

8 Stereometrija

Volumeni i oplošja nekih tijela

Oznake: v visina, B - površina baze, P - površina pobočja/plašta, R - polumjer baze, s - izvodnica.

- **Prizma**

$$V = Bv, \quad O = 2B + P.$$

- **Piramida**

$$V = \frac{1}{3}Bv, \quad O = B + P.$$

- **Valjak**

$$V = R^2v\pi.$$

Uspravni valjak

$$O = B + P = 2R^2\pi + 2Rv\pi.$$

- **Stožac**

$$V = \frac{1}{3}R^2v\pi.$$

Uspravni stožac

$$O = B + P = R^2\pi + R\pi s.$$

- **Kugla**

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi, \quad O = 4R^2\pi.$$

Teorem. (Euler) Ako s v, b, s označimo broj vrhova, bridova, odnosno stranica konveksnog poliedra, onda vrijedi relacija

$$v - b + s = 2.$$

Zadatak 1. Odredite broj bridova, vrhova i strana u piramidi i uvjerite se da vrijedi Eulerova relacija.

Zadatak 2. Osnovka prizme je jednakostraničan trokut sa stranicama duljine 8cm. Volumen prizme iznosi $160\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Kolika je duljina bočnog brida prizme ako je on prema osnovici priklonjen pod kutom od 45° .

Zadatak 3. Duljina dijagonale kvadra jednaka je D . S jednom pobočkom dijagonala zatvara kut 30° , a s drugom 45° . Odredite volumen kvadra i kut što ga dijagonala zatvara d trećom pobočkom.

Zadatak 4. Površine pobočki uspravne trostrane prizme su 30cm^2 , 40cm^2 , 50cm^2 , a površina baze je 24cm^2 . Odredite oplošje, stranice i volumen ove prizme.

Zadatak 5. U pravilnu šesterostranu piramidu kojoj je osnovni brid duljine a , a visina ima duljinu v , upisana je kocka čija četiri vrha leže na pobočnim bridovima piramide. Koliki je omjer volumena kocke prema volumenu piramide?

Zadatak 6. Dana je pravilna trostrana piramida $ABCD$. Točka P je na bridu $\overline{BD}$ i vrijedi $|BP| : |PD| = 1 : 2$, a točka Q je na bridu $\overline{CD}$ i vrijedi $|CQ| : |QD| = 2 : 1$. U kojem omjeru ravnina APQ dijeli volumen piramide.

Zadatak 7. Visina krnje piramide je 15cm , njezin volumen iznosi 475cm^3 , a površine njezinih baza su u omjeru $4 : 9$. Kolike su te površine?

Zadatak 8. Krug površine $100\pi\text{cm}^2$ razsječe se u dva polukruga koji se zatim saviju u plašteve stožaca i spoje u "bovu". Kolika je površina i volumen te "bove"?

Zadatak 9. Čašu oblika valjka s promjerom osnovke 6cm i visinom 10cm , punu vode, stavimo na kosinu s kutom 30° . Odredite kolika će količina vode pri tome ostati u čaši.

Zadatak 10. Odredite omjer volumena valjka i pravilne šesterostrane prizme upisane u taj valjak.

Zadatak 11. Odredite polumjer kugle upisane u pravilnu trostranu piramidu kojoj je duljina brida baze a , a visina ima duljinu v .

Zadatak 12. Ako se krnjem stožcu čija izvodnica s ravninom osnovke zatvara kut 45° može upisati kugla, dokažite da je onda površina plašta stožca dvostruko veća od površine kugle.

Zadatak 13. Oko pravilne četverostrane piramide opisana je sfera. Odredite oplošje te sfere ako je duljina osnovnog brida prizme a , a kut pobočke pri vrhu je α .

Zadatak 14. Najdulja i najkraća izvodnica stožca odnose se kao $S : s = 4 : 3$, a njihovi prikloni kutovi prema osnovki $\beta : \alpha = 1 : 2$. Ako je polumjer osnovke stožca $r = 7$, odredite volumen stožca.