6 Polinomi

Funkcija $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ realni brojevi, $a_n \neq 0$, i n prirodan broj ili 0, naziva se **polinom n-tog stupnja** s realnim koeficijentima.

Realni brojevi $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazivaju se **koeficijenti** polinoma p. Pri tome a_n zovemo **vodeći koeficijent**, a a_0 **slobodni koeficijent**.
Broj $n \in \mathbb{N}_0$ naziva se **stupanj** polinoma p ($n = \mathrm{st}p$).
Ako je vodeći koeficijent $a_n = 1$, kažemo da je polinom p **normiran**.
Ako je stupanj polinoma p jednak 0, kažemo da je p **konstantan polinom** ili konstanta (konstanta = polinom nultog stupnja).
Polinom p sa svojstvom da je $p(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, naziva se **nul-polinom** (stupanj nul-polinoma se ne definira).
Skup svih polinoma $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ označavamo s $\mathbb{R}[x]$.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Teorem o nul-polinomu. Polinom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ je nul polinom ako i samo ako su svi koeficijenti $a_i = 0$, $\forall i = 0, 1, \ldots, n$.

Teorem o jednakosti dvaju polinoma. Polinomi f i g definirani s:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0,$$

su jednaki ako i samo ako je $m = n$ i $a_i = b_i$, $\forall i = 0, 1, \ldots, n$.

Zadatak 1. Odredite zbroj polinoma $f(x)$ i $g(x)$ ako je zadano:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$; $\quad g(x) = 2x^2 + x - 1$

b) $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2x + 7$; $\quad g(x) = -3x^3 - 2x^2 + 5x - 3$

c) $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 5x^2 - x + 1$; $\quad g(x) = -x^5 + 3x^4 - 5x^2 + x - 1$

d) $f(x) = 3x^3 - 2x + 1$; $\quad g(x) = x^6 - 3x^2 - 2x - 1$.

Zadatak 2. Odredite razliku polinoma $f(x)$ i $g(x)$ ako je zadano:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$; $\quad g(x) = 2x^2 - 3x + 5$

b) $f(x) = 3x^3 - 4x + 1;$ $\qquad g(x) = 3x^3 - 2x^2 - x + 3$

c) $f(x) = -x^5 - 3x^3 + 2x;$ $\qquad g(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$

d) $f(x) = 2x^6 - 3x^2;$ $\qquad g(x) = 3x^5 - 2x^4 - 3x + 1.$

Zadatak 3. Za zadane polinome $f(x)$ i $g(x)$ odredite linearnu kombinaciju $(af + bg)$, gdje je

a)	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1;$	$g(x) = -2x^6 + 5x^2 - 3x + 1;$	$a = 3;$	$b = 2$
b)	$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1;$	$g(x) = 3x^4 - 2x^2 - x + 5;$	$a = 2;$	$b = -3$
c)	$f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 4x - 1;$	$g(x) = 3x^3 - 3x^2 + 6x + 1;$	$a = 3;$	$b = -2$
d)	$f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x + 2;$	$g(x) = 3x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 3x + 5;$	$a = 5;$	$b = -2$
e)	$f(x) = 3x^5 - 2x^2 + 2x - 1;$	$g(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 1;$	$a = 1;$	$b = -2$

Zadatak 4. Odredite produkt zadanih polinoma $f(x)$ i $g(x)$:

a)	$f(x) = 3x^2 - x + 1;$	$g(x) = x - 2$
b)	$f(x) = x^3 - x + 1;$	$g(x) = x^5 + x^3 + x - 1$
c)	$f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1;$	$g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$
d)	$f(x) = x^4 - x^2 - 2x - 1;$	$g(x) = x^3 + x + 2$
e)	$f(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1;$	$g(x) = x + 1$

Zadatak 5. Odredite zbroj koeficijenata u kanonskom zapisu polinoma:

a) $f(x) = (x^2 - x + 1)^{2000} \cdot (x^2 - x + 2)^{10}$
b) $f(x) = (x^2 - 2x + 3)^{1987} \cdot (x^2 - 6x + 5)^{1987}$
c) $f(x) = (2x^2 - 5x + 2)^{450} \cdot (2x^2 - 5x + 4)^{540}$
d) $f(x) = (x^2 + 3x + 2)^{100} \cdot (x^2 - 3x + 2)^{100}$

Zadatak 6. Dokažite da ne postoji polinom f s cjelobrojnim koeficijentima takav da je $f(11) - f(7)$ prost broj.

Zadatak 7. Razvijte polinom $f(x)$ po potencijama zadanog polinoma prvog stupnja:

a)	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2;$	$(x - 1)$
b)	$f(x) = 2x^3 + 3x + 1;$	$(x + 1)$
c)	$f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2;$	$(x - 2)$
d)	$f(x) = x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1;$	$(x + 1)$

Zadatak 8. Na osnovi teorema o jednakosti polinoma odredite $f(x)$ ako je:

a) $f(x + 3) = x^2 + 2x + 2$
b) $f(2x - 1) = 8x^2 - 2x$
c) $f(2x + 1) = 4x^2 + 2x + 3$
d) $f(-2x + 1) = 2x^2 - x + 3$
e) $f(x - 2) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5$

Zadatak 9. Na osnovi teorema o jednakosti polinoma rastavite na parcijalne razlomke:

a) $\dfrac{x}{x^2-1}$ b) $\dfrac{x+1}{x^2-3x}$

c) $\dfrac{5x+4}{x^2+2x}$ d) $\dfrac{3x+8}{x^2-4x}$

e) $\dfrac{2x+1}{x^3+x}$ f) $\dfrac{1}{x^3-x}$

g) $\dfrac{1}{x^4-1}$ h) $\dfrac{x-5}{x^3-8}$

i) $\dfrac{x^2-9x-6}{x^3+x^2-6x}$ j) $\dfrac{x+3}{(x+1)(x^2+1)}$

Zadatak 10. Odredite polinom drugog stupnja ako je:

a) $f(1)=6;\quad f(2)=11;\quad f(-1)=8$
b) $f(1)=4;\quad f(2)=3;\quad f(0)=9$
c) $f(1)=2;\quad f(-2)=8;\quad f(0)=-2$

Zadatak 11. Odredite realne brojeve a i b tako da polinom $f(x)=x^4+2x^3+ax^2+2x+b$ bude kvadrat nekog polinoma.

Zadatak 12. Polinom $f(x)=x^4-6x^3+7x^2+6x+1$ kvadrat je nekog polinoma. Odredite kojeg.

Zadatak 13. Za polinom $f(x)=2x+3$ odredite sve linearne polinome $g(x)$ takve da vrijedi $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$. Za takve polinome kažemo da komutiraju.

Zadatak 14. Uz koje je uvjete polinom drugog stupnja potpun kvadrat nekog polinoma prvog stupnja.

Djeljivost polinoma

Za polinom $f(x)$ kažemo da je **djeljiv** polinomom $g(x) \neq 0$ ako postoji polinom $h(x)$, $\mathrm{st}(h) > 0$, takav da je $f(x) = g(x) \cdot h(x)$.

Teorem. Za svaka dva polinoma $f, g \neq 0$ postoje jedinstveni polinomi q i r takvi da vrijedi $f = g \cdot q + r$. Pri tome je uvijek $\mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(g)$.

Ako je za polinome f i g pripadni polinom $r \neq 0$, onda se polinom q zove **nepotpuni kvocijent** polinoma f i g, a polinom r **ostatak** pri dijeljenju polinoma f sa g. Ako je $r = 0$, onda se q zove **kvocijent** polinoma f i g i piše se $q = \dfrac{f}{g}$.
Polinom f djeljiv je polinomom g ako i samo ako je ostatak r nul-polinom.

Zadatak 15. Podijelite zadane polinome $f(x)$ i $g(x)$:

a)	$f(x) = 2x^3 + x^2 + x + 1;$	$g(x) = 3x^2 - x + 1$
b)	$f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - 4x + 2;$	$g(x) = x^2 - x + 1$
c)	$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1;$	$g(x) = x + 2$
d)	$f(x) = 6x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 1;$	$g(x) = 2x^2 - 3$
e)	$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5;$	$g(x) = x^2 + 2x - 3$
f)	$f(x) = 2x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 8x + 3;$	$g(x) = x^2 - 3x$
g)	$f(x) = 6x^5 + 9x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 13x - 4;$	$g(x) = 3x^3 - x + 4$

Zadatak 16. Odredite realne brojeve a i b tako da ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^4 - 3x^2 - ax + b$ polinomom $g(x) = x + 1$ bude 3, a polinomom $h(x) = x - 2$ bude -3.

Zadatak 17. Ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x)$ polinomom $(x-2)$ je 2, a polinomom $(x-3)$ je 0. Koliki je ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x)$ polinomom $g(x) = x^2 - 5x + 6$.

Zadatak 18. Ako polinom $f(x)$ pri dijeljenju polinomom $(x - a)$ daje ostatak r_1, a polinomom $(x - b)$ ostatak r_2, koliki je ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x)$ polinomom $g(x) = (x - a)(x - b)$.

Zadatak 19. Pokažite da je polinom $f(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 6$ djeljiv bez ostatka polinomom $g(x) = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 3)$.

Zadatak 20. Odredite realne brojeve a i b tako da polinom $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 5x + b$ bude djeljiv polinomom $g(x) = x^2 - x - 2$.

Zadatak 21. Polinom $f(x) = x^3 + ax^2 - 3x + b$ pri dijeljenju sa $(x - 2)$ daje ostatak 6, a pri dijeljenju sa $(x + 1)$ ostatak 0 (djeljiv je polinomom $(x + 1)$). Odredite a i b, a zatim i ostatak pri dijeljenju $f(x)$ s $g(x) = (x - 2)(x + 1)$.

Zadatak 22. Odredite sve prirodne brojeve n za koje je polinom $f(x) = (x+1)^n + (x-1)^n$ djeljiv s polinomom $g(x) = x$.

Hornerov algoritam

Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, polinom n-tog stupnja i $g(x) = x - x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, linearan polinom.

Prema teoremu o djeljivosti polinoma postoje jedinstveni polinomi $q(x)$ i $r(x)$ oblika:

$$q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0, \quad r(x) = r,$$

takvi da je $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$.

Iz ove jednakosti slijedi Hornerov algoritam koji služi za izračunavanje koeficijenata b_{n-1}, $\ldots$, b_0 polinoma $q(x)$ i ostatka $r(x) = r$:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_1	a_0
x_0	$\underbrace{a_n}_{b_{n-1}}$	$\underbrace{x_0 b_{n-1} + a_{n-1}}_{b_{n-2}}$	$\underbrace{x_0 b_{n-2} + a_{n-2}}_{b_{n-3}}$	$\ldots$	$\underbrace{x_0 b_1 + a_1}_{b_0}$	$\underbrace{x_0 b_0 + a_0}_{r}$

Napomena. Hornerov algoritam pogodan je za izračunavanje vrijednosti polinoma $f(x)$ za $x = \alpha$. Naime, iz $f(x) = q(x)(x-\alpha) + r$ za $x = \alpha$ dobivamo $f(\alpha) = r$, tj. ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x)$ polinomom $g(x) = x - \alpha$ jednak je vrijednosti polinoma f za $x = \alpha$.

Zadatak 23. Pomoću Hornerovog algoritma odredite kvocijent $q(x)$ i ostatak $r(x)$ za zadane polinome:

a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$ $\qquad g(x) = x - 1$
b) $f(x) = 3x^3 + 2x^2$ $\qquad g(x) = x + 2$
c) $f(x) = 4x^3 + x + 1$ $\qquad g(x) = x - \frac{1}{2}$
d) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 4x$ $\qquad g(x) = x + 3$
e) $f(x) = x^5 - 3x^2 + 7x + 2$ $\qquad g(x) = x + 2$

Zadatak 24. Primjenom Hornerovog algoritma izračunajte vrijednost polinoma $f(x)$ za $x = x_0$:

a) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 5$ $\qquad x_0 = -1$
b) $f(x) = 4x^4 + 2x^2 + 1$ $\qquad x_0 = 2$
c) $f(x) = x^5 - 3x^3 + x + 1$ $\qquad x_0 = -2$
d) $f(x) = 2x^4 + 6x^3 - 18x^2 + 9x - 5$ $\qquad x_0 = -5$
e) $f(x) = x^4 - 2x + 5$ $\qquad x_0 = 3$

Zadatak 25. Primjenom Hornerovog algoritma razvijte polinom $f(x)$ po potencijama polinoma $(x-a)$, ako je:

a) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 5$ $\quad a = -1$
b) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6x - 5$ $\quad a = -2$
c) $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + 6x^2 - 8x - 4$ $\quad a = 3$
d) $f(x) = 2x^7 + x^5 - x^3 + x + 1$ $\quad a = -1$
e) $f(x) = 3x^3 - 11x^2 + 14x + 4$ $\quad a = 1$

Zadatak 26. Primjenom Hornerovog algoritma odredite koeficijente A, B, C, D, E u ovim rastavima:

a) $$\frac{x^3 - x + 1}{(x-2)^5} = \frac{A}{(x-2)^5} + \frac{B}{(x-2)^4} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{D}{(x-2)^2} + \frac{E}{(x-2)}$$

b) $$\frac{x^4 - 2x^2 + 3}{(x+1)^5} = \frac{A}{(x+1)^5} + \frac{B}{(x+1)^4} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{(x+1)}$$

Zadatak 27. Za koje $a, b \in \mathbb{R}$ je polinom $f(x) = x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 4$ djeljiv polinomom $g(x) = x^2 + x - 2$?

Zadatak 28. Za koje $a, b \in \mathbb{R}$ je polinom $f(x) = ax^4 + bx^3 + 1$ djeljiv polinomom $g(x) = (x-1)^2$?

Zadatak 29. Odredite $a \in \mathbb{R}$ takav da ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x + a$ polinomom $g(x) = x - 2$ bude jednak -4.

Zadatak 30. Odredite sve $k \in \mathbb{Z}$ sa svojstvom da je $\dfrac{2k^2 - k + 1}{k-2} \in \mathbb{Z}$.

Euklidov algoritam

Polinom $h(x)$ naziva se **zajednička mjera** ili zajednički djelitelj (divizor) polinoma $f(x)$ i $g(x)$ ako su i f i g djeljivi njime.

Za zajedničku mjeru h polinoma f i g kažemo da je **najveća zajednička mjera** od f i g ako je h djeljiv sa svakom zajedničkom mjerom od f i g.

NZM polinoma f i g nije jednoznačno određena, jer ako je polinom $h(x)$ zajednička mjera od f i g, tada je to i polinom $a \cdot h(x)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Po dogovoru se uzima da je NZM polinoma f i g normirani polinom (u tom je slučaju NZM jednoznačno određena) i označava se sa $M(f, g)$.

Teorem. Za svaka dva polinoma $f(x) \neq 0$ i $g(x) \neq 0$ postoji jednoznačno određena zajednička mjera $M(f, g)$.

Ako je za polinome $f(x)$ i $g(x)$ $M(f, g) = 1$, onda kažemo da su oni **relativno prosti** polinomi.

Algoritam:
Neka su f i g dva polinoma, $\operatorname{st} f \geq \operatorname{st} g$. Uzastopnom primjenom teorema o dijeljenju s ostatkom dobivamo sljedeći niz jednakosti

$$\begin{aligned} f &= g q_1 + r_1 \\ g &= r_1 q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{k-2} &= r_{k-1} q_k + r_k \\ r_{k-1} &= r_k q_{k+1}. \end{aligned}$$

Tada je $M(f, g)$ normirani polinom koji se dobije iz r_k.

Zadatak 31. Pomoću Euklidovog algoritma odredite NZM zadanih polinoma f i g:

a)	$f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$	$g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$
b)	$f(x) = x^3 + x^2 - 11x - 15$	$g(x) = 2x^3 - 5x^2 - 8x + 5$
c)	$f(x) = 3x^5 + 2x^3 - 6x^2 - x + 2$	$g(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 6$
d)	$f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x + 2$	$g(x) = x^3 + x + 2$
e)	$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$	$g(x) = x^4 + 5x^2 + 4$
f)	$f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$	$g(x) = x^3 - 7x + 6$

Zadatak 32. Skratite razlomke, ako je moguće:

a) $\dfrac{2x^3 - 5x^2 + 9x - 9}{x^2 - x + 3}$

b) $\dfrac{4x^3 + 3x + 2}{2x^3 - 3x^2 + 3x - 2}$

c) $\dfrac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^3 - x^2 + 4x - 4}$