Algoritmi i strukture podataka
Prof. dr. sc. Rudolf Scitovski
Ivan Vazler

Domaće zadaće

Studenti koji žele postići bolju ocjenu iz ovog predmeta mogu izraditi neke od niže navedenih domaćih zadaća. Zadaće treba slati na adresu `ivazler@mathos.hr`, a u "subject" e-mail-a upisati "DZ-AiSP".

Zadatak 1. (maksimalno 20 bodova)
Pokažite da je skup vektora $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ *linearno nezavisan onda ako je determinanta*

$$\begin{vmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \langle a_1, a_2\rangle & \ldots & \langle a_1, a_k\rangle \\ \langle a_2, a_1\rangle & \langle a_2, a_2\rangle & \ldots & \langle a_2, a_k\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_k, a_1\rangle & \langle a_k, a_2\rangle & \ldots & \langle a_k, a_k\rangle \end{vmatrix} \neq 0.$$

Provjerite ovu tvrdnju na sljedećim primjerima

a)
$$\begin{aligned} a_1 &= (-1, 2, 0, 0, 0) \\ a_2 &= (0, -3, -1, 0, -3) \\ a_3 &= (-2, 0, 1, -2, -2) \\ a_4 &= (2, -2, -3, 3, -2) \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} a_1 &= (2, -1, 2, -2, 0) \\ a_2 &= (2, -1, -1, 0, -1) \\ a_3 &= (4, -3, 4, -1, -1) \\ a_4 &= (-1, 1, -3, -1, 4) \\ a_5 &= (3, 0, -2, -2, -5) \\ a_6 &= (1, -4, -5, 5, 0) \end{aligned}$$

Zadatak 2. (maksimalno 20 bodova)
Neka je $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_m\} \subseteq \mathbb{R}$ *skup realnih brojeva. Svih mogućih particija skupa* A *sastavljenih od* k *nepraznih disjunktnih klastera* $\pi_1, \ldots, \pi_k$ *ima*

$$|\mathcal{P}(\mathcal{A}; m, k)| = \frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j} j^m.$$

Koliko ima različitih particija $\Pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_k\}$ *sastavljenih od* k *nepraznih disjunktnih klastera* $\pi_1, \ldots, \pi_k$ *koji se nastavljaju jedan na drugi, tj. svaki element u* π_1 *je manji od bilo kojeg elementa u* π_2*, svaki element u* π_2 *je manji od bilo kojeg elementa u* π_3 *itd. Pokušajte problem riješiti za* $k = 2$*,* $k = 3$ *i općenito za proizvoljni* $k \leq m$*.*

Zadatak 3. (maksimalno 20 bodova) *Grupirajte mjesta u Hrvatskoj prema*

- *temperaturi zraka izraženoj u °C;*
- *tlaku zraka izraženom u hPa*
- *relativnoj vlažnosti zraka izraženoj u %*

ili kombinirajući ove faktore. Koristite podatke iz:
Statističke informacije, Državni zavod za statistiku Republike hrvatske, 2011*, str. 13:* `http://www.dzs.hr/Hrv_Eng/StatInfo/pdf/StatInfo2011.pdf`
Pri tome možete koristiti programsku podršku `Klasteri` *izrađenu u C++/CLI dostupnu na* `http://www.mathos.hr/oml/software.htm`*.*

Zadatak 4. (maksimalno 25 bodova) *Zadani su vektori podataka* $x = (x_1, \dots, x_m)$*,* $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ *s odgovarajućim težinama* $w_1, \dots, w_m > 0$*. Neka su*

$$A(x) = \tfrac{1}{W}\sum_{i=1}^{m} w_i x_i, \quad A(y) = \tfrac{1}{W}\sum_{i=1}^{m} w_i y_i, \qquad W = \sum_{i=1}^{m} w_i,$$

aritmetčke sredine vektora x*, odnosno* y*. Pokažite da tada za proizvoljne* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y).$$

Tvrdnju ilustrirajte primjerom. Napišite odgovarajuću generalizaciju tvrdnje.

Zadatak 5. (maksimalno 25 bodova) *Zadani su podaci* (x_i, y_i)*,* $i = 1, \dots, m$ *i odgovarajuća linearna regresija* $f(x) = \alpha x + \beta$*, gdje je*

$$\alpha = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}, \qquad \beta = \bar{y} - \alpha\bar{x}, \qquad \text{gdje je} \quad \bar{x} = \tfrac{1}{m}\sum x_i, \quad \bar{y} = \tfrac{1}{m}\sum y_i.$$

Pokažite da tada vrijedi

$$\sum(x_i - \bar{x}) = 0; \qquad \sum(y_i - \bar{y}) = 0; \qquad \sum(y_i - f(x_i)) = 0.$$