

3. kolokvij

Zadatak 1 [20 bodova] *Napišite diferencijalne jednadžbe koje opisuju*

- (a) *Vehulstov logistički model,*
(b) *Nelder–Lewandowsky generalizirani logistički model,*
te navedite značenje parametara u modelu.

R: a) $\frac{1}{y(t_0)} \frac{dy}{dt}(t_0) = c(A - y(t_0)),$ b) $\frac{1}{y(t_0)} \frac{dy}{dt}(t_0) = c \left(1 - \left(\frac{y(t_0)}{A}\right)^\gamma\right)$

Zadatak 2 [20 bodova]

- (a) *Napišite kako se za dane podatke mjerenja $(t_i, y_i), i = 1, \dots, m$ u L_1 normi mogu odrediti parametri logističke funkcije $f(t; A, b, c) = \frac{A}{1+be^{-ct}}, b, c > 0$.*
(b) *Koje asimptote ima logistička funkcija i što znači da je njezin graf centralno simetričan u odnosu na točku infleksije?*

R: a) $F_1(A, b, c) = \sum_{i=1}^m |y_i - \frac{A}{1+be^{-ct_i}}| \longrightarrow \min_{b,c},$ b) $f(t_I) = \frac{1}{2} [f(t_I - t) + f(t_I + t)], \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Zadatak 3 [20 bodova]

- (a) *Kako se određuje točka infleksije dvostruko neprekidno derivabilne funkcije?*
(b) *Napišite formule koje određuju apscisu i ordinatu točke infleksije*

- *logističke funkcije;*
- *generalizirane logističke funkcije.*

R: b) $I \left(\frac{\ln b}{c}, \frac{A}{2} \right), \quad I \left(\frac{1}{c\gamma} \frac{\ln b}{\gamma}, \frac{A}{(1+\gamma)^{1/\gamma}} \right)$

Zadatak 4 [30 bodova]

- (a) *Kako se određuju faze rasta neke ekonomske kategorije opisane logističkom funkcijom?*
(b) *Za kategoriju opisanu logističkom funkcijom $f(t) = \frac{6}{1+5e^{-\frac{1}{2}t}}$ odredite točku infleksije i faze rasta.*

R: a) I. faza: $(-\infty, t_B)$ - faza pripreme, II. faza: (t_B, t_C) - faza intenzivnog (progresivnog) rasta, III. faza: (t_C, ∞) - faza zasićenja, gdje je $t_B = \frac{1}{c} \ln \frac{b}{2+\sqrt{3}}, \quad t_C = \frac{1}{c} \ln \frac{b}{2-\sqrt{3}}$

b) $I = (3.21888, 3), \quad t_B = \frac{1}{0.5} \ln \frac{2}{2+\sqrt{3}} = 0.58496, \quad t_C = \frac{1}{0.5} \ln \frac{2}{2-\sqrt{3}} = 5.85279.$

Zadatak 5 [30 bodova]

- (a) *Kako se definira stopa promjene neke ekonomske kategorije opisane funkcijom f ?*
(b) *Napišite formule koje određuju stopu rasta u trenutku $t_0 = 0$*

- *logističke funkcije $f(t) = \frac{A}{1+be^{-ct}};$*
- *generalizirane logističke funkcije $f(t) = \frac{A}{(1+be^{-c\gamma t})^{1/\gamma}}.$*

c) *Odredite stopu rasta u trenutku $t_0 = 0$ za logističku funkciju iz prethodnog primjera*

a-b) R: $s(0) = \frac{bc}{1+b}, \quad c) s(0) = 0.416667$

Napomena: Rješavanjem svih zadataka možete postići maksimalno 120 bodova (čime ćete moći kompenzirati eventualne propuste u ostalim zadaćama).

3. kolokvij

Zadatak 1 [20 bodova] *Napišite diferencijalne jednadžbe koje opisuju*

- (a) *Vehulstov logistički model,*
(b) *Nelder–Lewandowsky generalizirani logistički model,*
te navedite značenje parametara u modelu.

$$R: a) \frac{1}{y(t_0)} \frac{dy}{dt}(t_0) = c(A - y(t_0)), \quad b) \frac{1}{y(t_0)} \frac{dy}{dt}(t_0) = c \left(1 - \left(\frac{y(t_0)}{A} \right)^\gamma \right)$$

Zadatak 2 [20 bodova]

- (a) *Napišite kako se za dane podatke mjerenja (t_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$ u L_2 normi mogu odrediti parametri logističke funkcije $f(t; A, b, c) = \frac{A}{1+be^{-ct}}$, $b, c > 0$.*
(b) *Koje asimptote ima generalizirana logistička funkcija i je li njezin graf centralno simetričan u odnosu na točku infleksije? Pokažite odgovor na skici.*

$$R: a) F_1(A, b, c) = \sum_{i=1}^m |y_i - \frac{A}{1+be^{-ct_i}}| \longrightarrow \min_{b,c}, \quad b) f(t_I) = \frac{1}{2} [f(t_I - t) + f(t_I + t)], \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Zadatak 3 [20 bodova]

- (a) *Kako se određuje točka infleksije dvostruko neprekidno derivabilne funkcije?*
(b) *Napišite formule koje određuju apscisu i ordinatu točke infleksije*

- *logističke funkcije;*
- *generalizirane logističke funkcije.*

$$R: b) I \left(\frac{\ln b}{c}, \frac{A}{2} \right), \quad I \left(\frac{1}{c\gamma} \frac{\ln b}{\gamma}, \frac{A}{(1+\gamma)^{1/\gamma}} \right)$$

Zadatak 4 [30 bodova]

- (a) *Kako se određuju faze rasta neke ekonomske kategorije opisane logističkom funkcijom?*
(b) *Za kategoriju opisanu logističkom funkcijom $f(t) = \frac{5}{1+7e^{-\frac{1}{2}t}}$ odredite točku infleksije i faze rasta.*

R: a) I. faza: $(-\infty, t_B)$ - faza pripreme, II. faza: (t_B, t_C) - faza intenzivnog (progresivnog) rasta, III. faza: (t_C, ∞) - faza zasićenja, gdje je $t_B = \frac{1}{c} \ln \frac{b}{2+\sqrt{3}}$, $t_C = \frac{1}{c} \ln \frac{b}{2-\sqrt{3}}$

$$b) I = (3.89182, 2.5), \quad t_B = \ln \frac{2}{2+\sqrt{3}} = 1.2579, \quad t_C = \ln \frac{2}{2-\sqrt{3}} = 6.52574.$$

Zadatak 5 [30 bodova]

- (a) *Kako se definira stopa promjene neke ekonomske kategorije opisane funkcijom f ?*
(b) *Napišite formule koje određuju stopu rasta u trenutku $t_0 = 0$*

- *logističke funkcije $f(t) = \frac{A}{1+be^{-ct}}$;*
- *generalizirane logističke funkcije $f(t) = \frac{A}{(1+be^{-c\gamma t})^{1/\gamma}}$.*

c) *Odredite stopu rasta u trenutku $t_0 = 0$ za logističku funkciju iz prethodnog primjera*

$$a-b) R: s(0) = \frac{bc}{1+b}, \quad c) s(0) = 0.4375$$

Napomena: Rješavanjem svih zadataka možete postići maksimalno 120 bodova (čime ćete moći kompenzirati eventualne propuste u ostalim zadaćama).