

3. kolokvij

Zadatak 1. [25 bodova]

(a) Ako su zadani podaci (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$, $m \geq 2$ i linearna model funkcija $f(x; \alpha, \beta) = \alpha x + \beta$, kako se mogu odrediti optimalni parametri u smislu najmanjih kvadrata, a kako u smislu najmanjih apsolutnih odstupanja?

(b) Napišite formule za optimalne parametre α^*, β^* u smislu najmanjih kvadrata. Čemu je jednako $\sum_{i=1}^m (y_i - f(x_i; \alpha^*, \beta^*))$?

(c) Za podatke $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$ odredite optimalne parametre α^*, β^* u smislu najmanjih kvadrata. Koliko je prosječno kvadratno odstupanje?

R: (c) $\alpha^* = 1.5$, $\beta^* = 1.5$, $V = 0.875$

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) Napišite opći oblik eksponencijalne model funkcije. Kako se zove zakon rasta koji se opisuje tom funkcijom?

(b) Kolika je približna prosječna godišnja stopa rasta potrošne nekog resursa, ako se potrošnja svakih 20 godina udvostručuje? Kolika bi bila ta stopa rasta ako se potrošnja udvostručuje svake druge godine?

R: (a) $f(t) = be^{ct}$, Malthusov zakon neograničenog rasta (b) $p_1 = 3.5\%$, $p_2 = 35\%$

Zadatak 3. [25 bodova]

(a) Poznati su mjesečni podaci o kretanju prodaje neke robe y_i : 2, 3, 5, 6, 10. Primjenom eksponencijalne model funkcije dobije se prosječna mjesečna stopa rasta $c = 0.392$, tj. 39.2%. Napišite minimizirajuću funkciju kojom dobivate optimalne parametre.

(b) Odredite prosječnu mjesečnu stopu rasta primjenom geometrijske sredine. U kojem slučaju se ne može primijeniti ova formula?

(c) Poznajete li još neki način za određivanje prosječne stope rasta? Koje su loše osobine tih formula?

R: (b) $c = 0.459$ (c) $c = \sqrt[4]{\frac{10}{2}} - 1 = 0.495$

Zadatak 4. [25 bodova]

(a) Napišite osnovnu formulu financijske matematike.

(b) Zadan je početni kapital od $C_0 = 100\,000$ kuna. Odredite njegovu vrijednost nakon 3 mjeseca, nakon godinu dana i nakon 15 mjeseci uz primjenu dekurzivne godišnje kamatne stope $p = 6\%$ uz primjenu konformnog ispodgodišnjeg kamatnjaka.

(c) Kolike bi bile te vrijednosti uz primjenu relativnog ispodgodišnjeg kamatnjaka?

R: (b) 101467, 106000, 107555 (c) 101508, 106168, 107768

Zadatak 5. [25 bodova]

(a) Napišite Verhulstov zakon rasta i odgovarajuću logističku funkciju.

(b) Ako su poznati parametri logističke funkcije, kako se određuju faze rasta?

(c) Napišite generaliziranu logističku funkciju i Gompertzovu funkciju te skicirajte njihove grafove.

3. kolokvij

Zadatak 1. [25 bodova]

(a) Ako su zadani podaci (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$, $m \geq 2$ i linearna model funkcija $f(x; \alpha, \beta) = \alpha x + \beta$, kako se mogu odrediti optimalni parametri u smislu najmanjih kvadrata, a kako u smislu najmanjeg maksimalnog apsolutnog odstupanja?

(b) Napišite formule za optimalne parametre α^*, β^* u smislu najmanjih kvadrata. Čemu je jednako $\sum_{i=1}^m (y_i - f(x_i; \alpha^*, \beta^*))$?

(c) Za podatke $(-2, -4)$, $(0, 1)$, $(2, 2)$, $(4, 6)$ odredite optimalne parametre α^*, β^* u smislu najmanjih kvadrata. Koliko je prosječno kvadratno odstupanje?

R: (c) $\alpha^* = 1.55$, $\beta^* = -0.3$, $V = 0.675$

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) Napišite opći oblik eksponencijalne model funkcije. Kako se zove zakon rasta koji se opisuje tom funkcijom?

(b) Kolika je približna prosječna godišnja stopa rasta potrošne nekog resursa, ako se potrošnja svakih 40 godina udvostručuje? Kolika bi bila ta stopa rasta ako se potrošnja udvostručuje svake četvrte godine?

R: (a) $f(t) = be^{ct}$, Malthusov zakon neograničenog rasta (b) $p_1 = 1.75\%$, $p_2 = 17.5\%$

Zadatak 3. [25 bodova]

(a) Poznati su mjesečni podaci o kretanju prodaje neke robe y_i : 4, 5, 6, 8, 12. Primjenom eksponencijalne model funkcije dobije se prosječna mjesečna stopa rasta $c = 0.297$, tj. 29.7%. Napišite minimizirajuću funkciju kojom dobivate optimalne parametre.

(b) Odredite prosječnu mjesečnu stopu rasta primjenom geometrijske sredine. U kojem slučaju se ne može primijeniti ova formula?

(c) Poznajete li još neki način za određivanje prosječne stope rasta? Koje su loše osobine tih formula?

R: (b) $c = 0.302$ (c) $c = \sqrt[4]{\frac{12}{4}} - 1 = 0.316$

Zadatak 4. [25 bodova]

(a) Napišite osnovnu formulu financijske matematike.

(b) Zadan je početni kapital od $C_0 = 200\,000$ kuna. Odredite njegovu vrijednost nakon 3 mjeseca, nakon godinu dana i nakon 15 mjeseci uz primjenu dekurzivne godišnje kamatne stope $p = 9\%$ uz primjenu konformnog ispodgodišnjeg kamatnjaka.

(c) Kolike bi bile te vrijednosti uz primjenu relativnog ispodgodišnjeg kamatnjaka?

R: (b) 204356, 218000, 222748 (c) 204534, 218761, 223721

Zadatak 5. [25 bodova]

(a) Napišite Verhulstov zakon rasta i odgovarajuću logističku funkciju.

(b) Ako su poznati parametri logističke funkcije, kako se određuje njena točka infleksije (prijevojna točka)? Navedite svojstvo logističke funkcije vezano uz tu točku koje je jedan od razloga uvođenja generalizirane logističke funkcije.

(c) Napišite generaliziranu logističku funkciju i Gompertzovu funkciju te skicirajte njihove grafove.