Ekonomski fakultet
Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

Algoritmi i strukture podataka

Rudolf Scitovski, Ivan Vazler

1 Eksponencijalna model–funkcija

$$x \mapsto f(x;b,c) = be^{cx}, \qquad b,c \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Za dane podatke mjerenja (x_i, y_i), $i = 1,\dots,m$, takve da je

$$y_i = f(x_i;b,c) + \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}[0,\sigma^2],$$

treba odrediti optimalne parametre $b^*, c^* \in \mathbb{R}$ eksponencijalne model–funkcije, tako da njezin graf prolazi "što bliže" točkama (x_i, y_i), $i = 1,\dots,m$.

$$F_1(b,c) = \sum_{i=1}^{m} |y_i - be^{cx_i}| \longrightarrow \min_{b,c} \tag{2}$$

$$F_2(b,c) = \sum_{i=1}^{m} (y_i - be^{cx_i})^2 \longrightarrow \min_{b,c} \tag{3}$$

$$F_\infty(b,c) = \max_{i=1,m} |y_i - be^{cx_i}| \longrightarrow \min_{b,c} \tag{4}$$

Jedna mogućnost lineariziranja i pojednostavljenja problema (3) sastoji se u tome da minimiziramo

$$\Phi(b,c) = \sum_{i=1}^{m} (\ln y_i - \ln b - cx_i)^2, \tag{5}$$

što se svodi na problem linearne regresije.

1.1 Stopa promjene

Neka je $t \mapsto f(t)$ model–funkcija čija je nezavisna varijabla vrijeme t. Stopu promjene (rasta ili pada) u trenutku t_0 definiramo na sljedeći način

$$s(t_0) = \frac{1}{f(t_0)} \frac{df(t_0)}{dt}. \tag{6}$$

Specijalno za eksponencijalnu model funkciju $f(t;b,c) = be^{ct}$, $b,c \in \mathbb{R}$ stopa promjene u bilo kojem trenutku je

$$\frac{1}{f(t_0)} \frac{df(t_0)}{dt} = c. \tag{7}$$

Primjer 1. *Treba odrediti prosječnu stopu rasta određena podacima*

t_i	0	1	2	3	4
y_i	10	12	15	18	20

Minimizacijom funkcije F_2 dobivamo

$$f(t) = 10.3413\, e^{0.1716t}.$$

Prosječna stopa rasta: $c = 17\,\%$

1.1.1 Prosječna stopa rasta kao geometrijska sredina

$$s = \sqrt[n-1]{\frac{y_2 - y_1}{y_1} \cdot \frac{y_3 - y_2}{y_2} \cdots \frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n-1}}}. \tag{8}$$

Za prethodni primjer dobivamo

$$s = G(0.2 \cdot 0.25 \cdot 0.2 \cdot 0.11) = \sqrt[4]{0.2 \cdot 0.25 \cdot 0.2 \cdot 0.11} = 0.1826 = 18.26\,\%$$

1.1.2 Još jedna formula za procjenu stope promjene

Promatramo eksponencijalnu funkciju $f(t) = be^{ct}$ na intervalu $[0, T]$ i pretpostavimo da u trenutku $t = 0$ nezavisna varijabla ima vrijedost y_0, a u trenutku $t = T$ ima vrijednost y_T. Iz početnog uvjeta $f(0) = y_0$ dobivamo

$$f(t) = y_0 c^{ct},$$

a nakon uvrštavanja $y_T = f(T)$, dobivamo $y_T = y_0 e^{cT}$, odakle dobivamo

$$c = ln \left(\tfrac{y_T}{y_0}\right)^{1/T}.$$

Razvojem desne strane u Taylorov red u okolini točke $t = 1$ i zadržavajući smo linearni član dobivamo još jednu aproksimaciju stope rasta

$$c = \left(\frac{y_T}{y_0}\right)^{1/T} - 1. \tag{9}$$

Za prethodni primjer dobivamo

$$c = \left(\frac{20}{10}\right)^{1/4} - 1 = \sqrt[4]{\frac{20}{10}} - 1 = 0.1892 = 18.92\,\%$$

Primjedba 1. Formule (8) i (9) za procjenu prosječne stope promjene treba uzimati s velikom rezervom.

Primjer 2. *Treba odrediti prosječnu stopu promjene na osnovi podataka*

t_i	0	1	2	3	4
y_i	10	12	15	18	8

Minimizacijom funkcije F_2 dobivamo

$$f(t) = 12.2669\, e^{0.0133225t},$$

a prosječna stopa rasta je: $c = 1.33\,\%$, što nikako nije realan rezultat.

U ovom slučaju formula (8) je neupotrebljiva (negativni broj pod korijenom !), a formula (9) daje prosječnu stopu $s = -0.0542584 = -5.43\,\%$, što je potpuno nerealno!

Budući da se u ovom slučaju među podacima pojavio outler $(4, 8)$, korektan rezultat dobiva se uz minimizaciju funkcionala F_1:

$$f(t) = 10.3073\, e^{0.152052t}.$$

U tom slučaju prosječna stopa rasta je: $c = 15.2\,\%$

Zadatak 1. *Pokažite još nekoliko primjera u kojima formule (8) i (9) ne daju ispravnu informaciju i usporedite rezultate s egzaktmom stopom promjene dobivene kao parametar c eksponencijalne model funkcije (1).*

2 Modeli rasta populacije

Veličine populacije u intervalu vremena $[t, t + dt]$ jednaka je broju rođenih umanjenom za broj umrlih i uvećanom za broj migriranih u tom intervalu[1].

$$dN = dR - dU + dM, \tag{10}$$

dN – veličine populacije u intervalu vremena $[t, t + dt]$;

dR – broj rođenih u intervalu vremena $[t, t + dt]$;

dU – broj umrlih u intervalu vremena $[t, t + dt]$;

dM – broj migriranih u intervalu vremena $[t, t + dt]$ (imigracija: $dM > 0$, emigracija: $dM < 0$);

[1] Prema predavanjima prof. dr. sc. D.Jukić, "Matematički modeli", Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2009.

2.1 Kontinuirani Malthusov model

$$dR = r\,N\,dt, \qquad dU = u\,N\,dt, \qquad dM = 0, \tag{11}$$

odakle dobivamo

$$\frac{dN}{dt} = kN, \qquad k = r - u. \tag{12}$$

Funkcija koja zadovoljava jednadžbu (12) je eksponencijalna funkcija

$$N(t) = N_0 e^{kt}, \qquad N_0 = N(0). \tag{13}$$

Primjer 3. *Stopa rasta k i vrijeme udvostručenja populacije t_2 povezani su jednostavnim pravilom*

$$kt_2 = \ln 2 \approx 0.7, \qquad \textit{odnosno} \quad (100k)t_2 \approx 70, \tag{14}$$

koja stopu rasta izraženu u postocima veže s vremenom udvostručenja populacije t_2.

Primjerice, populacija koja raste po godišnjoj stopi od 14 % udvostručuje se svakih 5 godina (iz $14t_2 \approx 70$ slijedi $t_2 \approx 5$), a populacija koja raste po dnevnoj stopi od 7 % udvostručuje se svakih 10 dana (iz $7t_2 \approx 70$ slijedi $t_2 \approx 10$). Evo još nekoliko primjera:

Vrsta	Opis	k	t_2
T fag	Virus	300	3.3 minute
Escherichia coli	Bakterija	58.7	17 minuta
Paramecium caudatum	Papučica	1.59	10.5 sati
Rattus norvegicus	Sivi štakor	0.0148	46.8 dana
Bos taurus	Europsko kratkonogo govedo	0.001	1.9 godina
Nothofagus fusca	Novozelandska crvena bukva	0.000075	25.3 godina

Primjer 4. *Zbog pretpostavke o eksponencijalnom rastu populacije i sporo rastuća populacija može narasti na proizvoljno velike vrijednosti. Primjerice, stado goveda koje se udvostručuje svake dvije godine, doseže sljedeće veličine*

Godina	0	2	4	10	50	100	200
Veličina stada	50	100	200	1600	$1.67 \cdot 10^9$	$5.62 \cdot 10^{16}$	$6.33 \cdot 10^{31}$

To bi stado za 200 *godina postalo znatno teže od Zemlje* ($6 \cdot 10^{24}$ *kg)!*

Primjer 5. *Potrošnja resursa se udvostručava u konstantnim vremenskim intervalima. Ilustracije radi, pretpostavimo da potrošnja nekog resursa raste po godišnjoj stopi od* 7 %. *Tada iz pravila (14) slijedi da se potrošnja udvostručava svakih* 10 *godinana. Osim toga, u sljedećih* 10 *godina potrošit ćemo više resursa nego li tijekom cijele prethodne povijesti. To je lako shvatiti ako se pažljivije pogleda niz*

$$N_0, 2N_0, 4N_0, 8N_0, 16N_0, 32N_0, \ldots$$

i zatim uoči da je svaki član tog niza manji od zbroja svih prethodnih članova niza.

2.2 Diskretni Malthusov model

Diskretizacijom jednadžbe (12)

$$N_i - N_{i-1} = kN_{i-1},$$

što uz oznaku $\lambda = k + 1$ možemo pisati

$$N_i = \lambda N_{i-1}, \qquad i = 1, 2, \dots \tag{15}$$

3 Financijska matematika

Zadan je početni kapital C_0 i godišnja kamatna stopa p, odnosno godišnji kamatnjak $\frac{p}{100}$. Uz primjenu složenog ukamaćivanja izračunajmo vrijednost tog kapitala na kraju bilo koje godine.

Vrijednost početnog kapitala na kraju n-te godine (C_n) sastoji se od vrijednosti kapitala s početka n-te godine C_{n-1} i kamata obračunatih na C_{n-1}. Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$C_n = C_{n-1} + C_{n-1}\frac{p}{100} = C_{n-1} \cdot r,$$

gdje je $r = 1 + \frac{p}{100}$ godišnji kamatni faktor. Kako se radi o geometrijskom nizu s kvocijentom r i prvim članom C_0 za $(n+1)$-vi član C_n tog niza imamao:

$$\boxed{C_n = C_0 \cdot r^n.}$$

To je dobro znana osnovna formula financijske matematike za vrijednost početnog kapitala C_0 na kraju n-te godine uz primjenu složenog godišnjeg ukamaćivanja.

3.1 Ispodgodišnje ukamaćivanje

Zadan je početni kapital C_0 i godišnja kamatna stopa p (odnosno godišnji kamatnjak $\frac{p}{100}$). Neka je m broj jednakih intervala na koji dijelimo godinu (primjerice mjeseci ($m = 12$), kvartali ($m = 4$), dani ($m = 365$)), a p_m odgovarajuća ispodgodišnja kamatna stopa. Tada je

$$C_{\frac{1}{m}} = C_0\left(1 + \frac{p_m}{100}\right) \qquad \text{– vrijednost kapitala na kraju prvog podintervala}$$

$$C_{\frac{2}{m}} = C_{\frac{1}{m}}\left(1 + \frac{p_m}{100}\right) = C_0\left(1 + \frac{p_m}{100}\right)^2 \qquad \text{– vrijednost kapitala na kraju drugog podintervala}$$

$$C_{\frac{m}{m}} = C_{\frac{m-1}{m}}\left(1 + \frac{p_m}{100}\right) = C_0\left(1 + \frac{p_m}{100}\right)^m \qquad \text{– vrijednost kapitala na kraju } m\text{-tog podintervala}$$

Kako je $C_{\frac{m}{m}} = C_1$, tj.

$$C_0 \left(1 + \frac{p_m}{100}\right)^m = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right), \tag{16}$$

odavde lako dobivamo formulu za ispodgodišnju kamatnu stopu p_m izraženu preko godišnje kamatne stope p

$$p_m = 100 \left[\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1 \right], \tag{17}$$

koju obično zovemo *konformna kamatna stopa.* Također iz (17) lako dobivamo formulu za godišnju kamatnu stopu p izraženu preko ispodgodišne kamatne stope p_m

$$p = 100 \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^m - 1 \right]. \tag{18}$$

Ako p_m iz (17) razvijemo u Taylorov red po potencijama od p i zadržimo se na linearnom članu, dobit ćemo formulu za takozvanu *relativnu ispodgodišnju kamatnu stopu*

$$p_r = \frac{p}{m}. \tag{19}$$

Primjer 6. *Neka je $p = 4$ godišnja kamatna stopa, a $m = 12$. Primjenom ranije navedenih formula dobivamo*

mjesečnu konformnu kamatnu stopu: $= 0.327374$,
mjesečnu relativnu kamatnu stopu: $= 0.333333$

Ako je godišnji kamatnjak $p = 16$, dobivamo

mjesečni konformni kamatnjak: $= 1.24451$,
mjesečni relativni kamatnjak: $= 1.333333$

Ako je ispodgodišnji mjesečni kamatnjak: $p_m = 0.3$, odgovarajući godišnji je: $p = 3.66$