

4 Analitička geometrija ravnine

4.1 Koordinate vektora u ravnini

Zadatak 1. Zadane su točke $A(-3, -1)$, $B(5, 2)$, $C(8, 6)$ i $D(0, 3)$. Dokažite da je četverokut ABCD paralelogram.

Zadatak 2. Točke $A(3, 2)$, $B(1, -2)$, $D(5, 1)$ tri su vrha paralelograma. Odredite duljine dijagonala.

Zadatak 3. Zadane su točke $A(2, 2)$, $B(8, 4)$. Odredite na x -osi točku C tako da trokut $\triangle ABC$ bude pravokutan s pravim kutom pri vrhu C .

Zadatak 4. Točke $(3, 2)$, $(-1, 3)$, $(1, -2)$ polovišta su stranica trokuta. Odredite koordinate vrhova trokuta.

Zadatak 5. Dokažite da je trokut $\triangle ABC$, $A(-2, -5)$, $B(2, -7)$, $C(4, 7)$ pravokutan.

Zadatak 6. Točke $A(-1, -2)$, $C(5, 0)$ dva su suprotna vrha kvadra ABCD. Odredite koordinate vrhova B i D .

Zadatak 7. Točke $A(3, 1)$, $B(1, -3)$ dva su vrha trokuta $\triangle ABC$ kojemu je površina jednaka 3. Odredite koordinate trećeg vrha, ako se težište trokuta nalazi na x -osi.

Zadatak 8. Točka $C(1, 7)$ vrh je trokuta $\triangle ABC$, točka $A_1(3, 3)$ polovište stranice $\overline{BC}$, a $T(1, 1)$ težište trokuta. Odredite površinu trokuta $\triangle ABC$.

4.2 Jednadžba pravca u ravnini

Zadatak 9. Napišite parametarsku jednadžbu pravca koji prolazi točkama:

1. $A(-2, 2)$, $B(3, -3)$
2. $A(-3, 20)$, $B(-3, -8)$

Zadatak 10. Napišite parametarsku jednadžbu pravca koji prolazi točkom $A(-3, 5)$ i kojemu je $\vec{a} = 5\vec{i} + \vec{j}$. Koja vrijednost parametra λ pripada točki B s ordinatom 4?

Zadatak 11. Provjerite pripadaju li točke A, B i C jednom pravcu

1. $A(1, 3)$, $B(-2, 5)$, $C(7, -1)$
2. $A(-7, 14)$, $B(3, -2)$, $C(-2, 6)$

Zadatak 12. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $(3, 1)$ i paralelan je s pravcem kroz točke $(3, -2)$ i $(-6, 5)$.

Zadatak 13. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $(2, -4)$ i okomit je na pravac $5x + 3y - 8 = 0$.

Zadatak 14. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $(3, 1)$, a s koordinatnim osima zatvara trokut površine 8 kvadratnih jedinica.

Zadatak 15. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $(5, 1)$ i na koordinatnim osima odsijeca odsječke jednakih duljina.

Zadatak 16. Odredite jednadžbe stranica trokuta i težišnica ako su vrhovi trokuta $A(7, 9)$, $B(-5, -7)$, $C(12, -3)$.

Zadatak 17. Dokažite da je trokut omeđen pravicima $2x - 3y + 5 = 0$, $8x + y - 45 = 0$ i $4x + 7y - 3 = 0$ jednakokrakan.

Zadatak 18. Odredite udaljenost točke $(4, -2)$ do pravca $8x - 15y - 11 = 0$.

Zadatak 19. Na pravcu $x - 3y - 6 = 0$ odredite točku koja je jednako udaljena od točaka $(-3, 2)$, $(7, -2)$.

Zadatak 20. Odredite kut za koji treba zakrenuti pravac $2x - 3y + 5 = 0$ oko točke $(2, 3)$ tako da na y -osi odsjeca odsječak duljine 1?

Zadatak 21. Na kojoj udaljenosti od točke $(6, 8)$ prolazi okomica iz točke $(2, -3)$ na pravac $3x - 4y + 6 = 0$.

Zadatak 22. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi točkom presjeka pravaca $3x + 5y + 26 = 0$ i $7x - 11y - 13 = 0$ i ishodištem koordinatnog sustava.

Zadatak 23. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi točkom presjeka pravaca $3x + 5y + 26 = 0$ i $7x - 11y - 13 = 0$ i okomit je na pravac $7x + 3y - 8 = 0$.

4.3 Kružnica

Zadatak 24. Zadane su točke $A(-3, 6)$, $B(5, -2)$. Napišite jednadžbu kružnice kojoj je dužina $\overline{AB}$ promjer.

Zadatak 25. Odsječak kojeg na pravcu $x + 2y + 4 = 0$ odsjecaju koordinatne osi promjer je kružnice. Napišite njezinu jednadžbu.

Zadatak 26. Kako glasi jednadžba kružnice koja prolazi točkama $(-5, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 3)$?

Zadatak 27. Kako glasi jednadžba kružnice opisane trokutu $\triangle ABC$ $A(-8, 3)$, $B(1, 0)$, $C(-1, 4)$?

Zadatak 28. Odredite jednadžbu kružnice opisane trokutu kojemu stranice leže na pravcima $2x - 3y + 6 = 0$, $x + 5y + 3 = 0$, $3x + 2y - 4 = 0$.

Zadatak 29. Odredite krajnje točke tetive kružnice $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0$ kojoj je točka $(0, 3)$ polovište.

Zadatak 30. Odredite parametar λ tako da pravac $3x - y + \lambda = 0$ bude tangenta kružnice $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$.

Zadatak 31. Napišite jednadžbu tangente na kružnicu $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ u točki $D(-4, 6)$.

Zadatak 32. Odredite jednadžbe tangenta povučenih iz točke $P(5, 3)$ na kružnicu $x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$.

Zadatak 33. Odredite jednadžbe tangenta povučenih iz točke $P(-1, -2)$ na kružnicu $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 16 = 0$.

Zadatak 34. U sjecištu pravca $x - y - 2 = 0$ s kružnicom $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 26$ konstruirane su tangente na kružnicu. U kojoj se točki sijeku te tangente?

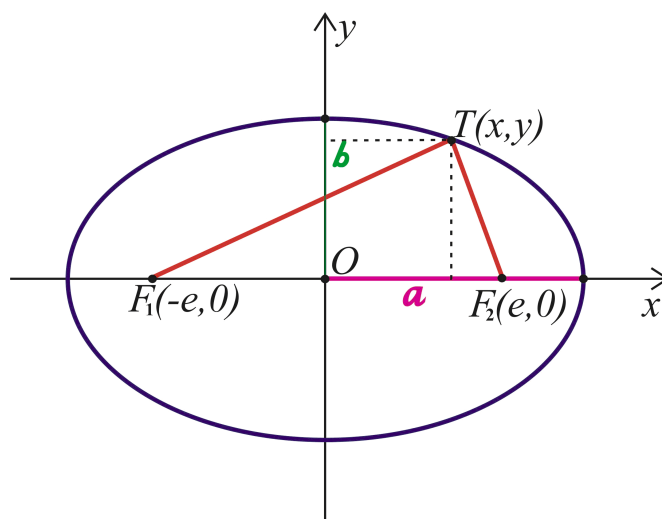
Zadatak 35. Iz točke $P(-1, -1)$ povučene su tangente na kružnicu $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$. Kako glasi jednadžba pravca koji spaja dirališta tih tangenata?

Zadatak 36. Pod kojim kutem pravac $y = \frac{4}{3}x$ siječe kružnicu $x^2 + y^2 = 25$?

Zadatak 37. Odredite zajedničke tangente kružnica $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$ i $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 100$.

Zadatak 38. Odredite zajedničke tangente kružnica $(x + 1)^2 + y^2 = 5$ i $(x - 4)^2 + y^2 = 20$.

4.4 Elipsa



Slika 1: Elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Zadatak 39. Odredite žarišta, numerički ekscentricitet i poluparametar elipse $4x^2 + 9y^2 = 16$.

Zadatak 40. Zbroj duljina glavne i sporedne osi elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ jednak je 10, a udaljenost fokusa iznosi $2\sqrt{5}$. Odredite jednadžbu elipse.

Zadatak 41. Dva tjemena elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ i njezina dva žarišta vrhovi su kvadrata površine 16 kvadratnih jedinica. Kako glasi jednadžba elipse?

Zadatak 42. Žarišta elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ i jedno njeno tjeme vrhovi su pravokutnog trokuta površine 18 kvadratnih jedinica. Kako glasi jednadžba elipse?

Zadatak 43. Odredite koordinate središta i fokusa, te duljine poluosi elipse $9x^2 + 25y^2 - 36x - 50y - 164 = 0$.

Zadatak 44. Kružnica prolazi jednim tjemenom velike osi, jednim tjemenom male osi elipse $4x^2 + 9y^2 = 144$ i ishodištem koordinatnog sustava. Napišite jednadžbu kružnice.

Zadatak 45. Točka $(3, 2)$ središte je elipse kojoj su osi paralelne koordinatnim osima i koja dira obje koordinatne osi. Odredite jednadžbu elipse.

Zadatak 46. Točka $(1, 1)$ polovište je tetive elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$. Odredite jednadžbu pravca kojemu pripada ta tetiva.

Zadatak 47. Za koje vrijednosti koeficijenta l pravac $y = x + l$ siječe elipsu $x^2 + 4y^2 = 20$ u dvjema točkama, za koje je tangenta elipse, a za koje s elipsom nema zajedničkih točaka?

Zadatak 48. Kako glasi jednadžba elipse kojoj je pravac $3x + 2y - 9 = 0$ tangenta, a fokusi su joj u točkama $F_1(0, -2)$ i $F_2(0, 2)$?

Zadatak 49. Odredite jednadžbe tangenata povučenih iz točke $(-6, 3)$ na elipsu $3x^2 + 5y^2 = 45$. Kako glasi jednadžba pravca koji spaja dirališta tih tangenata?

Zadatak 50. Odredite jednadžbe tangenata povučenih iz točke $(0, 3)$ na elipsu $4x^2 + 16y^2 = 1$. Kako glasi jednadžba pravca koji spaja dirališta tih tangenata?

Zadatak 51. Pravaci $3x - 2y - 20 = 0$ i $x + 6y - 20 = 0$ tangente su elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Odredite jednadžbu elipse.

Zadatak 52. Kako glase jednadžbe tangenta elipse $9x^2 + 16y^2 = 144$ paralelnih s pravcem $2x + 2y + 1 = 0$?

Zadatak 53. Kako glase jednadžbe tangenta elipse $4x^2 + 5y^2 = 120$ okomitih na pravac $x + 2y + 13 = 0$?

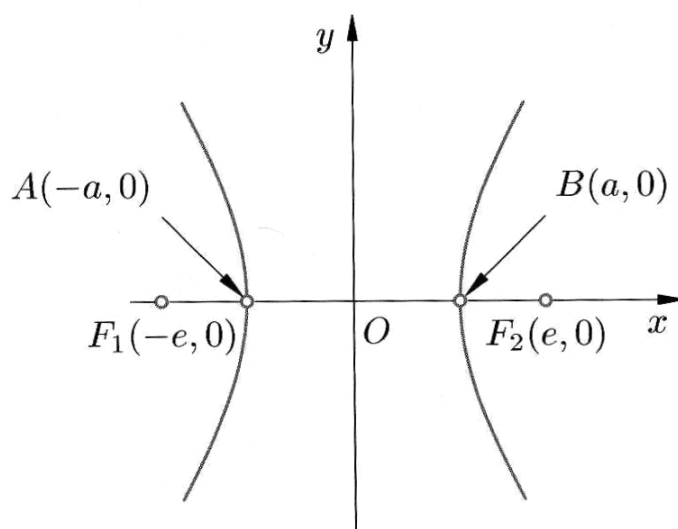
Zadatak 54. Grafički prikazati skup točaka ravnine zadan jednadžbom:

1. $y = \frac{1}{3}\sqrt{36 - 4x^2}$

2. $y = -\frac{1}{2}\sqrt{4x - x^2}$

3. $y = 1 - \frac{4}{3}\sqrt{6x - x^2}$.

4.5 Hiperbola



Slika 2: Hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Zadatak 55. Odredite i skicirajte skup točaka ravnine za koje je razlika udaljenosti od točaka

a) $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$

b) $F_1(-2, 1)$, $F_2(4, 1)$

jednaka 4.

Zadatak 56. Kako glasi jednadžba hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ako ona prolazi točkama

a) $(-5, 1)$ i $(7, -5)$

b) $(2\sqrt{3}, 1)$ i $(-4, -\sqrt{2})$?

Odredite žarišta, poluosi, te numerički i linearni ekscentricitet te hiperbole.

Zadatak 57. Odredite koordinate središta i fokusa, te duljine poluosi i jednadžbe asimptota hiperbole $7x^2 - 16y^2 - 42x - 128y - 305 = 0$.

Zadatak 58. Kako glasi jednadžba hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ako je pravac $y = \frac{4}{3}x$ asimptota, a pravac $x = \frac{9}{5}$ direktrisa hiperbole ?

Zadatak 59. Direktrisa hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ siječe njezinu asimptotu u točki $(4, 2)$. Kako glasi jednadžba hiperbole?

Zadatak 60. Dokazati da nožište okomice spuštene iz žarišta hiperbole na njezinu asimptotu leži na direktrisi.

Zadatak 61. Pravac $y = \frac{3}{2}x$ asimptota je hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, a udaljenost fokusa hiperbole iznosi $4\sqrt{13}$. Kako glasi jednadžba hiperbole?

Zadatak 62. Odredite kut između asimptota hiperbole $3x^2 - y^2 = 9$.

Zadatak 63. Središte kružnice $(x+3)^2 + y^2 = 4$ u žarištu je hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, a kružnica dira asimptote hiperbole. Kako glasi jednadžba hiperbole?

Zadatak 64. Kružnica $x^2 + (y-5)^2 = 16$ dira asimptote hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Ako je linearni ekscentricitet hiperbole jednak 10, kako glasi jednadžba hiperbole?

Zadatak 65. Kolika je površina trokuta što ga zatvaraju asimptote hiperbole $2x^2 - y^2 = 8$ s pravcem koji prolazi njezinim žarištem okomito na x -os ?

Zadatak 66. Kolika je površina četverokuta kojem su vrhovi sjecišta elipse $5x^2 + 20y^2 = 100$ i hiperbole $3x^2 - 12y^2 = 36$?

Zadatak 67. Odredite točke u kojima pravac $2x - y - 10 = 0$ siječe hiperbolu $x^2 - 4y^2 = 20$.

Zadatak 68. Kako glasi jednadžba hiperbole kojoj su pravci $8x - 5\sqrt{3}y - 20 = 0$ i $4\sqrt{2}x - 5y - 20 = 0$ tangente?

Zadatak 69. Odredite jednadžbe tangenata povučениh iz točke $(1, 4)$ na hiperbolu $4x^2 - y^2 - 4 = 0$. Odredite kut između tangenata.

Zadatak 70. Iz točke $(1, -10)$ povučene su tangente na hiperbolu $4x^2 - y^2 - 32 = 0$. Odredite jednadžbu pravca koji spaja dirališta tangenata.

Zadatak 71. Iz točke $(-2, 3)$ povučene su tangente na hiperbolu $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$. Odredite jednadžbu pravca koji spaja dirališta tangenata.

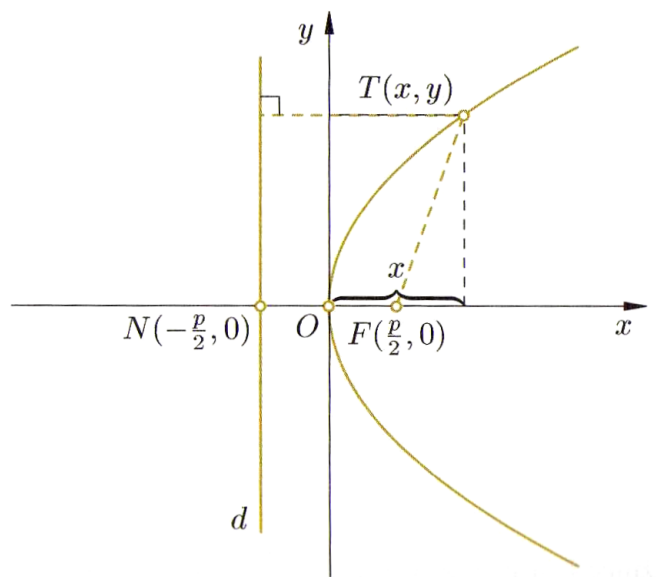
Zadatak 72. Grafički prikazati skup točaka ravnine zadan jednadžbom:

1. $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$

2. $y = -2\sqrt{x^2 - 1}$

3. $y = 1 - 3\sqrt{x^2 + 1}.$

4.6 Parabola



Slika 3: Parabola

$$y^2 = 2px$$

Zadatak 73. Udaljenost točke $(x, 6)$ parabole $y^2 = 2px$ od direktrise iznosi 6. Napišite jednađbu parabole.

Zadatak 74. Odredite tjeme, fokus, os i direktrisu parabole

a) $y^2 - 16x + 2y + 49 = 0$

b) $y^2 + 10x - 4y - 6 = 0$.

Zadatak 75. U kojim točkama pravac $3x - 2y + 6 = 0$ siječe parabolu $y^2 = 6x$?

Zadatak 76. Odredite jednađbe tangenata parabole $y^2 = 12x$ u točkama $(3, y)$.

Zadatak 77. Odredite jednađbe tangenata povučenih iz točke $(-2, 1)$ na parabolu $y^2 = 4x$ i koordinate dirališta.

Zadatak 78. Kako glase jednađbe tangenta parabole $y^2 = 12x$ paralelnih s pravcem $3x - y + 5 = 0$.

Zadatak 79. Tangenata parabole $y^2 = 8x$ s koordinatnim osima zatvara trokut površine 2. Odredite jednađbe tangenata i koordinate dirališta.

Zadatak 80. Iz točke $(-1, 1)$ povučene su tangente na parabolu $y^2 = 5x$. Odredite jednadžbu pravca koji spaja dirališta tangenata.

Zadatak 81. Odredite koordinate pola pravca $x - 2y - 2 = 0$ s obzirom na parabolu $y^2 = 3x$.

Zadatak 82. Odredite jednadžbu kružnice kojoj je središte fokus parabole $y^2 = 8x$ i koja dira direktrisu te parabole.

Zadatak 83. Grafički prikazati skup točaka ravnine zadan jednadžbom:

1. $y = \sqrt{x+1}$

2. $y = 1 - \sqrt{-x}$

3. $y = \sqrt{|1-x|}$.

4.7 Opća teorija krivulja drugog reda

Zadatak 84. Identificirajte skupove točaka u ravnini zadane jednažbama:

1. $2x^2 + 6xy + 2y^2 + 4x + 6y + 12 = 0$

2. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$

3. $4x^2 + 4xy + y^2 + 6\sqrt{5}x - 2\sqrt{5}y + 5 = 0$

4. $5x^2 + 26xy + 5y^2 - 28\sqrt{2}x - 44\sqrt{2}y - 8 = 0$

5. $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$

6. $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$

7. $2x^2 + 4xy + 3y^2 - 1 = 0$