Grčka slova

α	alpha
β	beta
γ	gamma
δ	delta
ϵ, ε	epsilon
ζ	zeta
η	eta
θ, ϑ	theta
ι	iota
κ	kappa
λ	lambda
o	o

μ	mu
ν	nu
ξ	xi
π	pi
ρ, ϱ	rho
σ, ς	sigma
τ	tau
υ	upsilon
ϕ, φ	phi
ψ	psi
ω	omega

Γ	Gama
Δ	Delta
Θ	Theta
Λ	Lambda
Π	Pi
Σ	Sigma
Φ	Phi
Ψ	Psi
Ω	Omega

1 Matematička logika

Sud (**izjava**) je smislena izjavna rečenica koja može biti samo istinita ili lažna.

Primjer 1.

a) Jedan plus jedan je jednako 2. (Istiniti sud.)

b) Dva plus jedan je jednako četiri. (Lažni sud.)

c) $x - 1 = 3$. (Nije sud.)

d) Koji je danas dan? (Nije sud.)

e) Broj dva nije velik broj. (Nije sud.)

f) Ja sada lažem. (Nije sud.)

Svakom sudu A pridružujemo vrijednost $\top$ ako je istinit ($t(A) = \top$), a vrijednost $\perp$ ako je lažan ($t(A) = \perp$). Vrijednost istinitosti suda zovemo semantička vrijednost ili istinitostna vrijednost.

Matematičku logiku ne zanima formalni sadržaj nekog suda već samo njegova semantička vrijednost.

Operacije sa sudovima

- $A \wedge B$ - **konjunkcija** sudova A i B (A *i* B, A *et* B):

  Sud $A \wedge B$ je istinit točno onda kada su oba suda A i B istinita.

  Primjer 2.

  i) A: Jedan plus jedan je jednako 2.
  B: Zagreb je glavni grad Hrvatske.
  $A \wedge B$: Jedan plus jedan je jednako 2 i Zagreb je glavni grad Hrvatske.
  (Istiniti sud.)

  ii) A: Jedan plus jedan je jednako 2.
  B: Dva plus jedan je jednako četiri.
  $A \wedge B$: Jedan plus jedan je jednako 2 i dva plus jedan je jednako četiri.
  (Lažni sud.)

- $A \vee B$ - **disjunkcija** sudova A i B (A *ili* B, A *vel* B):

  Sud $A \vee B$ je lažan točno onda kada su oba suda A i B lažna.

- $A \veebar B$ - **ekskluzivna disjunkcija** sudova A i B (A *ili* B *(ali ne obje)*):

  Složeni sud $A \veebar B$ je istinit točno onda kada je istinit samo jedan od sudova A i B.

Primjer 3.

i) A: Jabuka je voće.

B: Kupus je povrće.

$A \vee B$: Jabuka je voće ili je kupus povrće.

(Istiniti sud.)

$A \veebar B$: Ili je jabuka voće ili je kupus povrće.

(Lažni sud.)

ii) A: Danas je 1. srpanj.

B: Danas nije nedjelja.

$A \vee B$: Danas je 1. srpanj ili danas nije nedjelja.

(Istiniti sud.)

$A \veebar B$: Ili je danas je 1. srpanj ili danas nije nedjelja.

(Istiniti sud.)

- $\rceil A$ - **negacija** suda A (*ne* A, *nije* A, *non* A):

  Sud $\rceil A$ je istinit točno onda kada je sud A lažan.

Primjer 4.

i) A: $7 < 10$.

$\rceil A$: $7 \geq 10$.

(Lažni sud.)

ii) A: Svaki dan imamo predavanja na fakultetu.

$\rceil A$: Postoji dan kada nemamo predavanja na fakultetu.

(Istiniti sud.)

- $A \Rightarrow B$ - **implikacija** sudova A i B (A *povlači* B, B *slijedi iz* A, *ako je* A *onda je* B, A *je dovoljan uvjet za* B, B *je nuždan uvjet za* A):

  Sud $A \Rightarrow B$ je lažan točno onda kada je A istinit i B lažan.

Primjer 5.

i) A: Kiša pada.

B: Ulice su mokre.

$A \Rightarrow B$: Ako kiša pada, onda su ulice mokre.

(Istiniti sud.)

ii) A: 2+3=5

B: Sada je ponoć.

$A \Rightarrow B$: Ako je 2+3=5, onda je sada ponoć.

(Lažni sud.)

iii) A: $2 \geq 5$

B: 1+1=3

$A \Rightarrow B$: Ako je $2 \geq 5$, onda je 1+1=3.

(Istiniti sud.)

- $A \Leftrightarrow B$ - **ekvivalencija** sudova A i B (*A je ekvivalentno s B, A je onda i samo onda ako je B, A je ako i samo ako je B (A je akko je B), A je nužan i dovoljan uvjet za B*):

Sud $A \Leftrightarrow B$ je istinit točno onda kada su oba suda A i B istinita ili kada su oba suda A i B lažna.

Primjer 6.

i) A: Danas se održavaju vježbe iz Elementarne matematike I.

B: -2 je prirodan broj.

$A \Leftrightarrow B$: Danas se održavaju vježbe iz Elementarne matematike I ako i samo ako je -2 prirodan broj.

(Lažni sud.)

ii) A: Kruška nije voće.

B: Svaki dan je sunčano.

$A \Leftrightarrow B$: Kruška nije voće ako i samo ako je svaki dan sunčano.

(Istiniti sud.)

Primjer 7. Neka su dani sudovi:

x : Broj $\sqrt{2}$ je iracionalan. $\quad y$: Neki ljudi vole matematiku.

Napišite sudove $\rceil x,\ x \wedge y,\ x \vee (\rceil y),\ x \Rightarrow y,\ x \Leftrightarrow y$ i odredite im vrijednost istinitosti.

Zadatak 1. Neka su A,B,C sudovi zadani s

A: Trokut PQR je jednakokračan.

B: Trokut PQR je jednakostraničan.

C: Trokut PQR ima jednake kutove.

Izrazite sljedeće sudove riječima i ispitajte njihovu istinitost.

i) $B \Rightarrow A$

ii) $A \Rightarrow B$

iii) $B \Leftrightarrow C$

iv) $(A \wedge C) \Rightarrow B$

Napomena. Poredak logičkih operacija po opadajućoj snazi vezivanja je dogovorno

$$\rceil, \wedge, \vee, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow .$$

Npr. Složeni sud $(A \wedge (\rceil B)) \Longrightarrow (\rceil A)$ zapisujemo ovako $A \wedge \rceil B \Longrightarrow \rceil A$.

Zadatak 2. Odredite redoslijed operacija u sljedećim složenim sudovima:

1. $x \neq 0 \vee y = 1 \wedge x \neq 1$
2. $\rceil(n < 2 \Leftrightarrow n = 1 \vee n \neq 0)$
3. $A \Rightarrow \rceil B \wedge \rceil C \Leftrightarrow B \wedge C$

Zadatak 3. Pomoću simbola logičkih operacija napišite ove rečenice o realnim brojevima:

1. Oba broja x i y su negativna.
2. Najmanje jedan od brojeva x i y je negativan.
3. Točno jedan od brojeva x, y je pozitivan.
4. Produkt dva broja x, y je jednak nuli ako i samo ako je barem jedan od njih jednak nuli.
5. Ne vrijedi $xc = cy$ ili $x = y$.
6. Ako je broj pet veći od broja četiri onda je on veći i od brojeva dva i tri.
7. $x = 0$ ili $x^2 = 4$ povlači $ax = 0$.

8. Iz $x^2 = 4$ slijedi $x = 2$ i $x = -2$ ili $|x| = 2$.

9. Da bi realan broj bio jednak $\sqrt{3}$ nužno je da njegov kvadrat bude jednak 3.

10. Da bi suma dvaju realnih brojeva bila nula dovoljno je da oba broja budu nula.

11. Nužan uvjet da broj bude djeljiv s 4 je da bude djeljiv s 2.

12. Broj je djeljiv sa šest ako je djeljiv sa dva i tri, i obrnuto.

Zadatak 4. Ispitajte istinitost sljedećih sudova:

1. $[\rceil(1 < 1) \vee 5 > 6 \Leftrightarrow 3 < 4] \wedge 4 \leq 4$

2. $x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5$

3. $x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -5$.

Tablice istinitosti

Označimo li

$$\text{ISTINITI SUD } (\top) \longrightarrow 1$$
$$\text{LAŽNI SUD } (\bot) \longrightarrow 0$$

tada istinitost složenog suda sastavljenog od sudova A,B,... možemo u ovisnosti o istinitosti sudova A,B,... prikazati tablicom istinitosti ili semantičkom tablicom.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \veebar B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1

A	$\rceil A$
0	1
1	0

Zadatak 5. Konstruirajte tablice istinitosti za ove složene sudove:

a) $A \Rightarrow A \vee (A \wedge B)$

b) $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$

c) $A \wedge B \Rightarrow A$

d) $B \Leftrightarrow \rceil A \vee \rceil B$

e) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

f) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$

g) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

h) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

i) $A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$

Jednakost sudova

Kažemo da su dva (složena) suda A i B **semantički jednaki** (ili, kratko, jednaki) ako im se pripadne semantičke tablice podudaraju. Pišemo: $A \equiv B$ (ili kraće $A = B$).

Primjer 8.

i) Princip dvojne negacije: $A \equiv \rceil(\rceil A)$

A	$\rceil A$	$\rceil(\rceil A)$
0	1	0
1	0	1

ii) De Morganovi principi:

a) $\rceil(A \wedge B) \equiv \rceil A \vee \rceil B$

b) $\rceil(A \vee B) \equiv \rceil A \wedge \rceil B$

A	B	$A \wedge B$	$\rceil(A \wedge B)$	$\rceil A$	$\rceil B$	$\rceil A \vee \rceil B$	$A \vee B$	$\rceil(A \vee B)$	$\rceil A \wedge \rceil B$
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0

iii) Negacija implikacije: $\rceil(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \rceil B$

A	B	$A \Rightarrow B$	$\rceil(A \Rightarrow B)$	$\rceil B$	$A \wedge \rceil B$
0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

Primjenom De Morganovih principa na posljednju formulu dobije se $A \Rightarrow B \equiv \rceil A \vee B$.

Složeni sud A je **tautologija** ukoliko identički istinit tj. istinit je bez obzira na istinitost sudova od kojih je sastavljen ($A \equiv \top$). (Uočite da su sudovi A i B jednaki ako i samo ako je sud $A \Leftrightarrow B$ tautologija.) Složeni sud F koji je identički lažan ($F \equiv \bot$) naziva se **kontradikcija**.

Primjer 9.

a) Princip isključenja trećeg:

A	$\rceil A$	$A \vee \rceil A$
0	1	1
1	0	1

b) $A \wedge B \Rightarrow B$

A	B	$A \wedge B$	$A \wedge B \Rightarrow B$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Primjer 10. Definirajmo sljedeće logičke operacije:

(a) Shefferova operacija sudova A i B, u oznaci $A \uparrow B$ (*nije istodobno i A i B*):

Sud $A \uparrow B$ je lažan točno onda kada su A i B istiniti.

(b) Lukasiewiczeva operacija sudova A i B, u oznaci $A \downarrow B$:

Sud $A \downarrow B$ je istinit točno onda kada su A i B lažni.

Napravite tablice istinitosti za ove operacije te dokažite da vrijedi

$$A \uparrow B \equiv \rceil (A \wedge B), \quad A \downarrow B \equiv \rceil (A \vee B).$$

Zadatak 6. Dokažite da za svaka tri suda a, b i c vrijede sljedeće tvrdnje

i) $a \wedge b \equiv b \wedge a$

ii) $a \vee b \equiv b \vee a$

iii) $a \wedge (b \wedge c) \equiv (a \wedge b) \wedge c$

iv) $a \vee (b \vee c) \equiv (a \vee b) \vee c$

v) $a \wedge a \equiv a$, $a \vee a \equiv a$

vi) $a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

vii) $a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

viii) $a \wedge \top \equiv a$, $a \vee \top \equiv \top$

ix) $a \wedge \rceil a \equiv \perp$, $a \vee \rceil a \equiv \top$

x) $a \Leftrightarrow b \equiv (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$

xi) $a \veebar b \equiv \rceil (a \Leftrightarrow b)$

Zadatak 7. Negirajte svaki od sudova

a) A: Četvrtak je i danas idem na fakultet.

$$\begin{aligned} A_1 &: \text{Četvrtak je.} \\ A_2 &: \text{Danas idem na fakultet.} \\ A &\equiv A_1 \wedge A_2. \\ \rceil A &\equiv \rceil A_1 \vee \rceil A_2 : \text{Nije četvrtak ili danas ne idem na fakultet.} \end{aligned}$$

b) B: Jutro je ili sam zaspala.

$$\begin{aligned} B_1 &: \text{Jutro je.} \\ B_2 &: \text{Zaspala sam.} \\ B &\equiv B_1 \vee B_2. \\ \rceil B &\equiv \rceil B_1 \wedge \rceil B_2 : \text{Nije jutro i nisam zaspala.} \end{aligned}$$

c) C: Ako pada kiša, onda su ulice mokre.

$$\begin{aligned} C_1 &: \text{Pada kiša.} \\ C_2 &: \text{Ulice su mokre.} \\ C &\equiv C_1 \Rightarrow C_2. \\ \rceil C &\equiv C_1 \wedge \rceil C_2 : \text{Pada kiša i ulice nisu mokre.} \end{aligned}$$

Zadatak 8. Negirajte svaki od sljedećih sudova i pojednostavnite dobiveni sud

a) $A \wedge B \Rightarrow C$

b) $A \Rightarrow \rceil B \wedge C$

c) $A \vee B \vee (\rceil A \wedge \rceil B \wedge \rceil C)$

d) $A \wedge (B \vee C) \wedge (\rceil A \vee \rceil B \vee C)$

Zadatak 9. Algebarski dokažite sljedeće tvrdnje

a) Sud $A \wedge B \Rightarrow B$ je tautologija.

b) $(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C) = A \wedge B \Rightarrow C$

c) Sud $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ je tautologija.

Sudovi vezani uz $A \Rightarrow B$:

- Sud $B \Rightarrow A$ zovemo **obrat** suda $A \Rightarrow B$.
- Sud $\rceil A \Rightarrow \rceil B$ zovemo **inverz ili suprotni sud** suda $A \Rightarrow B$.
- Sud $\rceil B \Rightarrow \rceil A$ zovemo **kontrapozicija** suda $A \Rightarrow B$.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$\rceil A$	$\rceil B$	$\rceil A \Rightarrow \rceil B$	$\rceil B \Rightarrow \rceil A$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0	1	1

Uočite da vrijedi

$$A \Rightarrow B \ \equiv \rceil B \Rightarrow \rceil A,$$

tj. sud $A \Rightarrow B$ je istinit ako i samo ako je istinit njegov obrat po kontrapoziciji.

Primjer 11. Ako pada kiša, onda su ulice mokre. (Istiniti sud.)

A: Pada kiša.

B: Ulice su mokre.

Obrat suda $(B \Rightarrow A)$:

Ako su ulice mokre, onda pada kiša. (Lažni sud.)

Suprotni sud $(\rceil A \Rightarrow \rceil B)$:

Ako ne pada kiša, onda ulice nisu mokre. (Lažni sud.)

Kontrapozicija suda $(\rceil B \Rightarrow \rceil A)$:

Ako ulice nisu mokre, onda ne pada kiša. (Istiniti sud.)

Zadatak 10. Napišite obrat, inverz i kontrapoziciju suda

Ako je četverokut $PQRS$ kvadrat, onda je četverokut $PQRS$ pravokutnik.

Zadatak 11. Neka su parovi izjava A_1 i A_2 zadani s

a) A_1: Trokut PQR je jednakostraničan.
A_2: Trokut PQR ima jednake kutove.

b) A_1: S i T su skupovi, $S \subset T$.
A_2: S i T su skupovi, $S = T$.

Ispitajte istinitost sljedećih izjava

1. $(A_1 \Rightarrow A_2) \wedge \rceil (A_2 \Rightarrow A_1)$
2. $(A_2 \Rightarrow A_1) \wedge \rceil (A_1 \Rightarrow A_2)$
3. $\rceil (A_1 \Rightarrow A_2) \wedge \rceil (A_2 \Rightarrow A_1)$

Zadatak 12. Pokažite da se sve binarne logičke operacije mogu prikazati pomoću

a) $\vee$ i $\rceil$ tj. da su sudovi

$$a \wedge b \Leftrightarrow \rceil (\rceil a \vee \rceil b)$$

$$a \Rightarrow b \Leftrightarrow \rceil a \vee b$$

$$(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow \rceil (\rceil (\rceil a \vee b) \vee \rceil (a \vee \rceil b))$$

tautologije.

b) $\wedge$ i $\rceil$ tj. da su sudovi

$$a \vee b \Leftrightarrow \rceil (\rceil a \wedge \rceil b)$$

$$(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow \rceil (a \wedge \rceil b)$$

$$(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (\rceil (a \wedge \rceil b) \wedge \rceil (\rceil a \wedge b))$$

tautologije.

Teoremi i dokazi

Najvažnije vrste složenih sudova su aksiomi, postulati i teoremi. Aksiomi i postulati su tvrdnje koje se ne dokazuju, dok je teorem matematička tvrdnja čja se istinitost utvrđuje dokazom.

U formulaciji teorema razlikujemo pretpostavku (hipotezu)- p i tvrdnju (tezu) - q.

Vrste dokaza:

1. **Direktan dokaz**

   - polazeći od p kao hipoteze primjenom aksioma i ranije dokazanih teorema nizom ispravnih zaključaka dolazimo do teze q ($p \Rightarrow q_1 \Rightarrow q_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow q$).

2. **Dokaz po kontrapoziciji**

   -umjesto direktnog dokaza teorema dokaže se kontrapozicija ($p \Rightarrow q \ = \rceil q \Rightarrow \rceil p$).

3. **Indirektan dokaz**

   -za sud iz teorema t dokaže se da je implikacija $\rceil t \Rightarrow L$ uvijek istinita, gdje je L neka očigledna neistina (naime ako je L neistinit sud onda je i $\rceil t$ također neistinit, pa je t istina).

   Ako je L oblika $A \wedge \rceil A$ za neki sud A, indirektan dokaz naziva se svođenje na kontradikciju.

Primjer 10. Ako je a^2 paran, onda je a paran.

Zadatak 13. Dokažite da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj.

Zadatak 14. Dokažite da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = 2x + 1$ injekcija.

Zadatak 15. Ako su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ onda vrijede jednakosti (Viéteove formule)

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Zadatak 16. Ako su a i b dva uzastopna parna prirodna broja onda je njihov umnožak djeljiv s 8.

Zadatak 17. Dokažite obrat Pitagorina poučka: Ako za trokut ABC s duljinama stranica $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ vrijedi $c^2 = a^2 + b^2$ onda je trokut ABC pravokutan s pravim kutom u vrhu C.