Ekonomski fakultet
Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

Algoritmi i strukture podataka

Rudolf Scitovski, Ivan Vazler

1 Logistička model–funkcija

$$x \mapsto f(x;b,c) = \frac{A}{1+be^{-cx}}, \qquad b,c>0. \tag{1}$$

Za dane podatke mjerenja (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$, takve da je

$$y_i = f(x_i;b,c) + \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}[0,\sigma^2],$$

treba odrediti optimalne parametre $b^*, c^* \in \mathbb{R}_+$ Logističke model–funkcije, tako da njezin graf prolazi "što bliže" točkama (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$.

$$F_1(b,c) = \sum_{i=1}^{m} |y_i - \frac{A}{1+be^{cx_i}}| \longrightarrow \min_{b,c} \tag{2}$$

$$F_2(b,c) = \sum_{i=1}^{m} (y_i - \frac{A}{1+be^{cx_i}})^2 \longrightarrow \min_{b,c} \tag{3}$$

$$F_\infty(b,c) = \max_{i=1,m} |y_i - \frac{A}{1+be^{cx_i}}| \longrightarrow \min_{b,c} \tag{4}$$

1.1 Verhulstov logistički model

Neka je $t \mapsto y(t)$ model–funkcija čija je nezavisna varijabla vrijeme t i čija je stopa promjene (rasta ili pada) u trenutku t_0 proporcionalna ekonomskom potencijalu, tj.

$$\frac{1}{y(t_0)}\frac{dy(t_0)}{dt} = c\,(A - y(t_0)). \tag{5}$$

gdje je $A > 0$ razina zasićenja. Rješenje diferencijalne jednadžbe (5) je logistička funkcija (1).

Primjer 1 *Za $A = 10$ i dane podatke*

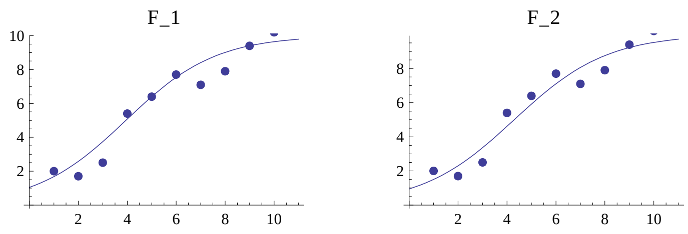
t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2.	1.7	2.5	5.4	6.4	7.7	7.1	7.9	9.4	10.2

minimizacijom funkcije F_2 dobivamo

$$f(t) = \frac{10}{1 + 9.57579e^{-0.52604t}},$$

a minimizacijom funkcije F_1 dobivamo

$$f(t) = \frac{10}{1 + 8.54076e^{-0.544043t}}.$$



Slika 1: Logistička funkcija

1.2 Svojstva

- dvije horizontalne asimptote: $y = 0$, $y = A$

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} f(t) = A.$$

- točka infleksije: $I\left(\frac{\ln b}{c}, \frac{A}{2}\right)$ dobiva se kao nultočka druge derivacije;
- graf simetričan u odnosu na točku infleksije: I

$$f(t_I) = \frac{1}{2}\left[f(t_I - t) + f(t_I + t)\right], \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- kretanje stope promjene $s(t) = \frac{1}{f(t)} f'(t) = \frac{bc}{b+e^{ct}}$

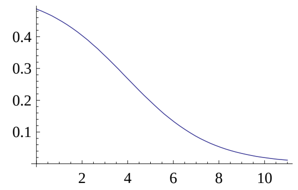
$$\lim_{t\to-\infty} s(t) = c, \qquad \lim_{t\to\infty} s(t) = 0, \qquad s(t_I) = \frac{c}{2}$$

- Nultočke treće derivacije:

$$t_B = \frac{1}{c}\ln\frac{b}{2+\sqrt{3}}, \qquad t_C = \frac{1}{c}\ln\frac{b}{2-\sqrt{3}} \tag{6}$$

- faze rasta:

I. faza: područje $(0, t_B)$ - faza pripreme - stvaranja
II. faza: područje (t_B, t_C) - faza intenzivnog (progresivnog) rasta
III. faza: područje $t > t_C$ - faza zasićenja (starenja)



Slika 2: Kretanje stope rasta logističke funkcije

2 Generalizirana logistička model–funkcija

$$x \mapsto f(x; b, c) = \frac{A}{(1 + be^{-c\gamma x})^{1/\gamma}}, \qquad b, c, \gamma > 0. \tag{7}$$

Za dane podatke mjerenja (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$, takve da je

$$y_i = f(x_i; b, c, \gamma) + \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}[0, \sigma^2],$$

treba odrediti optimalne parametre $b^*, c^*, \gamma^* \in \mathbb{R}_+$ generalizirane logističke model–funkcije, tako da njezin graf prolazi "što bliže" točkama (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$.

$$F_1(b, c, \gamma) = \sum_{i=1}^{m} \left| y_i - \frac{A}{(1 + be^{-c\gamma x_i})^{1/\gamma}} \right| \longrightarrow \min_{b,c,\gamma} \tag{8}$$

$$F_2(b, c, \gamma) = \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - \frac{A}{(1 + be^{-c\gamma x_i})^{1/\gamma}} \right)^2 \longrightarrow \min_{b,c,\gamma} \tag{9}$$

$$F_\infty(b, c, \gamma) = \max_{i=1,m} \left| y_i - \frac{A}{(1 + be^{-c\gamma x_i})^{1/\gamma}} \right| \longrightarrow \min_{b,c,\gamma} \tag{10}$$

2.1 Generalizirani logistički model

Neka je $t \mapsto y(t)$ model–funkcija čija je nezavisna varijabla vrijeme t i čija je stopa promjene (rasta ili pada) u trenutku t_0 proporcionalna ponderiranom ekonomskom potencijalu, tj.

$$\frac{1}{y(t_0)} \frac{dy(t_0)}{dt} = c \left(1 - \left(\frac{y(t_0)}{A} \right)^\gamma \right), \tag{11}$$

gdje je $A > 0$ razina zasićenja. Rješenje diferencijalne jednadžbe (11) je generalizirana logistička funkcija (7).

Primjer 2 *Promatra se rast pilića u tovu. Za $A = 5$ i dane tjedne podatke o težinama pilića u* kg

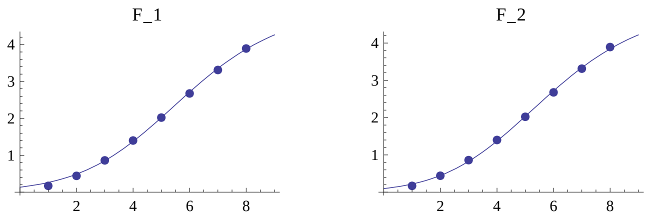
t_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	.17	.443	.861	1.401	2.022	2.676	3.312	3.891

minimizacijom funkcije F_2 dobivamo: $b^* = 5.1895, c^* = 0.992834, \gamma^* = 0.463921$

$$f(t) = \frac{5}{(1 + 5.1895e^{-0.460597t})^{2.15554}}.$$

a minimizacijom funkcije F_1 dobivamo: $b^* = 6.01511, c^* = 0.892076, \gamma^* = 0.517619$

$$f(t) = \frac{5}{(1 + 6.01511e^{-0.461755t})^{1.93192}}.$$



Slika 3: Generalizirana logistička funkcija

2.2 Svojstva

- dvije horizontalne asimptote: $y = 0$, $y = A$,

$$\lim_{t \to -\infty} f(t) = 0, \qquad \lim_{t \to \infty} f(t) = A.$$

- točka infleksije: $I\left(\frac{1}{c\gamma} \ln \frac{b}{\gamma}, \frac{A}{(1+\gamma)^{1/\gamma}}\right)$ dobiva se kao nultočka druge derivacije;
- graf općenito nije simetričan u odnosu na točku infleksije: I
- kretanje stope promjene $s(t) = \frac{1}{f(t)} f'(t) = \frac{bc}{b + e^{c\gamma t}}$

$$\lim_{t \to -\infty} s(t) = c, \qquad \lim_{t \to +\infty} s(t) = 0, \quad s(0) = \frac{bc}{1+b}$$

- Nultočke treće derivacije:

$$t_B = \frac{1}{c\gamma} \ln \frac{2b}{\gamma(\gamma+3) + \gamma\sqrt{(\gamma+1)(\gamma+5)}}, \qquad t_C = \frac{1}{c\gamma} \ln \frac{2b}{\gamma(\gamma+3) - \gamma\sqrt{(\gamma+1)(\gamma+5)}}$$

- faze rasta:

I. faza: područje $(0, t_B)$ - faza pripreme - stvaranja

II. faza: područje (t_B, t_C) - faza intenzivnog (progresivnog) rasta

III. faza: područje $t > t_C$ - faza zasićenja (starenja)

3 Gompertzova model funkcija

$$\frac{dy}{dt} = cy(a - \ln y)$$
$$f(t; a, b, c) = e^{a-be^{-ct}}, \qquad a, b, c > 0$$
$$I(\tfrac{\ln b}{c}, e^{a-1})$$
$$t_B = \tfrac{1}{c}\ln\left(\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}b\right), \qquad t_C = \tfrac{1}{c}\ln\left(\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}b\right)$$

3.1 Gompertzova model funkcija – standard

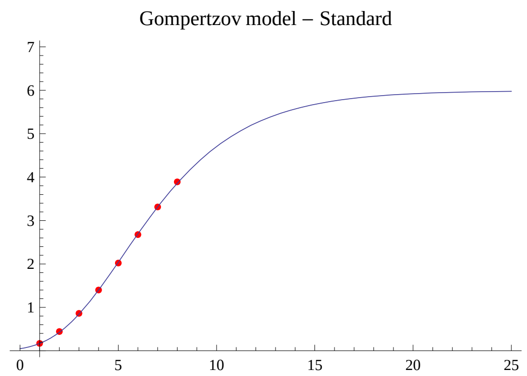
Podaci
$t = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
$y = \{.17, .443, .861, 1.401, 2.022, 2.676, 3.312, 3.891\}$

Parametri: $\{a, b, c\} = \{1.7905, 4.80244, 0.29882\}$

Gornja asimptota (bioloski max) $A = e^a$: 5.99243 kg

Tocka infleksije I: $\{5.25107, 2.20449\}$

$B : \{2.03032, 0.437125\}, \quad C : \{8.47181, 4.08994\}$



Slika 4: Gompertzova model funkcija