4 Sukladnost i sličnost trokuta

4.1 Sukladnost trokuta

Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ trokuti sa stranicama duljina a, b, c, odnosno a', b', c'. Kažemo da su ti trokuti **sukladni** ako postoji bijekcija $f : \{A, B, C\} \to \{A', B', C'\}$ takva da je $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ i ako vrijede jednakosti $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$.
Oznaka: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Minimalni dovoljni uvjeti za sukladnost trokuta dani su sljedećim teoremima:
Teorem (S-S-S). Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice.

Teorem (S-K-S). Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih.

Teorem (K-S-K). Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i kutovima koji su priležeći toj stranici.

Teorem (S$^{>}$-S-K). Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici.

Zadatak 1. Stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ jednakostraničnog $\triangle ABC$ produžimo preko vrhova B, C, A redom za istu duljinu. Dokažite da je novonastali trokut također jednakostraničan.

Zadatak 2. Dokažite da su dva trokuta sukladna ako se podudaraju u:

a) dvije stranice i težišnici koja pripada jednoj od njih,

b) dva kuta i odresku simetrale jednog od njih,

c) dva kuta i odresku simetrale trećeg kuta,

d) jednoj stranici, kutu na njoj i visini spuštenoj iz vrha tog trokuta.

Zadatak 3. Dan je $\triangle ABC$ u kojemu je $|AB| = |AC|$ i $\measuredangle BAC = 80°$. Unutar $\triangle ABC$ odabrana je točka M takva da je $\measuredangle MBC = 30°$ i $\measuredangle MCB = 10°$. Odredite $\measuredangle AMC$.

Zadatak 4. Ako su u trokutu $\triangle ABC$ jednake dvije visine dokažite da je trokut jednakokračan.

Zadatak 5. Središta upisane i opisane kružnice jednakokračnog $\triangle ABC$ simetrična su u odnosu na osnovicu $\overline{AB}$. Koliki su kutovi tog trokuta?

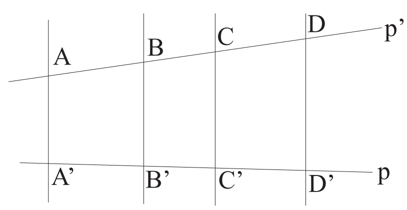
Zadatak 6. Dokažite da su dijagonale romba međusobno okomite i da raspolavljaju unutrašnje kutova romba.

Zadatak 7. Dan je paralelogram ABCD s duljinama stranica a i b. Pokažite da simetrale kutova tog paralelograma tvore pravokutnik i izrazite duljinu d njegove dijagonale pomoću a i b.

4.2 Sličnost trokuta

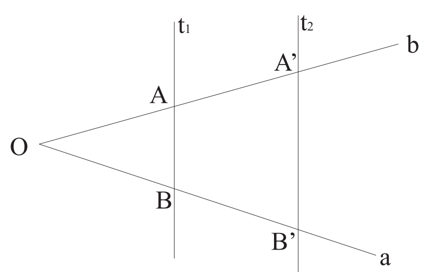
Teorem (Talesov teorem o proporcionalnosti). Ako su točke A, B, C, D na pravcu p', a točke A', B', C', D' točke na pravcu p dobivene paralelnom projekcijom, onda će se odgovarajući omjeri duljina sačuvati, tj.

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A'B'|}{|C'D'|} \quad , \quad \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|CD|}{|C'D'|}.$$



Korolar (Talesov poučak o proporcionalnosti u pramenu pravaca). Ako se dva pravca a i b sijeku u točki O i ako su oni presječeni paralelnim pravcima t_1 i t_2 takvima da je $b \cap t_1 = A$, $a \cap t_1 = B$, $b \cap t_2 = A'$, $a \cap t_2 = B'$, onda vrijedi:

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA'|}{|OB'|} \quad , \quad \frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|} \quad , \quad \frac{|OB|}{|BA|} = \frac{|OB'|}{|B'A'|}.$$



Teorem (o simetrali unutarnjeg kuta trokuta). Simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli tom trokutu nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih stranica.

Sličnost je preslikavanje ravnine M na samu sebe za koje vrijedi:

$$d(A', B') = k \cdot d(A, B), \quad \forall A, B \in M, \quad k \in \mathbb{R}^+,$$

pri čemu je $f(A) = A'$ i $f(B) = B'$.

Dva su **trokuta slična** ako postoji bijekcija $f : \{A, B, C\} \to \{A', B', C'\}$ takva da $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ povlači $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ i $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{c'}{c} = k$ (k - koeficijent sličnosti), tj. odgovarajući kutovi su jednaki, a odgovarajuće stranice razmjerne.

Oznaka: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Napomena. Sukladnost trokuta je specijalan slučaj sličnosti za koeficijent $k = 1$.

Teorem (K-K-K sličnost). Dva su trokuta slična ako su im odgovarajući kutovi jednaki.

Teorem (S-S-S sličnost). Dva su trokuta slična ako su im odgovarajuće stranice razmjerne.

Teorem (S-K-S sličnost). Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a kutovi među njima jednaki.

Teorem (S$^>$-S-K sličnost). Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalnme i kutovi nasuprot većim stranicama jednaki.

Zadatak 8. Dokažite da je u svakom trokutu produkt duljine stranice i pripadne visine neovisan o izboru stranice.

Zadatak 9. Ako u $\triangle ABC$ vrijedi $\beta = 2\alpha$, tada je $b^2 = a^2 + ac$. Dokažite!

Zadatak 10. Neka je D nožište visine spuštene iz vrha pravog kuta pri vrhu C na hipotenuzu $\overline{AB}$ pravokutnog $\triangle ABC$. Točkom D povučena je paralela s katetom $\overline{BC}$ i neka ona siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki E. Odredite $|AE| : |EC|$ ako je $|AC| : |BC| = 1 : 2$.

Zadatak 11. Krajevima A i B dužine $\overline{AB}$ povučene su paralelne dužine $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$ duljina a i b. Neka je C_1 presjek pravaca BA_1 i AB_1, C presjek paralele sa AA_1 i stranice $\overline{AB}$, te $|CC_1| = c$. Dokažite da je $1/c = 1/a + 1/b$.

Zadatak 12. Dva su kuta u jednom trokutu α, β, a dva kuta drugog trokuta α, $180° - \beta$. Dokažite da su stranice tih trokuta nasuprot jednakim kutovima razmjerne stranicama nasuprot suplementnim kutovima.

4.3 Primjena Pitagorinog počka

Teorem (Euklid). (a) Duljina katete pravokutnog trokuta je geometrijska sredina duljine hipotenuze i duljine svoje ortogonalne projekcije na hipotenuzu.
(b) Visina na hipotenuzu pravokutnog trokuta je geometrijska sredina duljina njenih odsječaka na hipotenuzi.
Teorem (Pitagorin poučak). Ako je trokut $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, c pravokutan s pravim kutom kod vrha C, onda vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$.
Teorem (Obrat Pitagorinog poučka). Ako za stranice a, b, c trokuta $\triangle ABC$ vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$, onda je $\triangle ABC$ pravokutan s pravim kutom kod vrha C.

Zadatak 13. Prirodni brojevi x, y, z koji zadovoljavaju jednakost $x^2 + y^2 = z^2$ nazivaju se Pitagorini brojevi. Pokažite da dvije klase tih brojeva daju formule

a) $x = 2n + 1$, $y = 2n^2 + 2n$, $z = 2n^2 + 2n + 1$ (Pitagora),

b) $x = n^2 - 1$, $y = 2n$, $z = n^2 + 1$ (Platon).

Zadatak 14. Dokažite da za duljine stranica a, b, c pravokutnog $\triangle ABC$ vrijedi

a) $c^3 > a^3 + b^3$.

b) $a + b \leq \sqrt{2}c$. Kada vrijedi jednakost?

Zadatak 15. Neka su t_a, t_b, t_c duljine težisnica pravokutnog $\triangle ABC$. Pokažite da vrijedi $t_a^2 + t_b^2 = 5t_c^2$.

Zadatak 16. Neka su a, b, c duljine stranica pravokutnog trokuta $\triangle ABC$, a v duljina visine na hipotenuzu. Dokažite da vrijedi $\dfrac{1}{v^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$.

Zadatak 17. Visina spuštena iz vrha pravog kuta na hipotenuzu pravokutnog trokuta dijeli pravi kut u omjeru $1:2$. Dokažite da nožište te visine dijeli hipotenuzu u omjeru $1:3$.

Zadatak 18. Koja relacija povezuje duljina stranica a, b, c, d konveksnog četverokuta kojemu su dijagonale okomite?

Zadatak 19. Unutar pravokutnika $ABCD$ odabrana je točka T čije su udaljenosti od vrhova A, B, C redom 15,24,20. Kolika je udaljenost točke T od vrha D?

Zadatak 20. Nad katetama pravokutnog trokuta ABC postavljeni su kvadrati $ACDE$ i $BCFG$. Iz točaka E i G spuštene su okomice na pravac AB. Neka su M i N nožišta tih okomica. Dokažite da je $|EM| + |GN| = |AB|$.

Zadatak 21. Zadno je 5 dužina, takvih da se od svake 3 može načiniti trokut. Dokažite da je bar jedan od tih trokuta šiljastokutan.