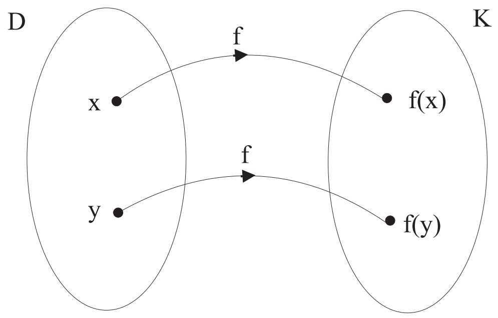
4 Funkcije

Neka su D i K neprazni skupovi i f pravilo koje svakom elementu skupa D pridružuje točno jedan element skupa K. Tada se uređena trojka (D, K, f) naziva **preslikavanje** ili **funkcija** sa skupa D u skup K i označava sa $f : D \to K$. Skup D zovemo **područje definicije** ili **domena**, a skup K **područje vrijednosti** ili **kodomena** funkcije f.



Funkcija f element $x \in D$ preslikava u element $y \in K$, a to zapisujemo formulom $f(x) = y$. Varijablu x zovemo **nezavisna varijabla** ili **argument** funkcije, a varijablu y zovemo **zavisna** varijabla.

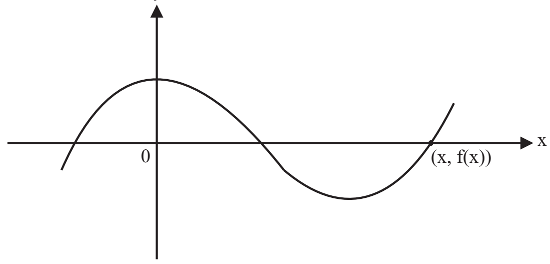
Načini zadavanja funkcije:

– tablično:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	6	7	8	9

– analitički (formulom): $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$

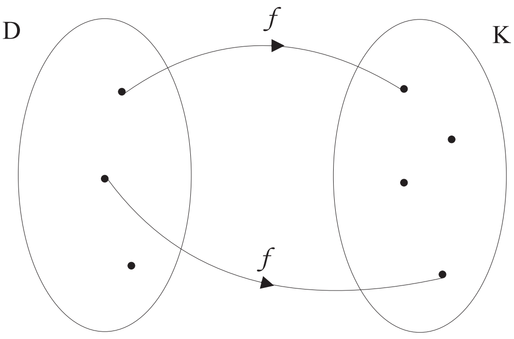
– grafički:



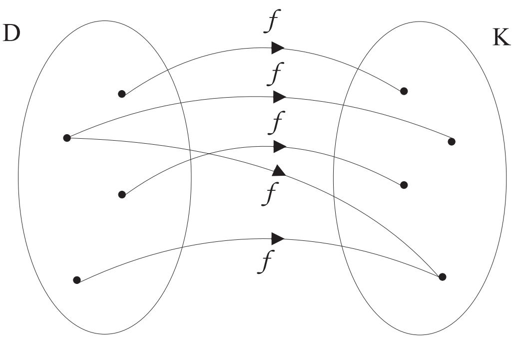
Graf funkcije f je skup $\Gamma_f = \{(x, y) : y = f(x)\}$.

Primjer 1. Koje su od sljedećih relacija funkcije?

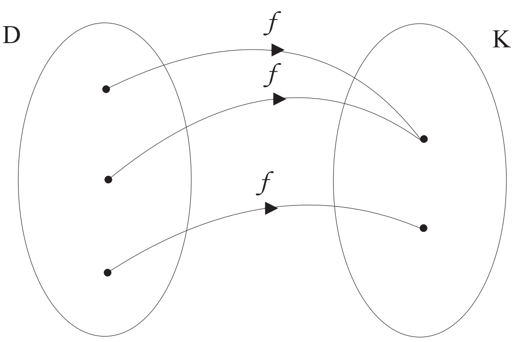
i)



ii)



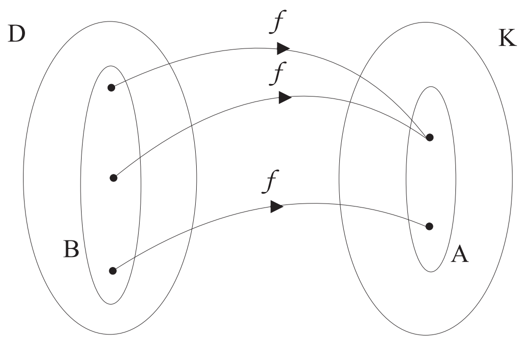
iii)



Skup $A = f(B) = \{f(x) : x \in B\} \subseteq K$ zovemo **slika** skupa B.

Skup $f^{-1}(A) = \{x \in D : f(x) \in A\} \subseteq D$ zovemo **praslika** skupa A.

Primjer 2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 1,\ A = \langle 0, 1] \implies f(A) = \langle 1, 2], f^{-1}(A) = \langle -1, 0]$.



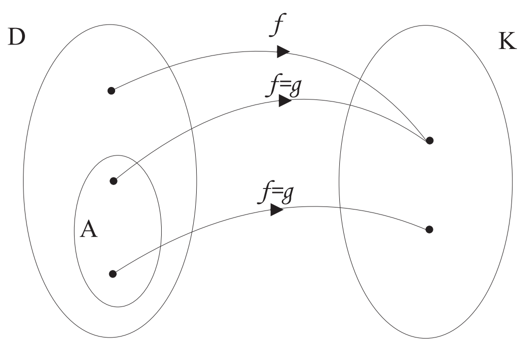
Primjer 3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $A = \{1, 2\} \Longrightarrow f(A) = \{1, 2\}, f^{-1}(A) = [1, 3\rangle$.

Za dvije funkcije $f : A \to B$ i $g : C \to D$ kažemo da su **jednake** i pišemo $f = g$, ako je $A = C$, $B = D$ i $f(x) = g(x)$, $\forall x \in C$.

Primjer 4. Neka su f_1 i f_2 realne funkcije realne varijable zadane formulama $f_1(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, $f_2(x) = x + 2$. Tada je $f_1 \neq f_2$, jer $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{2\} \neq \mathbb{R} = D_{f_2}$.

Primjer 5. Ako su $s_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, i = 1, 2$, zadane s $s_1(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ i $s_2(n) = 1 + 2 + \cdots + n$ tada je $s_1 = s_2$ (dokaz matematičkom indukcijom).

Neka je $f : D \to K$, $A \subseteq D$. Funkcija $g : A \to K$ zadana sa $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$, zove se **restrikcija** ili **ograničenje** funkcije f na skup A. Oznaka: $g = f|_A$.



Primjer 6. Neka je $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana sa $s(x) = \dfrac{x(x+1)}{2}$. Tada je $s|_{\mathbb{N}} = s_1 = s_2$ (pri čemu su s_1, s_2 funkcije iz *Primjera 5.*).

Zadatak 1. Odredite slike i praslike funkcije f za skupove S_1 i S_2 ako je

a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n^2$, $S_1 = \{1, 4\}$, $S_2 = \{5\}$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 3$, $S_1 = \{1, 3\}$, $S_2 = \langle -1, 1]$.

Zadatak 2. Neka je $f : X \to Y$ te $A, B \subseteq X$ i $C, D \subseteq Y$. Dokažite da vrijedi:

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ i obrat ne vrijedi

c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

Zadatak 3. Funkcija $\chi_A : X \to \{0, 1\}$, gdje je $A \subseteq X$, definirana formulom

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

naziva se karakteristična funkcija skupa A. Dokažite da vrijedi

a) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$

b) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$

c) $\chi_{A^C}(x) = 1 - \chi_A(x)$

d) $\chi_{A\setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$.

Kompozicija funkcija

Neka su $f : A \to B$ i $g : C \to D$ dvije funkcije. Ako je $\mathcal{R}(f) = f(A) \subseteq C$ tada je jedinstveno određena funkcija $h : A \to D$ takva da je $h(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ koju zovemo **kompozicija funkcija** f i g.

Primjer 5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$; $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty\rangle$, $g(x) = x^2 \implies g \circ f, f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = 9x^2 + 6x + 1$, $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 1$.

Svojstva kompozicije funkcija:

(i) nije komutativna: $f \circ g \neq g \circ f$,

(ii) asocijativna je: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

Zadatak 4. Odredite $g \circ f$ i $f \circ g$ ako su funkcije f i g

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - x^2$; $g : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln x$,

b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = -2n$; $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(n) = n^2 - 7$.

Zadatak 5. Dane su funkcije $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Uz koji uvjet funkcije f i g komutiraju (u smislu komponiranja funkcija)?

Surjekcija, injekcija i bijekcija

Za funkciju $f : D \to K$ kažemo da je **surjekcija** ako $\forall y \in K$ postoji barem jedan $x \in D$ takav da je $f(x) = y$, tj. ako je slika domene cijela kodomena ($\mathcal{R}(f) = K$).

Za funkciju $f : D \to K$ kažemo da je **injekcija** ako različite elemente domene preslikava u različite elemente kodomene:

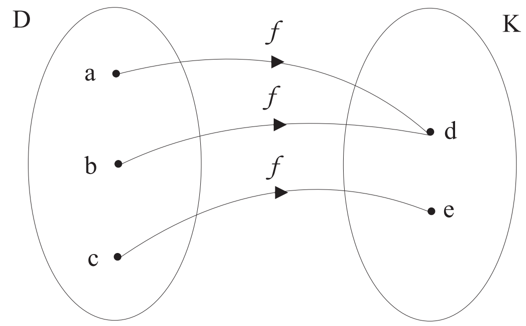
$$\forall x_1, x_2 \in D, \quad (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

$$\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D, \quad (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

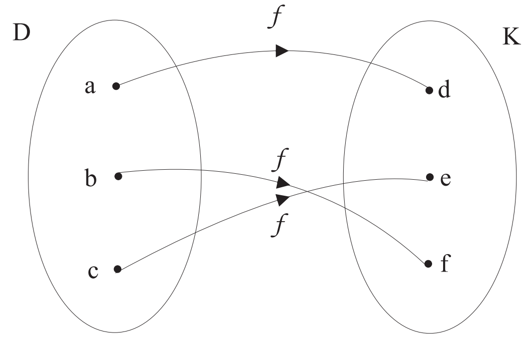
Za funkciju $f : D \to K$ kažemo da je **bijekcija** (obostrano jednoznačno preslikavanje, 1 na 1 korespodencija) ako je i surjekcija i injekcija.

Primjer 6. Odredite karakter sljedećih funkcija:

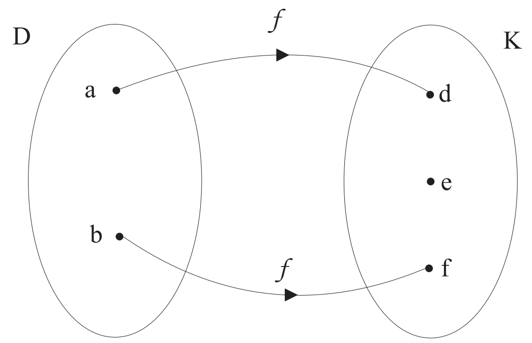
a)



b)



c)



Zadatak 6. Dokažite tvrdnje:

a) kompozicija surjekcija je surjekcija;

b) kompozicija injekcija je injekcija;

c) kompozicija bijekcija je bijekcija.

Zadatak 7. Odredite broj i karakter sljedećih funkcija:

a) $f : \{1, 2\} \to \{1, 2\}$;

b) $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$.

Zadatak 8. Dokažite tvrdnju: ako je funkcija $F : X \to Y$ surjekcija, onda za svaki skup S i svaki par funkcija $f, g : Y \to S$ vrijedi:

$$f \circ F = g \circ F \Rightarrow f = g.$$

Zadatak 9. Dane su funkcije $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$. Dokažite sljedeće tvrdnje:

a) Ako je kompozicija $g \circ f$ surjekcija, onda je i g surjekcija. Mora li i f biti surjekcija?

b) Ako je kompozicija $g \circ f$ injekcija, onda je i f injekcija. Mora li i g biti injekcija?

Inverzna funkcija

Neka su $f : D \to K$ i $g : K \to D$ funkcije. Ako vrijedi:

a) $(f \circ g) = 1_K$

b) $(g \circ f) = 1_D$

tada se funkcija g naziva inverznom funkcijom funkcije f i označava sa $g = f^{-1}$. Svaka bijekcija $f : D \to K$ ima inverznu funkciju definiranu na K sa vrijednostima u D.

Graf inverzne funkcije je simetričan s obzirom na pravac $y = x$.

Zadatak 10. Pokažite da je funkcija f bijekcija i odredite joj inverznu funkciju ako je

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{5\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $f(x) = \dfrac{3x}{x-5}$,

b) $f : \langle -\infty, 0] \to [0, +\infty\rangle$, $f(x) = x^2$

Zadatak 11. Neka je f zadana s $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $f : \mathbb{R} \to \mathcal{R}(f)$. Odredite skup $\mathcal{R}(f)$. Dokažite da je f bijekcija i odredite joj inverznu funkciju.

Ekvipotentni skupovi

Kažemo da su skupovi S i T **ekvipotentni**, odnosno da imaju isti kardinalni broj, ako postoji barem jedna bijekcija sa skupa S u skup T. Oznaka: $S \sim T$ ili $k(S) = k(T)$.

Primjer 1.

1. $\{1, 3, 5\} \sim \{12, 200, 10^{35}\}$,
2. $\{1, 2, 3 \ldots\} \sim \{2, 4, 6, \ldots\}$.

Zadatak 12. Dokažite da je $k(\mathbb{Z}) = k(\mathbb{N})$.

Zadatak 13. Dokažite da su svi zatvoreni segmenti realnih brojeva međusobno ekvipotentni.