4 Skupovi brojeva

Skup prirodnih brojeva - $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Aksiom matematičke indukcije

Neka je $\mathbb{N}$ skup prirodnih brojeva i M podskup od $\mathbb{N}$. Ako za M vrijede svojstva:

1) $1 \in M$

2) $n \in M \Rightarrow (n+1) \in M, \forall n \in \mathbb{N}$

onda je $M = \mathbb{N}$.

Na temelju aksioma matematičke indukcije izgrađuje se metoda matematičke indukcije:

Metoda matematičke indukcije

(B) BAZA INDUKCIJE - provjera da vrijedi tvrdnja T_n za $n = 1$.

(P) PRETPOSTAVKA INDUKCIJE - pretpostavimo da tvrdnja T_n vrijedi za $n = k$.

(K) KORAK INDUKCIJE - na temelju pretpostavke dokazujemo da tvrdnja T_n vrijedi za prirodan broj $n = k + 1$.

Primjer. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

Zadatak 1. Pokažite da tvrdnja

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n + 2$$

ispunjava drugi uvjet iz aksioma matematičke indukcije, a zatim uočite da je lažna $\forall n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 2. Uočite da je tvrdnja

$$n^2 - n + 41 \quad \text{je prost broj}$$

istinita za $n = 1, 2, \ldots, 40$ i neistinita za $n = 41$.

Napomena. Iz *Zadataka 1. i 2.* zaključujemo da na osnovu nepotpune indukcije ne možemo prihvatiti istinitost neke tvrdnje.

Zadatak 3. Dokažite metodom matematiče indukcije da $\forall n \in \mathbb{N}$ vrijede sljedeće tvrdnje:

a) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i b_i = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2^i}{1+a^{2^i}} = \frac{2}{a^2-1} + \frac{2^{n+1}}{1-a^{2^{n+1}}}$

c) $8|(3^{2n}-1)$

d) $3|(11 \cdot 10^{2n}+1)$

e) $\displaystyle\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{11}{24}$

f) $(1+h)^n > 1+nh, \quad h>0,\ n>1$ (Bernoullijeva nejednakost)

g) $2^n > n$

Skup cijelih brojeva - $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Zadatak 4. Dokažite: Ako je n cijeli broj onda su brojevi

$$\frac{n^3-n}{6} \qquad \text{i} \qquad \frac{n(3n^2+2n-1)}{2}$$

također cijeli brojevi.

Zadatak 5. U skupu $\mathbb{Z}$ riješite jednadžbu

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 3024.$$

Zadatak 6. Nađite sve cijele brojeve $z \in \mathbb{Z}$, $|z| < 100$, koji pri djeljenju sa 7 daju ostatak 3, a pri djeljenju sa 11 ostatak 10.

Skup racionalnih brojeva - $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

Primjer. Decimalni prikaz racionalnog broja:

$$\frac{1}{4} = 0.25, \qquad \frac{5}{9} = 0.\dot{5} \qquad 0.\dot{3}6\dot{6} = \frac{122}{333}.$$

Napomena. Svaki racionalan broj ima konačan ili beskonačan periodičan decimalni prikaz.

Skup iracionalnih brojeva - $\mathbb{I}$

$$\mathbb{I} = \{a : a \notin \mathbb{Q} \ \wedge \ a = \pm d_0.d_1d_2d_3\ldots\}$$

Primjer. $\sqrt{2},\ \pi,\ e$.

Skup realnih brojeva - $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Napomena. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Zadatak 7. Dokažite da je zbroj racionalnog i iracionalnog broja iracionalan.

Zadatak 8. Ako su a i b iracionalni brojevi moraju li $a+b$ i $a-b$ biti iracionalni brojevi?

Zadatak 9. Dokažite da je $\sqrt{3}$ iracionalan broj.

Zadatak 10. Dokažite da je $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ iracionalan broj.

Apsolutna vrijednost realnog broja je funkcija

$$|\ | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \text{ definirana formulom}$$

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Napomena. $\sqrt{x^2} = |x|$.

Zadatak 11. Pojednostavnite razlomke

(1) $\dfrac{x^2 - |x-1| - 1}{x^2 - 1}$

(2) $\dfrac{(|x|-1)(x-1)}{x^2 - 2|x| + 1}$

(3) $\dfrac{|2x-3| + |3x-2|}{x^2 - 3x + 2}$

Zadatak 12. Riješite jednadžbe

(1) $|x-1|-|1-2x|=5$

(2) $|1-2x|+|2-3x|+|3-4x|=9$

(3) $\left|-\dfrac{1-x}{2x+3}\right|-3=0$

Zadatak 13. Riješite nejednadžbe

(1) $||x|-5|<3$

(2) $|x|-|x-3|-|x+5|\leq 2$

(3) $\left|\dfrac{x-1}{2x+1}\right|>1$

Zadatak 14. Dana je funkcija

$$g(x)=\sqrt{4x^2-4x+1}-\sqrt{x^2+6x+9}-\sqrt{x^2}.$$

Koliko je $g(x)$ za $x<-3$? Izračunajte $g(-\sqrt{119})$ i $g(-\pi)$.

Skup kompleksnih brojeva - $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y):x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\},$$

na kojemu su operacije zbrajanja i množenja definirane na sljedeći način:

(1) zbrajanje: $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$

(2) množenje: $(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1)$

Neka je $z=(x,y)\in\mathbb{C}$ i $i=\sqrt{-1}$.

Standardni ili algebarski zapis kompleksnog broja:

$$z=x+yi,\qquad x=\operatorname{Re}z,\ y=\operatorname{Im}z.$$

Kompleksno konjugirani broj:

$$\bar{z}=x-yi.$$

Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja:

$$|z|=\sqrt{\bar{z}\cdot z}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Realan broj a identificira se s kompleksnim brojem $(a, 0)$ pa je $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Kompleksne brojeve prikazujemo u kompleksnoj ili Gaussovoj ravnini.

Za sve $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ vrijedi:

1. $\bar{\bar{z}} = z$,
2. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2 \neq 0$
5. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
6. $|z| = |\bar{z}|$
7. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
8. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Primjer. $z = i\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$. Odredite $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z,\ \bar{z},\ |z|$.

Zadatak 15. Odredite sve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi

(1) $\operatorname{Im} \frac{z}{\bar{z}} = 1$

(2) $z^2 + \bar{z} = 0$

Zadatak 16. Neka je $z = \frac{u-1}{u+1}, u \neq \pm 1, u \in \mathbb{C}$. Dokažite sljedeću tvrdnju:

$$\operatorname{Re} z = 0 \iff |u| = 1.$$

Zadatak 17. Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} z_1 + \bar{z}_2 &= 1 + 2i \\ 2 + iz_1 + \frac{z_2}{i} &= 0, \end{aligned}$$

ako je $\operatorname{Im} z_2 = -\frac{6+\sqrt{6}}{2}$.

Zadatak 18. Odredite, a zatim skicirajte u Gaussovoj ravnini sljedeće skupove brojeva:

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \frac{z-2}{z+2} \leq 0 \ \wedge \ |z| \geq 1\}$

(b) $B = \{z \in \mathbb{C} : \; |z - 1 + 2i| > 3\}$

(c) $C = \{z \in \mathbb{C} : \; |z + 1| = |z + 2i|\}$

Zadatak 19. Zadana je funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = 2z - 1 + i$. Odredite skupove $f(\{2 - i, 1\})$, $f^{-1}(\{3 - i, 4i\})$.

Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\begin{aligned} r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arg(z) \in [0, 2\pi >, \\ & \text{za } x \neq 0, \; \varphi \text{ je jedno od dva rješenja jednadžbe } \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x} \\ & \text{(određuje se prema predznacima od } x \text{ i } y\text{)}, \\ & \text{za } x = 0, y > 0 \implies \varphi = \frac{\pi}{2}; \\ & \text{za } x = 0, y < 0 \implies \varphi = \frac{3\pi}{2}; \end{aligned}$$

Primjer. $z_a = 1 + i^{123}$, $z_b = i + \sqrt{3}$

Množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva

$z_j = r_j(\cos\varphi_j + i\sin\varphi_j), \quad j = 1, 2 \qquad \implies$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \end{aligned}$$

Potenciranje kompleksnih brojeva

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad \implies$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Korjenovanje kompleksnih brojeva

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad \implies$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

Napomena. Postoji točno n različitih vrijednosti n-toga korijena iz z.

Zadatak 20. Neka je $z = \dfrac{1-i}{i+\sqrt{3}}$. Odredite $\sqrt[6]{z}$ i z^{36}.

Zadatak 21. Izračunajte

(1) $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^6$

(2) $\dfrac{(-1+\sqrt{-3})^{15}}{(1-\sqrt{-1})^{20}}$

(3) $\sqrt[4]{-4}$

(4) $\sqrt[8]{\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$

Zadatak 22. Riješite jednadžbu i rješenja zapišite u algebarskom obliku

$$z^3 + 8i = 0.$$

Zadatak 23. Neka je $u = 3 - 3\sqrt{3}i$. Odredite sve kompleksne brojeve z sa svojstvom da je

$$\arg(z^4 \cdot i^{34}) = \arg u, \quad |z| = 4.$$