5 Površine

Označimo s a duljinu jedne stranice, s v duljinu pripadne visine i sa $P(ABCD)$ površinu paralelograma $ABCD$. Tada je $P(ABCD) = av$.

Površina $\triangle ABC$ s duljinom stranice a i duljinom pripadne visine v_a dana je formulom $P(ABC) = \dfrac{av_a}{2}$.

Ako je $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ onda je $P(ABC) = P(A'B'C')$.

Ako je $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ onda je

$$\frac{P(ABC)}{P(A'B'C')} = \frac{a^2}{a'^2},$$

tj. površine sličnih trokuta odnose se kao kvadrati odgovarajućih stranica.

Neka je $ABCD$ trapez s duljinama osnovica a i c, te duljinom visine v. Tada je

$$P(ABCD) = \frac{a+c}{2}v.$$

Površina poligona Π obzirom na neki rastav na trokute jednaka je površini obzirom na triangulaciju dobivenu iz tog rastava ($P(\Pi) = P_1 + P_2 + \cdots + P_k$, P_i - površine trokuta).

Zadatak 1. Točka T unutar $\triangle ABC$ s duljinama stranica a, b, c udaljena je od pravac BC, AC, AB za x, y, z. Dokažite da je $ax + by + cz$ konstanta tj. ne ovisi o izboru točke T.

Zadatak 2. Neka je r polumjer pravokutnom $\triangle ABC$ upisane kružnice, D dirалište te kružnice i hipotenuze, a u i v duljine dužina $\overline{AD}$ i $\overline{BD}$. Dokažite da je $P(ABC) = uv$.

Zadatak 3. Nad stranicama jednakokračnog pravokutnog trokuta s duljinom kateta a konstruirani su kvadrati. Središta tih kvadrata određuju trokut. Izračunajte njegovu površinu.

Zadatak 4. Odredite površinu paralelograma ako duljina jedne njegove stranice iznosi 51cm, a duljine dijagonala su 40cm i 70cm

Zadatak 5. Bilo kojom točkom T unutar $\triangle ABC$ povučene su paralele sa stranicama. Neka su D, E, F, G, H, K sjecišta tih paralela sa stranicama $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ i $\overline{AB}$, redom. Neka je P površina $\triangle ABC$ a P_1, P_2, P_3 površine $\triangle DTE$, $\triangle TGF$ i $\triangle KHT$. Dokažite da vrijedi

$$\sqrt{P} = \sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3}.$$

Zadatak 6. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ paralelograma $ABCD$ odabrane su točke K i L takve da je $|AK| = |CL|$, a T je bilo koja točka stranice $\overline{AD}$. Pravci KL, BT i CT rastavljaju paralelogram na tri trokuta i tri četverokuta. Dokažite da je površina jednog od trokuta jednaka zbroju površina preostala dva trokuta .

Zadatak 7. Dan je konveksan četverokut $ABCD$. Na produžetku stranice $\overline{AB}$ odabrana je točka M takva da je $|BM| = |AB|$, na produžetku stranice $\overline{CD}$ odabrana je točka P takva da je $|DP| = |CD|$, na produžetku stranice $\overline{BC}$ odabrana je točka N takva da je $|CN| = |BC|$ i na produžetku stranice $\overline{DA}$ odabrana je točka Q takva da je $|AQ| = |AD|$. Dokažite da je $P(MNPQ) = 5P(ABCD)$.

Zadatak 8. Točke K i L, M i N, P i Q dijele stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ $\triangle ABC$na po tri sukladna dijela. Pravci CK, CL, MQ i NP određuju trapez $DEFG$. Pokažite da je $P(DEFG) = \frac{1}{9}P(ABC)$.

Zadatak 9. Dijagonale trapeza $ABCD$ sijeku se u točki M. Izračunajte površinu tog trapeza ako je $P(ABM) = u^2$ i $P(CDM) = v^2$.

Zadatak 10. Jednakokračnom pravokutnom trokutu upisan je kvadrat na dva načina: prvomu je jedan vrh na hipotenuzi, a drugomu je jedna stranica na hipotenuzi. Ako je površina prvog kvadrata $P_1 = 441\text{cm}^2$, kolika je površina drugog?

Zadatak 11. Zadan je kvadrat $ABCD$. Paralelno s njegovim dijagonalama položena su po dva pravca takva da su njihova sjecišta sa stranicama kvadrata vrhovi pravilnog osmerokuta. Izračunajte površinu tog osmerokuta ako je duljina stranice kvadrata a.