 5 \operatorname{tg} x = \frac{16}{\sin x}$

Napomena. Jednadžbe tipa

$$a \sin x + b \cos x = c \quad (1)$$

moгу se rješavati na sljedeće načine:

1. Podijelimo li ovu jednadžbu s $\sqrt{a^2 + b^2}$ dobivamo:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Kako je

$$\left| \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|, \left| \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1$$

postoji kut φ takav da vrijedi

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Gornja jednadžba prelazi u

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2. Jednadžba (1) se može riješavati i uvođenjem univerzalne zamjene

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

(Tu se mora provjeriti je li $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, (tj. x sa svojstvom $\cos \frac{x}{2} = 0$) rješenje jednadžbe.) Tada je

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

i jednadžba se svodi na kvadratnu po nepoznanici t .

Zadatak 2. Riješite sljedeće jednadžbe:

1. $\sin x - 3 \cos x = 1$
2. $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 0$
3. $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = 2\sqrt{2}$
4. $2\sqrt{3} \sin^2 x - \sin 2x = 2 \sin x$
5. $\sin 13x + \cos 13x = \sqrt{2} \sin 17x$
6. $2 \sin x - \cos x = 1$
7. $8 \sin x - 15 \cos x = 17$
8. $3 \sin x + 4 \cos x = 6$

Napomena. Za simetrične jednadžbe

$$a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$$

uvodi se sljedeća supstitucija:

$$\sin x + \cos x = t, \quad \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Zadatak 3. Riješite jednadžbu

$$2 \sin x \cos x - \sin x - \cos x = 1.$$

Zadatak 4. Riješite sljedeće sustave jednadžbi:

$$1. \quad \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{1}{2}, \quad x - y = \frac{4\pi}{3}$$

$$2. \sin x + \sin y = 1, \quad x + y = \frac{\pi}{2}$$

Zadatak 5. Riješite sljedeće sustave jednačbi:

$$1. \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4}, \quad \cos x \cdot \cos y = \frac{3}{4}$$

$$2. \operatorname{tg} x + \operatorname{tgy} = 5, \quad \operatorname{tg}(x + y) = -1$$

$$3. \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{2}, \quad \cos^2 x - \sin^2 y = \frac{1}{2}$$

7.2 Trigonometrijske nejednačbe

Zadatak 6. Riješite sljedeće nejednačbe:

$$1. \sin^2 x + 2 \sin x > 0$$

$$2. \sin x + \cos x > 1$$

$$3. 2 \sin^2 x \geq \sin 2x$$

$$4. 3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x - 8 \sin x \cos x > 0$$

$$5. \cos 8x - \cos 4x \leq 0$$

$$6. \frac{2 \cos x - 1}{5x - 3 - 2x^2} \geq 0$$