Ekonomski fakultet
Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

Vektori u ravnini i prostoru

Rudolf Scitovski, Ivan Vazler

10. svibnja 2012.

Sadržaj

1 Uvod

Ako u ravnini M uvedemo pravokutni koordinatni sustav s ishodištem u fiksnoj točki $O \in M$ u ravnini, onda svakoj točki $P \in M$ pripada jedinstveni vektor $\overrightarrow{OP}$, koji zovemo **radijvektor** ili vektor položaja i označavamo s.

$$\vec{r}_P = \overrightarrow{OP}.$$

Očigledno postoji bijekcija (obostrano jednoznačno preslikavanje) između skupova M i X_0. Matematičku strukturu $(X_0, +, \cdot)$ zovemo **vektorski prostor pridružen točki** O.

Primjer 1. Nulvektor $\vec{0}$ *je radijvektor koji ima istu početnu i završnu točku.*

Jedinični vektor *zvat ćemo svaki vektor* $\vec{e}$ *za koga je* $\|\vec{e}\| = 1$.

Suprotni vektor *vektora* $\vec{a}$ *je vektor koji ima suprotnu orijentaciju od orijentacije vektora* $\vec{a}$ *i označavamo ga s* $(-\vec{a})$.

Slično se definira i skup svih radijvektora u prostoru $X_0(E)$ i skup svih radijvektora na pravcu $X_0(p)$. Navedimo još nekoliko često korištenih pojmova.

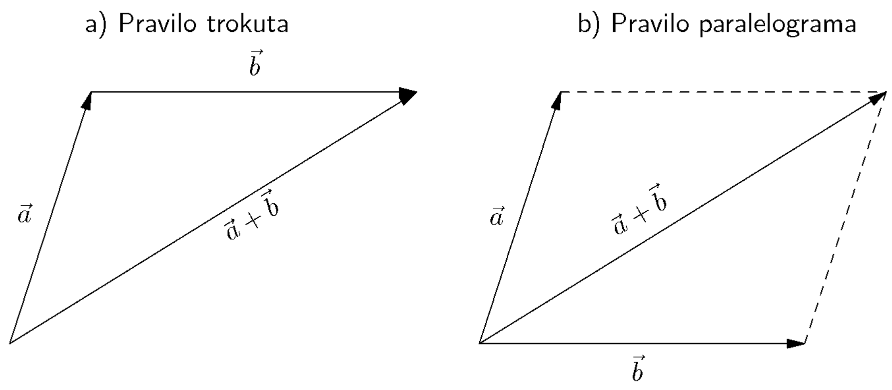
– kažemo da su dva ili više vektora kolinearni ako njihovi reprezentanti leže na istom ili na paralelnim pravcima;

– kažemo da su tri ili više vektora komplanarni ako njihovi reprezentanti leže u istoj ili u paralelnim ravninama.

2 Operacije s vektorima

2.1 Zbrajanje vektora

Zbrajanje vektora je funkcija dviju varijabli $+ : X_0(M) \times X_0(M) \to X_0(M)$. Za dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(M)$ definiramo novi vektor $\vec{c} := \vec{a} + \vec{b}$ pravilom paralelograma (vidi Sliku 1.b)



Slika 1: Pravila za zbrajanje vektora

Računska operacija zbrajanja vektora ima svojstvo zatvorenosti ili grupoidnosti, tj. rezultat operacije zbrajanja dva vektora opet je jedan vektor. Pored toga,

(i) za svaka tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(M)$ vrijedi svojstvo asocijativnosti: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;

(ii) postoji neutralni element $\vec{0}$, tako da za proizvoljni vektor $\vec{a} \in X_0(M)$ vrijedi: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

(iii) za svaki vektor $\vec{a} \in X_0(M)$ postoji inverzni element – suprotni vektor $(-\vec{a})$, takav da vrijedi:
$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$;

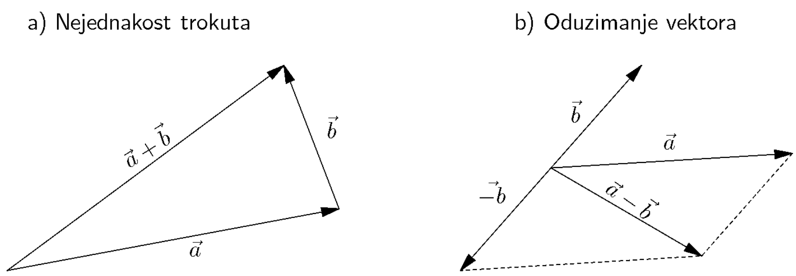
(iv) vrijedi zakon komutacije, tj. za svaka dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(M)$ vrijedi: $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$;

Skup svih vektora u prostoru snabdjeven računskom operacijom zbrajanja i prethodno navedenim svojstvima nazivamo **komutativna** ili **Abelova grupa**[1] i označavamo s $(X_0(M), +)$. U daljnjem tekstu često ćemo govoriti o vektoru, a crtat ćemo neki njegov reprezentant.

Primjer 2. *Odaberimo reprezentante vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tako da oni leže na stranicama trokuta i da bude $\vec{c} = \vec{a}+\vec{b}$ (vidi Sliku* 2.a*). Kako je u svakom trokutu duljina jedne njegove stranice manja od zbroja duljina preostale dvije, vrijedi tzv.* nejednakost trokuta

$$\|\vec{c}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|.$$

Pri tome jednakost vrijedi u slučaju ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ kolinearni.



Slika 2

Primjedba 1. Oduzimanje vektora možemo definirati preko zbrajanja, koristeći inverzni element (suprotni vektor – vidi Sliku 2.b):

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

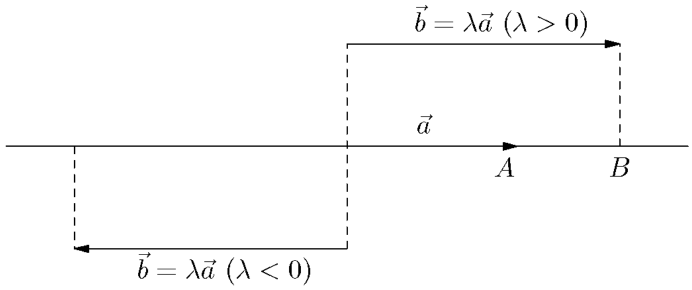
Primjedba 2. Množenje vektora prirodnim brojem možemo definirati induktivno:

$$n \cdot \vec{a} = (n-1) \cdot \vec{a} + \vec{a}, \qquad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$$

2.2 Množenje vektora sa skalarom

Množenje vektora sa skalarom je funkcija dviju varijabli $\cdot : \mathbb{R} \times X_0(M) \to X_0(M)$. Za realni broj $\lambda \in \mathbb{R}$ i vektor $\vec{a} \in X_0(M)$ definiramo novi vektor $\vec{b} := \lambda \cdot \vec{a}$ kao na Slici 3.

[1]Niels Abel (1802–1829), norveški matematičar.



Slika 3: Množenje vektora sa skalarom

Zadatak 1. *Za zadane vektore $\vec{a}, \vec{b} \in X(M)$ nacrtajte vektor $\vec{a} - 2\vec{b}$.*

U kontinuitetu sa svojstvima koja vrijede za zbrajanje vektora, navedimo i svojstava koja vrijede za množenje vektora sa skalarom:

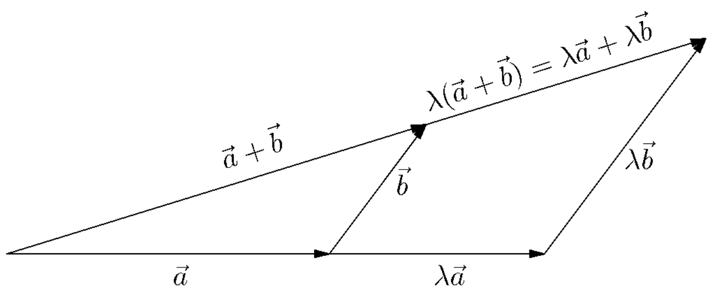
(v) za dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(M)$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi distributivnost obzirom na vektorski faktor: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;

(vi) za dva skalara $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i vektor $\vec{a} \in X_0(M)$ vrijedi distributivnost obzirom na skalarni faktor: $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;

(vii) za dva skalara $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i vektor $\vec{a} \in X_0(M)$ vrijedi svojstvo kvaziasocijativnosti: $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$;

(viii) za bilo koji vektor $\vec{a} \in X_0(M)$ vrijedi: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Svojstvo *(v)* proizlazi iz sličnosti trokuta i ilustrirano je na slici



Slika 4: Distributivnost obzirom na vektorski faktor

Svojstva *(vi)* i *(vii)* dokazuju se posebno za svaku kombinaciju predznaka skalara λ i μ (vidi [9]).

Skup $X_0(M)$ snabdjeven računskim operacijama zbrajanja i množenja sa skalarom, koje imaju navedenih osam svojstava nazivamo **vektorski prostor** i označavamo s $(X_0(M), +, \cdot)$.

Analogno se definiraju i vektorski prostor $(X_0(E), +, \cdot)$ u prostoru i vektorski prostor $(X_0(p), +, \cdot)$ na pravcu. Kako je $X_0(M) \subset X_0(E)$, reći ćemo da je vektorski prostor $(X_0(M), +, \cdot)$ **vektorski potprostor** u $(X_0(E), +, \cdot)$. Nadalje ćemo ove vektorske prostore označavati samo s $X_0(E), X_0(M), X_0(p)$.

Primjedba 3. Za bilo koja dva vektora $\vec{a}, \vec{b}$ iz vektorskog prostora X_0 i bilo koja dva skalara $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ je

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \in X_0.$$

Primjedba 4. Ako su $\vec{a}, \vec{b}$ dva kolinearna vektora, tada postoji pravac p i točke $O, A, B \in p$ takve da je $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$, pri čemu je

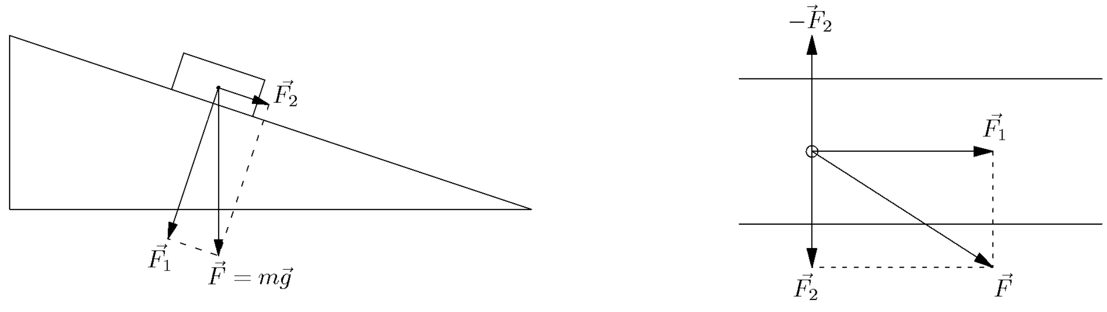
$$\vec{b} = \lambda\vec{a}, \quad \text{gdje je} \quad \lambda = \begin{cases} \|\vec{b}\|/\|\vec{a}\|, & \vec{a}, \vec{b} \text{ imaju isti smjer} \\ -\|\vec{b}\|/\|\vec{a}\|, & \vec{a}, \vec{b} \text{ su suprotnog smjera} \end{cases}$$

3 Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Definicija 1. Ako su $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in X_0$ vektori, a $\lambda_1 \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ skalari, tada vektor $\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n \in X_0$ nazivamo **linearna kombinacija** vektora $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$. Kažemo još da je vektor $\vec{a}$ rastavljen (razvijen) po vektorima $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$.

Pogledajmo dva jednostavna fizikalna primjera (vidi Sliku 5):

- na tijelo na kosini djeluje sila teža $\vec{F}$, koju po pravilu paralelograma rastavljamo na sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$;
- na tijelo u vodi djeluje vučna sila $\vec{F}$, koju također rastavljamo po pravilu paralelograma na sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$;



Slika 5: Fizikalni primjeri: tijelo na kosini i tijelo u vodi

Navedene rastave možemo zapisati kao $1 \cdot \vec{F} + (-1) \cdot \vec{F}_1 + (-1) \cdot \vec{F}_2 = \vec{0}$.

Definicija 2. Kažemo da je skup vektora $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in X_0$ **linearno nezavisan** ako njihova proizvoljna linearna kombinacija iščezava jedino na trivijalan način:

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

U protivnom kažemo da je skup vektora **linearno zavisan**, tj. postoji barem jedna njihova linearna kombinacija koja iščezava na netrivijalan način, tj.

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0} \quad \text{pri čemu} \quad \exists\, \lambda_i \neq 0.$$

Primjer 3. *Ako skup vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ sadrži nulvektor, on je linearno zavisan.*

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je baš prvi vektor $\vec{a}_1$ nulvektor. Tada možemo utvrditi da vrijedi:

$$1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0},$$

pa smo na taj način pronašli jednu linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, koja iščezava na netrivijalan način.

Primijetite da su sile $\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$ iz fizikalnih primjera s početka odjeljka također linearno zavisne. Sljedeći teorem ukazuje nam kako kako se na jedan operativniji način može ustanoviti je li skup vektora linearno zavisan ili nezavisan.

Teorem 1. *Skup vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ je linearno zavisan onda i samo onda ako se barem jedan od njih može prikazati kao linearna kombinacija ostalih.*

Dokaz. (Nužnost) Pretpostavimo da je skup vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ linearno zavisan. Po prethodnoj definiciji to znači da postoji njihova linearna kombinacija koja iščezava na netrivijalan način. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $\lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$, a da je pri tome $\lambda_1 \neq 0$. Tada možemo pisati

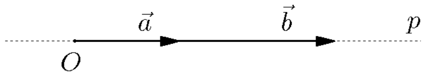
$$\vec{a}_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\vec{a}_2 + \cdots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\vec{a}_n$$

(Dovoljnost) Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\vec{a}_1 = \beta_2\vec{a}_2 + \cdots + \beta_n\vec{a}_n$ iz čega slijedi

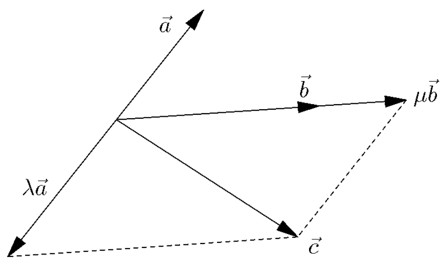
$$1 \cdot \vec{a}_1 + (-\beta_2)\vec{a}_2 + \cdots + (-\beta_n)\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Po definiciji to znači da su vektori $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ linearno zavisni. □

Primjer 4. *Bilo koja dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(p)$ su linearno zavisna (tj. maksimalni broj linearno nezavisnih vektora u $X_0(p)$ je jedan).*



Slika 6: Linearna zavisnost u $X_0(p)$



Slika 7: Linearna zavisnost u $X_0(M)$

Primjer 5. *Bilo koja tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(M)$ su linearno zavisna (tj. maksimalni broj linearno nezavisnih vektora u $X_0(M)$ je dva).*

Primjer 6. *Bilo koja četiri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in X_0(E)$ su linearno zavisna (tj. maksimalni broj linearno nezavisnih vektora u $X_0(E)$ je tri).*

Teorem 2. *Ako su $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(M)$ dva linearno nezavisna vektora u ravnini, tada se svaki vektor $\vec{c} \in X_0(M)$ na jedinstven način može prikazati (rastaviti) kao linearna kombinacija vektora $\vec{a}, \vec{b}$.*

Dokaz. Prema jednom od prethodnih primjera vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su linearno zavisni pa prema Teoremu 1 vrijedi

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \tag{3.1}$$

U svrhu dokaza jedinstvenosti ovog rastava, pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da se vektor $\vec{c}$ barem na još jedan način može prikazati pomoću vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \lambda'\vec{a} + \mu'\vec{b} \tag{3.2}$$

Oduzimanjem jednakosti (3.1), (3.2) dobivamo

$$(\lambda - \lambda')\vec{a} + (\mu - \mu')\vec{b} = \vec{0}.$$

Kako su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ linearno nezavisni, slijedi: $\lambda = \lambda' \quad \& \quad \mu = \mu'$. □

Teorem 3. *Ako su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$ tri linearno nezavisna vektora u prostoru, tada se svaki vektor $\vec{d} \in X_0(E)$ na jedinstven način može prikazati (rastaviti) kao linearna kombinacija vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.*

Zadatak 2. *Neka je $O \in E$ fiksna točka i neka točka $C \in E$ dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru $3:1$, tj. $d(A,C) : d(C,B) = 3:1$. Vektor $\overrightarrow{OC}$ prikažite kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$*
Rješenje: $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$.

Zadatak 3. *Provjerite jesu li vektori:*
$\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \quad \vec{b} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{c} = -5\vec{i} - 8\vec{j} + 9\vec{k}$ *linearno zavisni.*
Rješenje: Jesu, $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

4 Baza vektorskog prostora. Koordinatni sustav

Definicija 3. Uređena trojka $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ linearno nezavisnih vektora iz $X_0(E)$ zove se **baza vektorskog prostora** $X_0(E)$.

Uređen par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ linearno nezavisnih vektora iz $X_0(M)$ zove se baza vektorskog prostora $X_0(M)$.

Svaki nenul vektor $(\vec{e})$ iz $X_0(p)$ čini bazu vektorskog prostora $X_0(p)$.

Neka je $\vec{a} \in X_0(E)$, a $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ baza u $X_0(E)$. Tada vektor $\vec{a}$ na jedinstven način možemo zapisati kao linearnu kombinaciju vektora baze

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3.$$

Brojeve a_1, a_2, a_3 zovemo **koordinate** (komponente) vektora $\vec{a}$ u bazi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Sada prirodno slijede pravila za zbrajanje vektora i množenje vektora sa skalarom ako su oni zadani sa svojim koordinatama:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\vec{e}_3 \quad \text{[zbrajanje]}$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\vec{e}_1 + (\lambda a_2)\vec{e}_2 + (\lambda a_3)\vec{e}_3 \quad \text{[množenje vektora skalarom]}$$

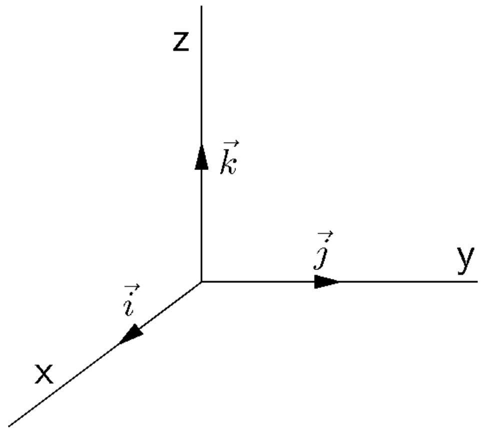
Definicija 4. Par $(O\,; (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$ fiksne točke O i baze $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ zovemo **Cartesijev**[2] **koordinatni sustav u prostoru** E.

Posebno je pogodno ako za bazu prostora $X_0(E)$ izaberemo uređenu trojku međusobno okomitih i jediničnih (dugačkih 1!) vektora, koje obično označavamo s $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Tako dobivamo **pravokutni Cartesijev koordinatni sustav** $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Pravac određen vektorom $\vec{i}$ označavamo sa x i zovemo **apscisa**, pravac određen vektorom $\vec{j}$ označavamo sa y i zovemo **ordinata**, a pravac određen vektorom $\vec{k}$ označavamo sa z i zovemo **aplikata**.

Primjedba 5. Ranije smo utvrdili da postoji bijekcija (obostrano jednoznačno preslikavanje) između skupova E i X_0. Primijetite da također postoji bijekcija između skupa svih uređenih trojki realnih brojeva $\mathbb{R}^3$ i vektorskog prostora $X_0(E)$ jer svakoj uređenoj trojki $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ na jedinstven način možemo pridružiti vektor $\vec{a} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ iz prostora $X_0(E)$ i obrnuto. Zato ćemo često po potrebi povezivati, pa neki puta i poistovjećivati pojmove: skup E, vektorski prostor $X_0(E)$ i $\mathbb{R}^3$.

Zadatak 4. *Provjerite čine li vektori $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ bazu u vektorskom prostoru $X_0(M)$. Ako čine, vektor $\vec{c} = -11\vec{i} + 6\vec{j}$ prikažite u toj bazi.*
Rješenje: čine, $\vec{c} = -2\vec{a} + 5\vec{b}$.

[2] Rene Descartes (1596–1650), francuski filozof i matematičar. Njegovo latinizirano ime je Cartesius.



Slika 8: Pravokutni Cartesijev (Descartesov) koordinatni sustav

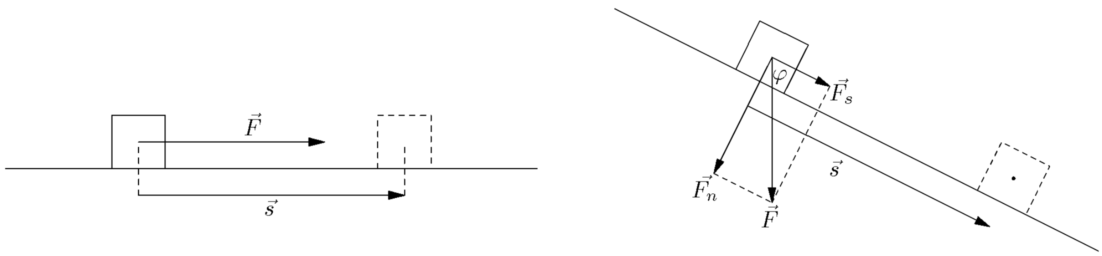
5 Skalarni produkt

Motivacija za uvođenje pojma skalarnog produkta vektora je fizikalna definicija rada sile $\vec{F}$ na putu $\vec{s}$. Ako rad obavlja sila $\vec{F}$ koja djeluje u smjeru puta $\vec{s}$, onda je rad zadan s

$$W = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{s}\| = F\, s,$$

a ako sila $\vec{F}$ ne djeluje u smjeru puta $\vec{s}$, onda rad obavlja samo komponenta $\vec{F}_s$ sile u smjeru puta $\vec{s}$, tj.

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_s + \vec{F}_n, \\ W &= \|\vec{F}_s\| \cdot \|\vec{s}\| = (F\cos\varphi)\, s = F\, s\cos\varphi \end{aligned}$$

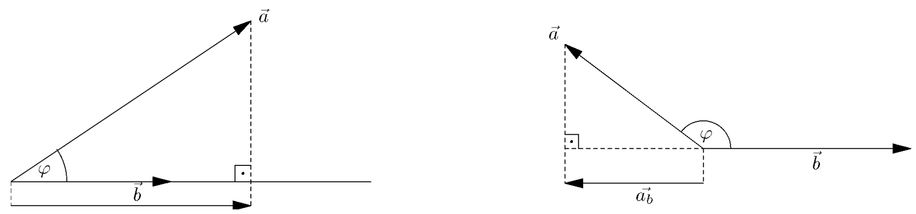


Slika 9: Rad sile $\vec{F}$ na putu $\vec{s}$

Primijetite da je sila $\vec{F}_s$ ortogonalna projekcija sile $\vec{F}$ u smjeru vektora puta $\vec{s}$.

Općenito ćemo projekciju vektora $\vec{a}$ u smjeru vektora $\vec{b}$ označiti s $\vec{a}_b$. Pod skalarnom projekcijom vektora $\vec{a}$ u smjeru vektora $\vec{b}$ podrazumijevamo (uz oznaku $a := \|\vec{a}\|$)[3]

$$a_b = a\,\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi.$$



Slika 10: Projekcija vektora $\vec{a}$ u smjeru vektora $\vec{b}$

Primijetite da broj $a\cos\varphi$ može biti pozitivan ($\varphi < \frac{\pi}{2}$) ili negativan ($\varphi > \frac{\pi}{2}$).

Zadatak 5. *Pokušajte geometrijski opravdati niže navedena svojstva projekcije vektora*

a) Projekcija produkta skalara s vektorom jednaka je produktu tog skalara i projekcije vektora

$$(\lambda\,\vec{a})_b = \lambda\vec{a}_b,$$

b) Projekcija zbroja dva vektora jednaka je zbroju projekcija tih vektora

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)_c = \vec{a}_c + \vec{b}_c.$$

Definicija 5. Skalarni produkt u $X_0(E)$ je binarna operacija $\cdot\, X_0 \times X_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ koja paru vektora $\vec{a}$, $\vec{b} \in X_0$ pridužuje broj (skalar), kojeg ćemo označiti s $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$,

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \begin{cases} ab\cos\varphi, & \vec{a},\ \vec{b} \neq \vec{0}, \quad 0 \le \varphi \le \pi \\ 0, & \vec{a} = \vec{0} \text{ ili } \vec{b} = \vec{0} \end{cases}$$

pri čemu je običaj da se i rezultat operacije naziva skalarni produkt.[4]

Primjedba 6. Primijetite da se skalarni produkt dva vektora može prikazati kao produkt norme jednog vektora i sklalarne projekcije drugog vektora na prvi,

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = a_b b = a b_a.$$

Primjedba 7. Primijetite da skalarni produkt dva vektora može biti jednak nuli onda i samo onda ako je jedan od njih nul-vektor ili ako su vektori međusobno okomiti.

Navedimo važna svojstva skalarnog produkta

1. $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \langle\vec{b},\vec{a}\rangle$
2. $\langle\vec{a},\vec{a}\rangle = a^2 \ge 0 \quad \text{i} \quad \langle\vec{a},\vec{a}\rangle = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
3. $\langle\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\rangle = \langle\vec{a},\vec{c}\rangle + \langle\vec{b},\vec{c}\rangle$ (slijedi iz Zadatka 5 a)
4. $\langle\lambda\,\vec{a},\vec{b}\rangle = \lambda\,\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ (slijedi iz Zadatka 5 b).

[3] U nekim knjigama se broj a_b naziva "projekcija vektora $\vec{a}$ u smjeru vektora $\vec{b}$ ([8])"
[4] engl.: scalar (dot) product, njem.: Skalarprodukt (Ineresprodukt)

Primjer 7. *Lako se na osnovi Definicije 5 vidi da vrijedi*

1. $(\vec{a}+\vec{b})^2 = \langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}\rangle = a^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle + b^2$,
2. $(\vec{a}-\vec{b})^2 = \langle \vec{a}-\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}\rangle = a^2 - 2\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle + b^2$,
3. $(\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}) \quad \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle}{a\, b}, \quad \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$
4. $(\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}) \quad \langle \vec{a}, \vec{b}\rangle = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Primjer 8. *Načinimo tablicu množenja (skalarni produkt) za ortonormiranu bazu $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ vektorskog prostora $X_0(E)$*

$\cdot$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Z a d a c i

Zadatak 6. *Ako je vektor $\vec{a}+3\vec{b}$ okomit na vektor $7\vec{a}-5\vec{b}$ i vektor $\vec{a}-4\vec{b}$ okomit na vektor $7\vec{a}-2\vec{b}$, odredite kut izmedju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.*
Rješenje: $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi_1 = \frac{2}{3}\pi$.

Zadatak 7. *Odredite kut između jediničnih vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako se zna da su vektori $\vec{a}+2\vec{b}$ i $5\vec{a}-4\vec{b}$ međusobno okomiti.*
Rješenje: $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Zadatak 8. *Pokažite da su vektori $\vec{a}\,\langle \vec{b}, \vec{c}\rangle - \vec{b}\,\langle \vec{a}, \vec{c}\rangle$ i $\vec{c}$ međusobno okomiti.*

Direktnom provjerom uz korištenje tablice množenja iz *Primjera 8* dobivamo

Teorem 4. *Za vektore*

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \\ \vec{b} &= b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} \end{aligned}$$

vrijedi formula[5]

$$\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle = a_x b_x + a_y b_y + c_x c_y. \tag{5.1}$$

Iz definicije skalarnog produkta i norme vektora korištenjem formule (5.1) dobivamo

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a}\rangle} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \tag{5.2}$$

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle}{a\, b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}, \quad \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}. \tag{5.3}$$

[5] U programskom sustavu *Mathematica* skalarni produkt vektora $\vec{a}, \vec{b}$ dobivamo naredbom $a\,.\,b$, gdje su a, b liste

Primjer 9. *Pokažimo da su dijagonale četverokuta* $ABCD$ *s vrhovima* $A(1, -2, 2)$, $B(1, 4, 0)$, $C(-4, 1, 1$
$D(-5, -5, 3)$ *međusobno okomite.*

Kako je $\overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = -5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ i $\overrightarrow{BD} = \vec{r}_D - \vec{r}_B = -6\vec{i} - 9\vec{j} + 3\vec{k}$, imamo $\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \rangle = 0$.

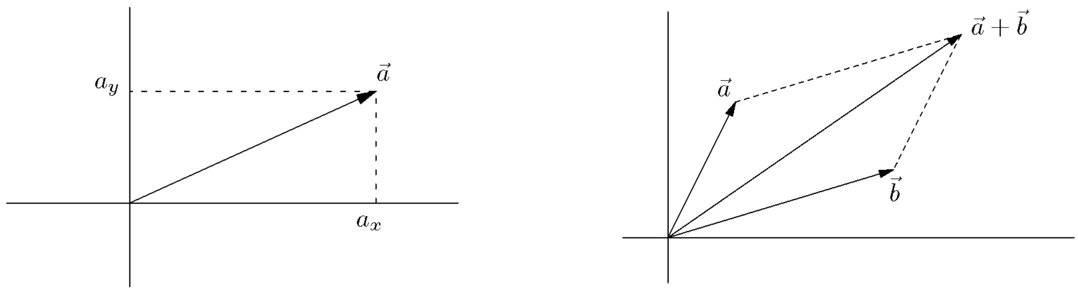
Primjer 10. *Zadan je trokut* ABC *s vrhovima* $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$, $C(3, -2, 1)$. *Treba odrediti unutrašnji kut tog trokuta pridružen vrhu* B.

Koko je $\overrightarrow{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = 3\vec{i} + 4\vec{k}$ i $\overrightarrow{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = 7\vec{i} + \vec{k}$, dobivamo

$$\cos\beta = \frac{\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle}{\|\overrightarrow{BA}\| \, \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{25}{\sqrt{50}\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \beta = \frac{\pi}{4}.$$

6 Norma vektora

Pretpostavimo da je u ravnini M definiran pravokutni Cartezijev koordinatni sustav $(O; \vec{i}, \vec{j})$ i neka je $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$. Sada možemo izračunati (vidi Sliku 11) duljinu ovog vektora $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.



Slika 11: Euklidova norma vektora

Primjetite da za ovako definiranu duljinu vektora vrijedi

(i) $\|\vec{a}\| \geq 0 \quad \& \quad (\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0})$,

(ii) $\|\lambda\vec{a}\| =| \lambda | \, \|\vec{a}\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$

Duljina (norma, intenzitet) vektora može se i općenito definirati:

Definicija 6. Neka je X_0 vektorski prostor. Funkciju $\| \cdot \| : X_0 \to [0, \infty)$, koja svakom vektoru $\vec{a} \in X_0$ pridružuje nenegativni realni broj (koji ćemo označiti s $\|\vec{a}\|$ ili jednostavno s a) zovemo **norma** vektora $\vec{a}$ ako vrijedi

(i) $\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ [pozitivna definitnost],

(ii) $\|\lambda\vec{a}\| = \mid \lambda \mid \|\vec{a}\|$ za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ i za svaki $\vec{a} \in X_0$ [homogenost],

(iii) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ za svaki $\vec{a}, \vec{b} \in X_0$ [nejednakost trokuta].

Vektorski prostor X_0 na kome je definirana norma naziva se **normirani vektorski prostor.** Najčešće korištene vektorske norme su [6]

$$\|\vec{a}\|_1 = \mid a_x \mid + \mid a_y \mid + \mid a_z \mid, \qquad (l_1 \text{ norma})$$
$$\|\vec{a}\|_2 = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \qquad (l_2 \text{ ili Euklidova norma})$$
$$\|\vec{a}\|_\infty = \max\{\mid a_x \mid, \mid a_y \mid, \mid a_z \mid\}, \qquad (l_\infty \text{ norma ili Čebiševljeva norma})$$

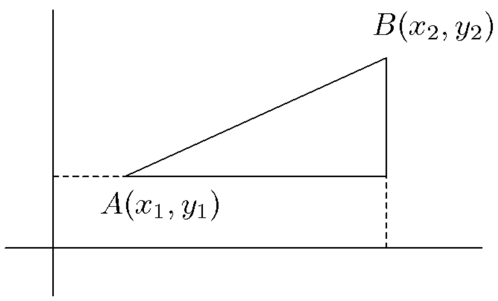
Zadatak 9. *Pokažite da spomenute norme imaju sva svojstva navedena u prethodnoj definiciji.*

6.1 Udaljenost dviju točaka

Udaljenost dviju točaka $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \in M$ u ravnini M u kojoj je uveden pravokutni Cartezijev koordinatni sustav možemo izračunati (vidi Sliku 12) po formuli

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{6.1}$$

Ako definiramo radijvektore $\vec{r}_A, \vec{r}_B \in X_0(M)$,



Slika 12: Udaljenost točaka A, B u ravnini

$$\vec{r}_A = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \qquad \vec{r}_B = x_2\vec{i} + y_2\vec{j},$$

onda formulu (6.1) možemo zapisati kao

$$d_2(A,B) = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|_2, \quad \text{gdje je} \quad \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}. \tag{6.2}$$

[6] U programskom sustavu *Mathematica* l_p-normu vektora $\vec{a}$ dobivamo naredbom `Norm[a,p]`, gdje je `a` lista, a `p` parametar norme.

Na sličan način može se definirati i udaljenost dviju točaka preko l_1 ili l_∞ norme sljedećim formulama:

$$d_1(A,B) = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|_1 \qquad d_\infty(A,B) = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|_\infty \tag{6.3}$$

Zadatak 10. *Koji je geometrijski smisao d_2, odnosno d_∞ udaljenosti dviju točaka $A, B \in M$?*

Možemo i općenito definirati *razdaljinsku funkciju* $d : M \times M \to [0, +\infty\rangle$, koja dvijema točkama A, B pridružuje njihovu udaljenost $d(A,B)$ i ima sljedeća svojstva:

$$\begin{aligned} (i) &\quad d(A,B) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = B \\ (ii) &\quad d(A,B) = d(B,A) \\ (iii) &\quad d(A,B) \le d(A,C) + d(C,B), \ \text{ za sve } A,B,C \in M. \end{aligned}$$

Skup svih točaka u ravnini M, na kojoj je definirana neka razdaljinska (metrička) funkcija naziva se **metrički prostor.** Naravno, na sličan način može se definirati i razdaljinska metrička) funkcija u prostoru E ili na pravcu p.

Zadatak 11. *Jedinična "kružnica" sa središtem u $O \in \mathbb{R}^2$ definira se kao skup $\partial K = \{T \in M : \ d(O,T) = 1\}$. Nacrtajte jedinične kružnice ako se udaljenost definira s d_1, d_2 ili d_∞.*

Zadatak 12. *Zadan je trapez $ABCD$ s vrhovima: $A(-3,2,1)$, $B(3,-1,4)$, $C(5,2,-3)$. Odredite četvrti vrh D ako vrijedi $\overrightarrow{AB} = 3\,\overrightarrow{DC}$.*
Rješenje: $\vec{r}_D = \vec{r}_C - \frac{1}{3}\vec{r}_B + \frac{1}{3}\vec{r}_A$, $D(3,3,-4)$

Zadatak 13. *Zadan je trokut ABC s vrhovima: $A(-3,2,1)$, $B(3,-2,2)$, $C(5,2,-4)$. Odredite duljinu težišnice iz vrha A.*
Rješenje: $P_A(4,0,-1)$, $\overrightarrow{AP_A} = 7\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $d = \sqrt{57}$

Zadatak 14. *Zadan je paralelogram $ABCD$ s vrhovima: $A(-3,2,1)$, $B(3,-1,4)$, $C(5,2,-3)$, $D(-1,5,-6)$. Izračunajte udaljenost točke A do sjecišta njegovih dijagonala.*
Rješenje: $S(1,2,-1)$, $\vec{r}_S = \frac{1}{2}(\vec{r}_C - \vec{r}_A) = \frac{1}{2}(\vec{r}_D - \vec{r}_B), d(A,S) = 2\sqrt{5}$.

Zadatak 15. *Dokažite da vektor $\vec{a} = \frac{1}{2}\langle\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\rangle$ s početkom u točki O ima vrh u polovištu dužine $\overline{AB}$.*

7 Drugi način prikaza vektora iz R^3

Vektor $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ zapisat ćemo u obliku

$$a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = (a_x, a_y, a_z)^T.$$

Za dva vektora $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, $y = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3$ racunske operacije zapisujemo na sljedeći način:

- **zabrajanje:**

$$x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)^T;$$

- **množenje sa skalarom $\lambda \in \mathbb{R}$:**

$$\lambda x = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{bmatrix} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)^T;$$

- **skalarni produkt:**

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Specijalno, budući da je $\langle x, x\rangle = x_1^2+x_2^2+x_3^2$, onda euklidsku normu vektora $x \in \mathbb{R}^3$ možemo pisati

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

8 Vektorski prostor R^n

$\mathbb{R}^n$ možemo promatrati ili kao skup točaka $x = (x_1, \ldots, x_n)$ u n-dimenzionalnom prostoru ili kao skup vektora $R^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n)^T : x_i \in \mathbb{R}\}$

Za dva vektora $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ racunske operacije zapisujemo na sljedeći način:

- **zabrajanje:**

$$x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)^T;$$

- **množenje sa skalarom $\lambda \in \mathbb{R}$:**

$$\lambda x = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_3)^T;$$

- **skalarni produkt:**

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

Specijalno, budući da je $\langle x, x\rangle = x_1^2+\cdots+x_n^2$, onda euklidsku normu vektora $x \in \mathbb{R}^n$ možemo pisati

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Definicija 7. Funkciju $\|\cdot\| : R^n \to [0,\infty)$, koja svakom vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ pridružuje nenegativni realni broj (koji ćemo označiti s $\|x\|$) zovemo **norma** vektora $x \in \mathbb{R}^n$ ako vrijedi

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 = (0,\dots,0)$ [pozitivna definitnost],

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ i za svaki $x \in \mathbb{R}^n$ [homogenost],

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ za svaki $x, y \in \mathbb{R}^n$ [nejednakost trokuta].

Najčešće korištene vektorske norme su

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad (l_1 \ norma)$$
$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}, \qquad (l_2 \ \text{ ili Euklidova norma})$$
$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\dots n} |x_i|, \qquad (l_\infty \ \text{ norma ili Čebiševljeva norma})$$

Definicija 8. Funkciju $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty\rangle$, sa svojstvom da za svaki $x, y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\begin{aligned}
(i) &\quad d(x,y) \geq 0, \quad d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y \quad \text{(pozitivna definitnost)};\\
(ii) &\quad d(x,y) = d(y,x) \quad \text{(simetričnost)};\\
(iii) &\quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \text{(nejednakost trokuta)},
\end{aligned}$$

zovemo **metrika na** $\mathbb{R}^n$

Specijalno, svakom normom $\|\cdot\|$ definirana je jedna metrika formulom

$$d(x,y) = \|x - y\|. \tag{8.1}$$

Vrijednost funkcije $d(x,y)$ za neke $x, y \in \mathbb{R}^n$ zovemo udaljenost točaka $x, y \in \mathbb{R}^n$. Najčešće korištene razdaljinske funkcije (metrike) su

$$d_1(x,y) = \|x-y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad \textbf{(Manhattan udaljenost)}$$
$$d_2(x,y) = \|x-y\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2} \quad \textbf{(Euklidska udaljenost)}$$
$$d_\infty(x,y) = \|x-y\|_\infty = \max_{i=1,\dots n} |x_i - y_i| \quad \textbf{(Čebiševljeva udaljenost)}$$

Zadatak 16. *Napišite formule za Euklidsku, Manhattan i Čebiševljeva udaljenost dviju točaka* $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. *Objanite geometrijski smisao.*

Primjer 11. *U nekom tekst prisutnost neke riječi kodira se s* 1*, a odsutnost te riječi iz teksta s* 0*. Postavlja se pitanje o sličnosti/različitosti dva teksta obzirom na prisutnost/odsutnost promatranih riječi. Tekst u kome je prisutno/odsutno* $n \geq 1$ *izabranih riječi prikazat ćemo vektorom iz* $\mathbb{R}^n$ *s komponentama* 0 *ili* 1*. Primjerice, sljedećim vektorima prikazani su tekstovi u kojima su prisutne/odsutne riječi A,B,C:*

$a^1 = (1,1,0)$: *tekst u kome se pojavljuju riječi A,B, a ne pojavljuje riječ C*

$a^2 = (1,0,0)$: *tekst u kome se pojavljuje riječ A, a ne pojavljuju riječi B,C*

$a^3 = (1,0,1)$: *tekst u kome se pojavljuju riječi A, C, a ne pojavljuje riječ B*

$a^4 = (0,0,1)$: *rečenica u kojoj se pojavljuje riječ C, a ne pojavljuju riječi A, B*

U svrhu ispitivanja sličnosti/različitosti tekstova obzirom na prisutnost/odsutnost nekih riječi možemo pokušati iskoristiti ranije spomenute metričke funkcije d_1, d_2, d_∞. U znanstvenoj literaturi (vidi primjerice [1, 16]) u tu svrhu koriste se neke tzv. *kvazimetričke funkcije*, kao što su

$$d_{LS}(x,y) = \|x-y\|^2 \quad \text{– Least Squares (LS) kvazimetrička funkcija}$$
$$d_c(x,y) = 1 - \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} \quad \text{– kosinus kvazimetrička funkcija}$$

Od kvazimeričkih funkcija zahtijeva se samo svojstvo pozitivne definitnosti, dok ostala svojstva metričkih funkcija ne moraju biti ispunjena. Ipak prethodno spomenute dvije kvazimeričke funkcije, pored svojstva pozitivne definitnosti, zadovoljavaju i svojstvo simetričnosti, ali ne zadovoljavaju nejednakost trokuta. Za prethodno spomenuti primjer dobivamo

$$\begin{array}{lll} d_{LS}(a^1,a^2) = 1, & d_{LS}(a^1,a^3) = 2, & d_{LS}(a^1,a^4) = 3 \\ d_1(a^1,a^2) = 1, & d_1(a^1,a^3) = 2, & d_1(a^1,a^4) = 3, \\ d_c(a^1,a^2) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.29, & d_c(a^1,a^3) = \frac{1}{2}, & d_c(a^1,a^4) = 1 \end{array}$$

Prema LS-kvazimetričkoj funkciji (a također i prema l_1-metričkoj funkciji) tekstovi a^1 i a^2 su najsličniji (najbliži), a tekstovi a^1 i a^4 najrazličitiji (najudaljeniji) obzirom na pojavu riječi A,B,C.

I prema kosinus-metričkoj funkciji d_c tekstovi a^1 i a^2 su najsličniji (najbliži), a tekstovi a^1 i a^4 potpuno različiti (maksimalno udaljeni) obzirom na pojavu riječi A,B,C.

Primjer 12. *Promatramo tekstove u kojima se mogu pojaviti riječi: A,B,C,D,E. Neka je primjerice:*

$a^1 = (1,0,0,0,1)$: *tekst u kome se pojavljuju riječi A, E, a ne pojavljuju riječi B,C,D*

$a^2 = (0,1,1,0,0)$: *tekst u kome se pojavljuju riječi B, C, a ne pojavljuju riječi A,D,E*

$a^3 = (1,0,0,0,0)$: *tekst u kome se pojavljuje riječe A, a ne pojavljuju riječi B,C,D, E*

$d_{LS}(a^i,a^j)$	a^1	a^2	a^3
a^1	0	4	1
a^2	4	0	3
a^3	1	3	0

$d_1(a^i,a^j)$	a^1	a^2	a^3
a^1	0	4	1
a^2	4	0	3
a^3	1	3	0

$d_c(a^i,a^j)$	a^1	a^2	a^3
a^1	0	1	0.29
a^2	1	0	1
a^3	0.29	1	0

Iz ovog primjera vidi se da kosinus-kvazimetrička funkcija puno bolje identificira sličnosti/različitosti tekstova obzirom na prisutnost/odsutnost riječi A,B,C,D,E (objasnite to na osnovi brojeva iz tablica!).

Literatura

[1] M. W. Berry, J. Kogan, *Text Mining. Applications and Theory*, Wiley, 2010.

[2] D. Blanuša, *Viša matematika I-1, I-2*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1965.

[3] T. S. Blyth, E. F, Robertson, *Basic Linear Algebra*, Springer-Verlag, London, 2002.

[4] L. Čaklović, *Zbirka zadataka iz linearne algebre*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[5] N. Elezović, A. Aglić, *Linearna algebra – zbirka zadataka*, Element, Zagreb, 2003.

[6] S. H. Friedberg, A. J. Insel, L. E. Spence, *Linear algebra*, Prentice Hall, New Jersey, 1997.

[7] K. Janich, *Linear Algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[8] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2000.

[9] S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

[10] S. Lipschutz, *Beginning Linear Algebra*, McGraw Hill, New York, 1997.

[11] S. Lipschutz, *3000 Solved Problems in Linear Algebra*, McGraw-Hill, New York, 1989.

[12] E. D. Nering, *Linear algebra and matrix theory*, John Wiley & Sons, New York, 1963.

[13] H. Neunzert, W. G. Eschmann, A. Blickensdörfer-Ehlers, *Analysis 2. Mit einer Einführung in die Vektor- und Matrizenrechnung*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[14] И. В. Проскуряков, *Problems in linear algebra*, Мир, Москва, 1978.

[15] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 1998, 2003.

[16] H. Zhang, Statistical Clustering Analysis: An Introduction, in S. Butenko, W. A. Chaovalitwongse, and P. M. Pardalos (eds.), *Clustering Challenges in Biological Networks*, World Scientific, 2009, pp 101–126