7 Algebarske jednadžbe

7.1 Nultočke polinoma

Skup svih polinoma nad skupom kompleksnih brojeva označavamo sa $\mathbb{C}[x]$.

Definicija. **Nultočka polinoma** $f \in \mathbb{C}[x]$ je svaki kompleksni broj α takav da je $f(\alpha) = 0$. Ako je α realan broj onda kažemo da se radi o realnoj nultočki, a ako je kompleksan broj, kažemo da se radi o kompleksnoj nultočki.

Napomena. Umjesto nultočke koristi se i izraz korijen polinoma.

Teorem (Bezaut). Broj α je nultočka polinoma f akko je f djeljiv linearnim polinomom $g(x) = x - \alpha$.

Definicija. Ako je polinom f djeljiv polinomom $g(x) = (x - \alpha)^k$, $k \in \mathbb{N}$, a nije djeljiv polinomom $h(x) = (x - \alpha)^{k+1}$, onda kažemo da je $x = \alpha$ **k-struka nultočka** polinoma f ili da je kratnost (višestrukost) nultočke $x = \alpha$ jednaka k.

Teorem (Osnovni teorem algebre). Svaki polinom iz $\mathbb{C}[x]$ koji je bar prvog stupnja ima bar jednu nultočku.

Teorem. Svaki polinom n-tog stupnja može se na jedinstven način prikazati u obliku produkta n linearnih polinoma.

Teorem. Svaki polinom f stupnja $n \geq 1$ ima točno n nultočaka, ako svaku od njih brojimo onoliko puta kolika je njezina kratnost.

Zadatak 1. Odredite kratnost nultočke:

a) $x = 3$ za $f(x) = 3x^4 - 9x^3 - x^2 + 4x - 3$

b) $x = -2$ za $f(x) = x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 8x$

c) $x = -\dfrac{1}{2}$ za $f(x) = 4x^3 + 8x^2 + 5x + 1$

d) $x = 2$ za $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 12x - 12$

Zadatak 2. Odredite polinom četvrtog stupnja kojemu su nultočke -1 i 2, a -2 je dvostruki korijen.

Zadatak 3. $x = -2$ je trostruka nultočka polinoma $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. Podijelimo li f sa $g(x) = x + 3$ dobit ćemo ostatak -1. Odredite polinom f.

Zadatak 4. Odredite a i b tako da x bude dvostruka nultočka polinoma f, ako je zadano:

a) $x = -2$, $f(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + (a + b)x + 2$

b) $x = -3$, $f(x) = 4x^4 + ax^3 - 24x^2 + bx + 216$

Zadatak 5. Odredite zajedničke nultočke polinoma:
a) $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$; $g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$
b) $f(x) = x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 24x + 12$; $g(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$

Zadatak 6. Dokažite da je polinom f djeljiv polinomom g ako je

a) $f(x) = x^n - c^n$, $g(x) = x - c$, $n \in \mathbb{N}$, $c \neq 0$

b) $f(x) = x^n - c^n$, $g(x) = x + c$, $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, $c \neq 0$

Zadatak 7. Brojevi 1 i 2 su nultočke polinoma $f(x)$, a slobodni član jednak je 4. Nađite ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x)$ polinomom $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

7.2 Cjelobrojni korijeni algebarske jednadžbe

Definicija. Jednadžba oblika

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \tag{1}$$

$a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{C}$, zove se **algebarska jednadžba** n-tog stupnja. Brojevi a_i zovu se **koeficijenti** jednadžbe: a_n je vodeći ili najstariji koeficijent, a a_0 slobodni član.

Definicija. Broj x_0 zove se korijen algebarske jednadžbe (1) ako je

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 = 0.$$

Napomena. Algebarskoj jednadžbi (1) možemo na prirodan način pridružiti polinom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Svaki korijen jednadžbe (1) je nultočka tog polinoma f, i obrnuto. k-struku nultočku polinoma f nazivamo k-strukim korijenom pripadne algebarske jednadžbe.

Teorem. Ako su svi koeficijenti algebarske jednadžbe (1) cijeli brojevi, α korijen te jednadžbe i $\alpha \neq 0$ cijeli broj, onda je α djelitelj njezinog slobodnog člana a_0.

Teorem. Ako je

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

jednadžba s cjelobrojnim koeficijentima i α njezin cjelobrojni korijen, onda je za svaki cijeli broj k broj $f(k)$ djeljiv sa $\alpha - k$.

Zadatak 8. Dokažite da ove jednadžbe nemaju cjelobrojna rješenja:

a) $x^4 - 3x^3 - x + 1 = 0$
b) $2x^3 - x^2 - 6x - 5 = 0$
c) $x^5 - 3x + 3 = 0$
d) $2x^4 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$
e) $3x^5 - x + 4 = 0$

Zadatak 9. Riješite sljedeće jednadžbe:

a) $x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$
b) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$
c) $x^3 - 5x^2 + x + 7 = 0$
d) $x^3 - 8x^2 + 25x - 26 = 0$
e) $x^4 + x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = 0$
f) $x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 8 = 0$
g) $x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 37x - 60 = 0$
h) $x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 20x - 24 = 0$

Zadatak 10. Izračunajte vrijednost sljedećih izraza:

a) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$
b) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$
c) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$
d) $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

Zadatak 11. U jednadžbi $x^3+6x^2+ax+b=0$ odredite a i b uz uvjet da je jedno rješenje 3, a ostala dva da budu uzastopni cijeli brojevi.

Zadatak 12. U jednadžbi $x^3+ax^2+4x+b=0$ odredite a i b uz uvjet da je jedno rješenje 2, a razlika preostalih dvaju rješenja jednaka 2.

Zadatak 13. U jednadžbi $x^3+ax^2+26x+b=0$ odredite a i b uz uvjet da rješenja budu tri uzastopna cijela broja.

Zadatak 14. Jedno rješenje jednadžbe $x^3+ax^2-4x+3=0$ jednako je 3, a preostala dva su suprotni brojevi. Odredite a i b, te rješenja te jednadžbe.

7.3 Racionalni korijeni algebarske jednadžbe

Teorem. Ako je racionalan broj $\alpha = \frac{p}{q}$ $(p,q\in\mathbb{Z},\ q\neq 0)$ korijen algebarske jednadžbe s cjelobrojnim koeficijentima, onda je p djelitelj od a_0 i q djelitelj od a_n.

Teorem. Ako je $\alpha = \frac{p}{q}$ $(p,q\in\mathbb{Z},\ q\neq 0)$ racionalan korijen algebarske jednadžbe s cjelobrojnim koeficijentima, onda je za svaki cijeli broj k broj $p-kq$ djelitelj od $f(k)$.

Zadatak 15. Riješite sljedeće jednadžbe:

a) $8x^3 + 27 = 0$
b) $6x^3 + 19x^2 + x - 6 = 0$
c) $5x^3 - 7x^2 - x + 3 = 0$
d) $25x^4 + 15x^3 + 16x^2 - 9x + 1 = 0$
e) $12x^3 - 4x^2 - 25x + 12 = 0$
f) $8x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = 0$

Zadatak 16. Dokažite tvrdnju: Ako jednadžba

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

s cjelobrojnim koeficijentima ima racionalni korijen tada je taj korijen cijeli broj.

Zadatak 17. Dokažite iracionalnost sljedećih brojeva:
a) $\sqrt[3]{2}$
b) $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$

7.4 Kompleksni korijeni algebarske jednadžbe

Teorem. Ako je $x_0 = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, korijen algebarske jednadžbe onda je i $\overline{x_0} = \alpha - \beta i$ također korijen te algebarske jednadžbe.

Teorem. Ako je $\alpha + \beta i$ cjelobrojni korijen algebarske jednadžbe s cjelobrojnim koeficijentima, onda je $\alpha^2 + \beta^2$ djelitelj slobodnog člana a_0.

Zadatak 18. Dana je jednadžba i jedan njen korijen. Odredite sve ostale korijene te jednadžbe:
a) $x^3 - x^2 - x - 15 = 0, \quad x_1 = -1 + 2i$
b) $x^4 - x^3 + x^2 + 4x + 10 = 0, \quad x_1 = 2 - i$
c) $x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 14x^2 + 12x - 8 = 0, \quad x_1 = -i$

Zadatak 19. Odredite uvjete uz koje jednadžba $x^3 + x^2 + ax + b = 0$ ima točno jedan realni korijen i to -2.

Zadatak 20. Koliki je ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^{1987} - 1$ polinomom $g(x) = x^4 - 1$?

Zadatak 21. Odredite cjelobrojne kompleksne korijene sljedećih algebarskih jednadžbi s cjelobrojnim koeficijentima:
a) $x^4 - 10x^3 + 39x^2 - 70x + 50 = 0$
b) $x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 10 = 0$
c) $x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 9x + 5 = 0$
d) $2x^4 + 7x^2 + 17x - 26 = 0$
e) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 10x + 25 = 0$

7.5 Simetrične jednadžbe

Pripadni polinom simetrične jednadžbe parnog stupnja se može predočiti u varijabli $x + \dfrac{1}{x}$.
Pripadni polinom simetrične jednadžbe neparnog stupnja je djeljiv sa $x + 1$, a kvocijent

je simetrični polinom parnog stupnja.

$$
\begin{aligned}
a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \\
a^5 \pm b^5 &= (a \pm b)(a^4 \mp a^3 b + a^2 b^2 \mp ab^3 + b^4) \\
a^{2n+1} \pm b^{2n+1} &= (a \pm b)(a^{2n} \mp a^{2n-1} b + a^{2n-2} b^2 \mp \cdots \mp ab^{2n-1} + b^{2n})
\end{aligned}
$$

Zadatak 22. Riješite sljedeće simetrične jednadžbe parnog stupnja:

a) $2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$

b) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

c) $18x^4 - 21x^3 - 94x^2 - 21x + 18 = 0$

d) $x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 18x^3 + 14x^2 - 6x + 1 = 0$

e) $x^6 - 16x^4 - 30x^3 - 16x^2 + 1 = 0$

Zadatak 23. Riješite sljedeće simetrične jednadžbe neparnog stupnja:

a) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$

b) $2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0$

c) $3x^5 - 7x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 7x + 3 = 0$

d) $8x^5 - 6x^4 - 83x^3 - 83x^2 - 6x + 8 = 0$

e) $x^7 - x^6 - 3x^5 + 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 - x + 1 = 0$