

2. ZADAĆA IZ ELEMENTARNE MATEMATIKE I

1. Na skupu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definirana je relacija ρ na sljedeći način:

$$(x_1, y_1) \rho (x_2, y_2) \iff |y_1| - |y_2| = |x_1| - |x_2|.$$

Dokažite da je ρ relacija ekvivalencije, a zatim odredite i skicirajte klasu elementa $(1, 0)$.

2. Dana je $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 1$. Na skupu $g^{-1}(\{2, 3\}) \cup g(\{1, 2\})$ definirajte relacije ρ_1, ρ_2, ρ_3 sa svojstvom $\rho_1 \subset \rho_2 \subset \rho_3$ i

- (a) ρ_1 je refleksivna i antisimetrična,
- (b) ρ_2 je relacija parcijalnog uređaja,
- (c) ρ_3 je relacija totalnog uređaja.

3. Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana formulom $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ i neka je $f_n(x) = \underbrace{(f \circ f \cdots \circ f)}_{n \text{ puta}}(x)$.

Dokažite da je

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

4. Neka su funkcije $h_i : [-1, 1] \rightarrow [-3, 3]$, $i = 1, 2, 3$, zadane formulama

$$h_1(x) = 6x^2 - 3, \quad h_2(x) = -\frac{3}{2}(x+1), \quad h_3(x) = 9 \left(\frac{2^x - 1}{2^x + 1} \right).$$

Obrazložite koje od ovih funkcija se mogu, a koje ne, koristiti za dokaz ekvipotentnosti skupova $[-1, 1]$ i $[-3, 3]$.

5. Odredite sve $x \in \mathbb{Z}$ koji pri dijeljenju s 4 daju ostatak 2 i zadovoljavaju nejednadžbu

$$\sqrt{1-2x+x^2} - \sqrt{x^2+20x+100} \geq |2x-7| - 16.$$

2. ZADAĆA IZ ELEMENTARNE MATEMATIKE I

1. Na skupu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definirana je relacija ρ na sljedeći način:

$$(x_1, y_1) \rho (x_2, y_2) \iff |x_1| + |y_2| = |x_2| + |y_1|.$$

Dokažite da je ρ relacija ekvivalencije, a zatim odredite i skicirajte klasu elementa $(-1, 0)$.

2. Dana je funkcija $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2$. Na skupu $f^{-1}(\{3, 4\}) \cup f(\{0, 1\})$ definirajte relacije ρ_1, ρ_2, ρ_3 sa svojstvom $\rho_1 \subset \rho_2 \subset \rho_3$ i

- (a) ρ_1 je refleksivna i antisimetrična,
- (b) ρ_2 je relacija parcijalnog uređaja,
- (c) ρ_3 je relacija totalnog uređaja.

3. Neka je $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana formulom $h(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ i neka je $h_n(x) = \underbrace{(h \circ h \cdots \circ h)}_{n \text{ puta}}(x)$.

Dokažite da je

$$h_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

4. Neka su funkcije $g_i : [-1, 1] \rightarrow [-3, 3]$, $i = 1, 2, 3$, zadane formulama

$$g_1(x) = -\frac{3}{2}(x+1), \quad g_2(x) = 6x^2 - 3, \quad g_3(x) = 9 \left(\frac{2^x - 1}{2^x + 1} \right).$$

Obrazložite koje od ovih funkcija se mogu, a koje ne, koristiti za dokaz ekvipotentnosti skupova $[-1, 1]$ i $[-3, 3]$.

5. Odredite sve $x \in \mathbb{Z}$ koji pri dijeljenju s 4 daju ostatak 2 i zadovoljavaju nejednadžbu

$$\sqrt{x^2 + 20x + 100} - \sqrt{1 - 2x + x^2} \leq 16 - |2x - 7|.$$