3 Relacije

Neka su S i T neprazni skupovi. Bilo koji podskup ρ Kartezijevog produkta $S \times T$ zovemo **relacija**. Za element $x \in S$ kažemo da je u relaciji ρ s elementom $y \in T$, u oznaci $x\rho y$, ako je $(x, y) \in \rho$.

Za neprazni skup S, definiramo $S^2 := S \times S$. Svaki podskup $\rho \subseteq S^2$ zovemo **binarna relacija** na skupu S.

Svojstva binarnih relacija

Binarna relacija ρ je **refleksivna** ako $\forall x \in S$, $x\,\rho\,x$.

Binarna relacija ρ je **simetrična** ako $x\,\rho\,y \Longrightarrow y\,\rho\,x$.

Binarna relacija ρ je **antisimetrična** ako $(x\,\rho\,y) \wedge (y\,\rho\,x) \Longrightarrow x = y$.

Binarna relacija ρ je **tranzitivna** ako $(x\,\rho\,y) \wedge (y\,\rho\,z) \Longrightarrow (x\,\rho\,z)$.

Relacija ekvivalencije je binarna relacija koja je istodobno refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Primjer 1. Neka je $n \in \mathbb{N}$, Za dva cijela broja $a, b \in \mathbb{Z}$ reći ćemo da su kongruentna modulo n ako je $a - b$ djeljivo sa n. Pišemo

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Klasa ekvivalencije s obzirom na relaciju ekvivalencije $\sim$ je podskup od S kojeg čine svi oni elementi koji su međusobno u relaciji $\sim$. Klasu ekvivalencije generirane elementom $x \in S$ je označavamo sa $[x]$ pa je

$$[x] = \{y \in S : x \sim y\}.$$

Unija svih klasa ekvivalencije je čitav skup S. Time se dobiva particija skupa S na klase ekvivalencije.

Kvocijentni skup je skup čiji su elementi klase ekvivalencije s obzirom na relaciju ekvivalencije $\sim$ na skupu S, oznaka $S/_\sim$.

Zadatak 1. Neka je $A = \{a, b, c\}$. Odredite svojstva sljedećih relacija:

(a) $\rho = \{(a, a), (b, c), (c, b)\}$, $\quad (b)\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (c, b), (c, a)\}$.

Zadatak 2. Na skupu $\mathbb{N}$ definirana je relacija $\rho = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : b|a\}$. Pokažite da je ρ refleksivna i tranzitivna, ali ne i simetrična relacija.

Zadatak 3. Zadan je skup $\rho = \{p : p = (x, y) \in \mathbb{Z}^2, 3|(x - y)\}$. Dokažite da je ρ relacija ekvivalencije na $\mathbb{Z}$ i nađite klase ekvivalencije.

Zadatak 4. Zadani su skup $S = \{1, 2, 3, 4\}$ i relacija $\rho \subseteq S \times S$ s:

a) $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

b) $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2)\}$

c) $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1)\}$.

d) $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 3), (3, 2)\}$.

Ispitajte simetričnost, refleksivnost i tranzitivnost zadanih relacija ρ.

Zadatak 5. Relacija ρ definirana je na skupu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sa: $(x, y)\rho(t, z) \iff x = t$. Dokažite da je ρ relacija ekvivalencije i predočite grafički klase ekvivalencije.

Zadatak 6. Neka je $S = \mathbb{N}^2$. Zadan je skup $\rho = \{p : p = ((r, s), (t, u)) \in S^2, r + u = s + t\}$ i pokažite da je ρ relacija ekvivalencije na S. Odredite klasu ekvivalencije elementa $(4, 7)$.

Binarna relacija na skupu S je **relacija parcijalnog uređaja** ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. Ako osim toga vrijedi i

$$x \,\rho\, y \ \vee \ y \,\rho\, x, \quad \forall x, y \in S,$$

onda se takva relacija naziva **relacija potpunog** ili **totalnog uređaja**.

Primjer 2. Nejednakost na skupu realnih brojeva.

Zadatak 7. Neka je zadan skup $S = \{a, b, c\}$. Dokažite da je relacija

$$\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, c)\} \subseteq S \times S$$

relacija parcijalnog uređaja na skupu S.

Zadatak 8. Dokažite da je $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ parcijalno uređen skup (odnosno da je $\subseteq$ relacija uređaja na partitivnom skupu skupa S). Je li taj skup totalno uređen?

Zadatak 9. Ispitajte svojstva (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost) sljedećih relacija:

a) relacija okomitosti na skupu pravaca u ravnini,

b) relacija paralelnosti na skupu pravaca u ravnini,

c) relacija ρ na $\mathbb{Z}$: $x\rho y \iff x + y$ paran,

d) ρ na $\mathbb{N}^2$: $(x, y)\rho(u, v) \iff x \le u$,

e) $\otimes$ na $\mathbb{Z}^2$: $(x, y) \otimes (u, v) \iff x \le u, y \le v$.

Zadatak 10. Neka je $S = \{a, b, c, d\}$. Odredite relaciju ekvivalencije koja inducira sljedeću particiju skupa S

$$S = \{a\} \cup \{b, c, d\}.$$

Zadatak 11. Na skupu $\mathbb{N}$ definirana je relacija

$$m \rho n \iff m + n \text{ paran.}$$

Ispitajte je li ρ relacija ekvivalencije. Ako jeste odredite i skicirajte klasu elementa $n = 3$.

Zadatak 12. Neka je $S = \{1, 2\}$. Na skupu $\mathcal{P}(S)$ definirana je relacija ρ sa

$$A \rho B \iff A \cap B = \emptyset.$$

Provjerite svojstva ove relacije.