

1 Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$

Prirodni brojevi. S prirodnim brojevima $1, 2, 3, \dots$ upoznali smo se u ranom djetinjstvu. Skup svih prirodnih brojeva označavamo s $\mathbb{N}$. Zbroj, kao i umnožak dva prirodna broja opet je prirodan broj, tj. zbrajanje “+” i množenje “.” prirodnih brojeva su funkcije sa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ u $\mathbb{N}$; obično kažemo da se radi o algebarskim operacijama definiranim na $\mathbb{N}$.

Definicija 1 *Neka je S neprazan skup. Pod binarnom ili algebarskom operacijom na skupu S podrazumijevamo svaku funkciju $\circ : S \times S \rightarrow S$. Uređen par $(S, \circ)$ nepraznog skupa S i binarne operacije $\circ : S \times S \rightarrow S$ zovemo grupoid.*

Primjedba 1 *Binarnu operaciju označenu simbolom “+”, uobičajeno je zvati zbrajanje, a binarnu operaciju označenu sa “.” uobičajeno je zvati množenje.*

Primjer 1 $(\mathbb{N}, +)$ i $(\mathbb{N}, \cdot)$ su grupoidi.

Cijeli brojevi. Kao što znamo, razlika dvaju prirodnih brojeva ne mora biti prirodan broj. Zbog toga se uvode 0 (*nula*) i negativni prirodni brojevi: $-1, -2, -3, \dots$. Brojeve $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ nazivamo **cijelim brojevima**, a skup svih cijelih brojeva označavamo sa $\mathbb{Z}$, tj. $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Uočimo da su $(\mathbb{Z}, +)$ i $(\mathbb{Z}, \cdot)$ grupoidi, gdje su $+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $\cdot: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ uobičajeno zbrajanje, odnosno množenje cijelih brojeva.

Definicija 2 *Grupoid $(G, \circ)$ nazivamo grupom ako on ima svojstva (G1)–(G3):*

(G1) *Binarna operacija $\circ$ je asocijativna, tj.*

$$(\forall x, y, z \in G) \quad (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),$$

(G2) *U G postoji tzv. neutralni element e takav da je*

$$(\forall x \in G) \quad x \circ e = e \circ x = x,$$

(G3) *Za svaki $x \in S$ postoji element $x' \in G$, tzv. inverzni element od x takav da je*

$$x \circ x' = x' \circ x = e.$$

Za grupu $(G, \circ)$ kažemo da je komutativna ili Abelova¹ ako vrijedi zakon komutacije, tj.

(G4)
$$(\forall x, y \in G) \quad x \circ y = y \circ x.$$

¹Niels Henrik Abel (1802-1829) norveški matematičar. S 19 godina dokazao je da se opća jednačba stupnja većeg od 4 ne može riješiti algebarski. Umro je u siromaštvu u 26. godini života nekoliko dana prije nego što je stigla obavijest o prihvatanju njegove profesure u Berlinu.

Grupu $(G, \cdot)$ kojoj je grupna operacija označena pomoću znaka množenja nazivamo **multiplikativna grupa**. Njezin neutralni element uobičajeno je zvati **jedinica** i označavati s 1, te inverzni element od $a \in G$ pisati u obliku a^{-1} . Slično, grupu $(G, +)$ kojoj je grupna operacija označena simbolom “+” nazivamo **aditivnom grupom**. Njezin neutralni element uobičajeno je zvati **nula** i označavati s 0, a inverzni element od $a \in G$ označava se sa $-a$ i zove **suprotnim elementom**.

Primjer 2 $(\mathbb{Z}, +)$ je komutativna aditivna grupa. Njezin neutralni element je broj nula, a suprotni element od m je $-m$.

Primjer 3 Grupoid $(\mathbb{Z}, \cdot)$ je asocijativan, komutativan i njegov neutralni element je broj 1. Međutim $(\mathbb{Z}, \cdot)$ nije grupa, jer ni jedan $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ nema inverzni element, tj. jednačba $m \cdot x = 1$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$, nema rješenja u skupu $\mathbb{Z}$.

Zadatak 1 Zašto $(\mathbb{N}, +)$ nije grupa?

Zadatak 2 Za aditivnu grupu $(G, +)$ definira se binarna operacija $- : G \times G \rightarrow G$ koja uređenom paru $(x, y) \in G \times G$ pridružuje element $a - b := a + (-b)$ (oznaka “ $A := B$ ” znači da je A po definiciji jednako B). Ta binarna operacija zove se oduzimanje u G . Pokažite primjerom da oduzimanje cijelih brojeva (u grupi $(\mathbb{Z}, +)$) nije niti asocijativna niti komutativna operacija.

Racionalni brojevi. Kao što znamo, jednačba $ax = b$, $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{Z}$, nema uvijek rješenje u skupu $\mathbb{Z}$. Zbog toga se skup $\mathbb{Z}$ proširuje skupom racionalnih brojeva. Skup svih racionalnih brojeva označava se s $\mathbb{Q}$ i definira na sljedeći način: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. Cijeli broj m može se reprezentirati razlomkom $\frac{m}{1}$, pa racionalni brojevi sadrže cijele, a ovi prirodne brojeve, tj. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Racionalni brojevi se zbrajaju i množe prema formulama:

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} := \frac{m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2}, \quad \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} := \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}.$$

Primjedba 2 Primijetimo da je $(\mathbb{Q}, +)$ komutativna aditivna grupa, a $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ komutativna multiplikativna grupa.

Iracionalni brojevi. Jednostavni primjeri kao što je primjerice duljina dijagonale kvadrata $(\sqrt{2})$ stranice jedan govore nam da postoje brojevi koji nisu racionalni. To su **iracionalni brojevi**. Skup svih iracionalnih brojeva označavamo s $\mathbb{I}$.

Osim broja $\sqrt{2}$ dobro su nam poznati i iracionalni brojevi $\pi = 3.14159265\dots$ i $e = 2.718281828459\dots$

Realni brojevi. Racionalne i iracionalne brojeve nazivamo zajedno **realni brojevi** i označavamo s $\mathbb{R}$. Dakle, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Osim toga je $\mathbb{I} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ i $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Realne brojeve znamo zbrajati i množiti. Pri tome $(\mathbb{R}, +)$ je komutativna aditivna grupa. Množenje je asocijativno i komutativno na cijelom skupu $\mathbb{R}$. Pri tome je $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ komutativna multiplikativna grupa, dok $(\mathbb{R}, \cdot)$ nije jer 0 nema inverzni element ($0 \cdot x = 0 \neq 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$). Osim toga, množenje je distributivno u odnosu na zbrajanje:

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Definicija 3 Uređenu trojku $(S, +, \cdot)$ nepraznog skupa i binarnih operacija $+, \cdot : S \times S \rightarrow S$, takvu da je:

(P1) $(S, +)$ komutativna aditivna grupa,

(P2) množenje komutativno na S , a $(S \setminus \{0\}, \cdot)$ komutativna multiplikativna grupa i

(P3) množenje distributivno u odnosu na zbrajanje, tj.

$$(\forall x, y, z \in S) \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$$

zovemo polje.

Zadatak 3 Provjerite da je $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ polje, te da $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nisu polja.

1.1 Intervali

Često upotrebljavani skupovi u matematičkoj analizi jesu intervali. To su skupovi realnih brojeva koji imaju svojstvo da njihovi elementi zadovoljavaju određene nejednakosti.

Otvoreni interval realnih brojeva (a, b) , određen s dva realna broja a, b , $a < b$, je skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $a < x < b$, tj.

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Zatvoreni interval ili **segment** realnih brojeva $[a, b]$, određen s dva realna broja a, b , $a \leq b$, je skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $a \leq x \leq b$, tj.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

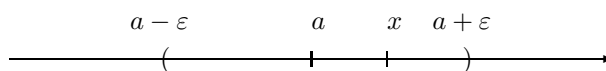
Pored otvorenih i zatvorenih intervala definiraju se **poluotvoreni intervali**

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\},$$

i **beskonačni intervali**

$$\begin{aligned} (-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}, & (-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}, \\ (a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}, & [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}. \end{aligned}$$

Otvorenom okolinom realnog broja a nazivamo svaki otvoreni interval realnih brojeva koji sadrži broj a . **Simetrična otvorena okolina** realnog broja a je otvoreni interval kome je a sredina (Slika U.3). Sve simetrične okoline broja a su oblika $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, i nazivamo ih **ε -okolinom** broja a . Duljina ε -okoline je 2ε . Zamijetite da realan broj x pripada ε -okolini broja a onda i samo onda ako je $|x - a| < \varepsilon$.



Slika U.3.

1.2 Supremum i infimum

Definicija 4 Kažemo da je skup $S \subseteq \mathbb{R}$ je odozgo omeđen ili ograničen, ako postoji realan broj M takav da je $x \leq M$ za svaki $x \in S$. Svaki broj M s navedenim svojstvom nazivamo majoranta ili gornja međa skupa S . Ako skup S nije odozgo omeđen kažemo da je odozgo neomeđen.

Kažemo da je skup $S \subseteq \mathbb{R}$ je odozdo omeđen ili ograničen, ako postoji realan broj m takav da je $x \geq m$ za svaki $x \in S$. Svaki broj m s navedenim svojstvom nazivamo minoranta ili donja međa skupa S . Ako skup S nije odozdo omeđen kažemo da je odozdo neomeđen.

Skup $S \subseteq \mathbb{R}$ je omeđen, ako je i odozgo i odozdo omeđen. U protivnom se kaže da je S neomeđen.

Primjer 4 Skup $\mathbb{N}$ svih prirodnih brojeva nije odozgo omeđen jer za svaki realan broj M postoji prirodan broj veći od M . Skup $\mathbb{N}$ je omeđen odozdo; za minorantu je dovoljno uzeti bilo koji realan broj manji ili jednak jedan.

Primjer 5 Skupovi (a, b) , $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ su omeđeni. Skupovi $(-\infty, a)$ $(-\infty, a]$ su omeđeni samo odozgo, dok su skupovi (a, ∞) , $[a, \infty)$ omeđeni samo odozdo.

Primjer 6 Skup $S = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ je omeđen i odozdo (primjerice s 0) i odozgo (primjerice s 1). Skup $B = \left\{ \frac{1}{x^2+1} : x \in \mathbb{R} \right\}$ također je omeđen i odozdo (primjerice s 0) i odozgo (primjerice s 1).

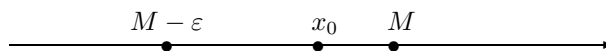
Svaki odozgo omeđen skup S ima više majoranti, pa se postavlja pitanje pronalaženja najmanje majorante skupa S . Analogno se može postaviti i pitanje pronalaženja najveće minorante odozdo omeđenog skupa.

Definicija 5 Najmanju majorantu skupa S nazivamo supremum i označavamo sa $\sup S$. Ako je $\sup S \in S$, nazivamo ga maksimalnim elementom skupa S i označavamo s $\max S$.

Najveću minorantu skupa S nazivamo infimum i označavamo s $\inf S$. Ako je $\inf S \in S$, nazivamo ga minimalnim elementom skupa S i označavamo s $\min S$.

Primjedba 3 Primijetimo:

- (i) Svaki odozgo omeđen skup $S \subset \mathbb{R}$ ima supremum, a svaki odozdo omeđen skup $S \subset \mathbb{R}$ ima infimum.
- (ii) M je supremum skupa S onda i samo onda ako je M majoranta od S i ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x_0 \in S$ takav da je $M - \varepsilon < x_0 \leq M$,
- (iii) m je infimum skupa S onda i samo onda ako je m minoranta od S i ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x_0 \in S$ takav da je $m + \varepsilon > x_0 \geq m$.



Slika U.4.

Primjer 7 $\sup(a, b) = b \notin (a, b)$, $\inf(a, b) = a \notin (a, b)$, $\sup[a, b] = b = \max[a, b]$, $\inf[a, b] = a = \min[a, b]$.

Iz prethodnog primjera se vidi da $\sup S$ i $\inf S$ mogu ali ne moraju pripadati skupu S .

Primjer 8 Skup S iz Primjera 6 je omeđen i $\inf S = \frac{1}{2}$, $\sup S = 1$. Kako je $\frac{1}{2} \in S$, onda je $\frac{1}{2}$ ujedno i minimalni element skupa S . Skup S nema maksimalni element. Načinite sličnu analizu skupa B iz istog primjera.

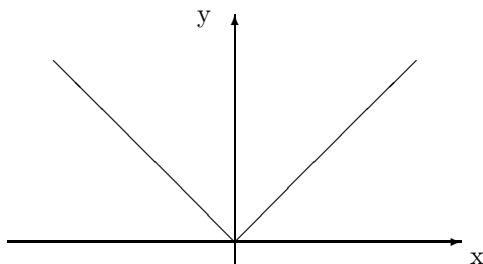
Zadatak 4 Pokažite da je:

- | | |
|--|---|
| a) $\max\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$ | b) $\inf\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = 0 \notin \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ |
| c) $\max\{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\} = 1$ | d) $\min\{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\} = -1$ |
| e) $\max\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\} = \sqrt{2}$ | f) $\min\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\} = -\sqrt{2}$. |

2 Apsolutna vrijednost realnog broja

Za svaki realan broj $x \in \mathbb{R}$ definira se **apsolutna vrijednost** $|x|$ broja x formulom:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Slika U.5: Graf funkcije $x \mapsto |x|$

Primjedba 4 Geometrijski, $|x|$ znači udaljenost točke na brojevnom pravcu, koja predstavlja realan broj x , od ishodišta.

Iz definicije apsolutne vrijednosti vidi se da je $|-x| = |x|$ i $x \leq |x|$. Nadalje, uočimo da je $|x| = \sqrt{x^2}$.

Pomoću jednakosti $|x| = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, lako je provjeriti sljedeća svojstva apsolutne vrijednosti:

- | | |
|---|---|
| 1) $ xy = x y $ | 2) $\left \frac{x}{y}\right = \frac{ x }{ y }$ |
| 3) $ x + y \leq x + y $ | 4) $ x - y \leq x + y $ |
| 5) $ x \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, a > 0$ | 6) $ x - y \leq x - y $. |

Ilustracije radi, pokažimo treće svojstvo apsolutne vrijednosti, koje je poznato pod nazivom **nejednakost trokuta**:

$$\begin{aligned} |x + y| &= \sqrt{(x + y)^2} = \sqrt{x^2 + 2xy + y^2} \leq \sqrt{x^2 + 2|x||y| + y^2} = \sqrt{(|x| + |y|)^2} \\ &= |x| + |y|. \end{aligned}$$

Zadatak 5 Dokažite preostala svojstva apsolutne vrijednosti.

Primjer 9 Riješimo jednadžbu $|3x - 1| = 2x + 5$.

$$\begin{aligned} a) \text{ za } 3x - 1 \geq 0 \text{ vrijedi} \\ 3x - 1 = 2x + 5 \\ x = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \text{ za } 3x - 1 < 0 \text{ vrijedi} \\ 1 - 3x = 2x + 5 \\ x = -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Primjer 10 Riješimo nejednadžbu $|3x - 1| < 2x + 5$.

Zamijetite da mora biti $2x + 5 > 0$. Pomoću svojstva 5 dobivamo

$$|3x - 1| < 2x + 5 \Leftrightarrow -2x - 5 < 3x - 1 < 2x + 5 \Leftrightarrow -4 < 5x \text{ i } x < 6 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{4}{5}, 6\right).$$

Zadatak 6 Riješite jednadžbe i nejednadžbe:

$$\begin{aligned} a) |x + 1| &= 3x - 9 & b) |x - 1| &= 3x - 9 \\ c) |3x + 1| &< 2x + 5 & d) |3x + 1| &> 2x + 5. \end{aligned}$$

Zadatak 7 Pokažite da vrijedi:

$$\begin{aligned} a) x \in [2, 4] &\Rightarrow 2x + 3 \in [7, 11] & b) x \in [2, 4] &\Rightarrow \frac{1}{2x+3} \in [1/11, 1/7] \\ c) x - 5 \in [-2, 2] &\Rightarrow x \in [3, 7] & d) x \in [x_0 - a, x_0 + a] &\Leftrightarrow |x - x_0| \leq a \\ e) |x - 3| < 1 &\Rightarrow 6 < x + 4 < 8 & f) |x - 3| < 1 &\Rightarrow 1/8 < 1/(x + 4) < 1/6 \\ g) |x - 1| < 2 &\Rightarrow 0 < |2x - 3| < 5 & h) |x - 1| < 1 &\Rightarrow x \in (-1, 3). \end{aligned}$$

Greške. Pri mjerenju neke veličine dolazi do pogrešaka zbog nesavršenosti mjernih instrumenata i naših osjetila.

Neka je a stvarna (prava) vrijednost neke veličine, a a^* njezina aproksimacija (približna vrijednost). Razliku $(a - a^*)$ nazivamo **greška aproksimacije**. Apsolutnu vrijednost greške aproksimacije nazivamo **apsolutna greška aproksimacije** i označavamo s

$$\Delta a^* = |a - a^*|.$$

Primjer 11 $a^* = 1.412$ je aproksimacija broja $a = \sqrt{2}$ s apsolutnom greškom aproksimacije $\Delta a^* = |\sqrt{2} - 1.412| < 0.00222$.

Ako je $|a - a^*| \leq \varepsilon$, onda vrijedi:

$$-\varepsilon \leq a - a^* \leq \varepsilon \Rightarrow a^* - \varepsilon \leq a \leq a^* + \varepsilon,$$

pa često pišemo $a = a^* \pm \varepsilon$.

Omjer između apsolutne greške Δa^* i apsolutne vrijednosti $|a^*|$ aproksimacije a^* ($a^* \neq 0$) nazivamo **relativna greška aproksimacije** i označavamo s δa^* , tj.

$$\delta a^* = \frac{\Delta a^*}{|a^*|}.$$

Ako relativnu grešku pomnožimo sa 100 dobivamo relativnu grešku u postocima.

Primjer 12 Relativna greška u prethodnom primjeru iznosi $\delta a^* \approx 0.002$ odnosno 0.2%.

Sve znamenke nekog aproksimativnog broja obično nisu pouzdane — ne možemo sa sigurnošću s njima računati. Zato navodimo sljedeću definiciju (detaljnije vidi u [12]):

Signifikantne znamenke nekog broja su one znamenke koje su različite od 0, ili su 0, ali se nalaze između znamenki različitih od 0.

Kažemo da su prvih n signifikantnih znamenki aproksimativnog broja a^* korektne ako vrijedi

$$\Delta a^* \leq \frac{1}{2} 10^{m-n+1},$$

gdje je m mjesto prve signifikantne znamenke broja a^* .

U Primjeru 11 prve tri znamenke su korektne jer je

$$\Delta a^* \leq 0.00222 < \frac{1}{2} 10^{-2} = \frac{1}{2} 10^{0-3+1}.$$

3 Matematička indukcija

Talijanski matematičar G. Peano (1858 – 1931) izložio je 1889. godine sustav aksioma koji u cijelosti karakterizira i omogućava aksiomatsku izgradnju algebre skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$. Mi navodimo samo jedan aksiom, poznat pod nazivom **princip matematičke** ili **potpune indukcije**:

Neka $M \subseteq \mathbb{N}$ podskup od $\mathbb{N}$ s ova dva svojstva:

- (i) $1 \in M$
- (ii) $(\forall n \in \mathbb{N}) n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$.

Tada je $M = \mathbb{N}$.

U primjenama, kada želimo dokazati da neka tvrdnja T_n koja ovisi o $n \in \mathbb{N}$ vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$, s M označimo skup svih prirodnih brojeva n za koje vrijedi tvrdnja T_n . Zatim napravimo sljedeća tri koraka:

- 1° **baza indukcije** ($n = 1$): Pokažemo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$,
- 2° **induktivna pretpostavka** ($n = k$): Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za prirodan broj k ,
- 3° **korak indukcije** ($n = k + 1$): Koristeći induktivnu pretpostavku pokažemo da tvrdnja vrijedi i za prirodan broj $k + 1$.

Tada prema principu matematičke indukcije zaključujemo da je $M = \mathbb{N}$, tj. da tvrdnja T_n vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Primjer 13 Pokažimo matematičkom indukcijom da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi formula:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1° ($n = 1$): Budući da je $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, formula vrijedi za $n = 1$.

2° ($n = k$): Pretpostavimo da je $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

U trećem koraku treba pokazati da formula vrijedi i za prirodan broj $k + 1$, tj. da je $1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$.

$\mathcal{J}^\circ$ ($n = k + 1$): Pomoću induktivne pretpostavke dobivamo

$$(1 + 2 + \cdots + k) + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1]}{2}.$$

Dakle, prema principu matematičke indukcije formula vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Primjer 14 Dokažimo da za svaki realan broj $x > -1$ i za svaki prirodni broj n vrijedi **Bernoullijeva nejednakost**:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

I° ($n = 1$): Kako je $(1 + x)^1 = 1 + x$, nejednakost vrijedi za $n = 1$.

$\mathcal{J}^\circ$ ($n = k$): Neka je $(1 + x)^k \geq 1 + kx$.

$\mathcal{J}^\circ$ ($n = k + 1$): Množenjem induktivne pretpostavke s brojem $1 + x > 0$ dobivamo

$$(1 + x)^{k+1} \geq (1 + kx)(1 + x) = 1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x.$$

Dakle, principom matematičke indukcije dokazana je Bernoullijeva nejednakost.

Primjedba 5 Često je potrebno pokazati da tvrdnja T_n vrijedi, ne za svaki prirodni broj n , već za sve cijele brojeve n koji su veći ili jednaki od nekog cijelog broja n_0 . U tu svrhu, bazu indukcije ($n = 1$) treba zamijeniti s novom bazom ($n = n_0$), tj. u prvom koraku umjesto za $n = 1$ treba pokazati da tvrdnja vrijedi za $n = n_0$.

Zadatak 8 Pokažite da za sve $x > -1$, $x \neq 0$ i za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, vrijedi stroga Bernoullijeva nejednakost.

Zadatak 9 Pokažite metodom matematičke indukcije da su sljedeće tvrdnje točne za svaki prirodni broj n :

- $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$,
- $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$,
- $1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1)$,
- $3 + 4 + 5 + \cdots + (n + 2) = \frac{1}{2}n(n + 5)$,
- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$,
- $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$,
- $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \cdots + (2n - 1)(2n) = \frac{1}{3}n(n + 1)(4n - 1)$,
- $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, $x \neq 1$,
- $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$,
- $n! \geq 2^{n-1}$, gdje je $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n - 1) \cdot n$ (Funkciju $n \mapsto n!$ čitamo en - faktorijela).

Zadatak 10 Pokažite da se za tvrdnju

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n + 2$$

može dokazati korak indukcije. Unatoč tome, ova tvrdnja nije istinita niti za jedan $n \in \mathbb{N}$ (vidi Zadatak 9). Ovaj primjer pokazuje da dokaz samo koraka indukcije nije dovoljan za dokaz tvrdnje.

4 Kompleksni brojevi

Mnogi matematički problemi, kao primjerice jednačba $x^2 + 1 = 0$, nemaju rješenje u polju realnih brojeva $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Zbog toga se javlja potreba za njegovim proširenjem do novog polja $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ – **polja kompleksnih brojeva** u kojem će svaka jednačba oblika

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

gdje su $a_n, \dots, a_1, a_0$ bilo koji realni brojevi, imati rješenje.

Primjedba 6 *Potrebu za proširenjem polja realnih brojeva među prvima je uočio talijanski matematičar G. Cardano (1501–1576). On je rješavajući jedan geometrijski problem dobio jednakost*

$$(5 + \sqrt{-15}) \cdot (5 - \sqrt{-15}) = 40$$

iz koje se vidi da je produkt “nerealnih brojeva” realan broj.

Algebarski oblik kompleksnog broja je

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

gdje je $i = \sqrt{-1}$ imaginarna jedinica, broj a zovemo **realni dio** i označavamo s $\operatorname{Re} z$, a broj b zovemo **imaginarni dio** kompleksnog broja $z = a + bi$ i označavamo s $\operatorname{Im} z$.

Primjer 15 $z = 2 - 4i$, $\operatorname{Re} z = 2$, $\operatorname{Im} z = -4$;
 $z = -\sqrt{2} + 4i$, $\operatorname{Re} z = -\sqrt{2}$, $\operatorname{Im} z = 4$.

Primjedba 7 *Treba primijetiti da su dva kompleksna broja $z = a + bi$, $w = c + di$ jednaka onda i samo onda ako je $a = c$ & $b = d$, tj. ako su im jednaki i realni i imaginarni dijelovi.*

U skladu s navedenim dogovorom, definicije zbrajanja (??) i množenja (??) kompleksnih brojeva možemo zapisati u obliku:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Nemojte memorirati pravilo za množenje, već zamijetite da se dva kompleksna broja množe kao dva binoma (“svaki sa svakim”), imajući na umu da je $i^2 = -1$.

Primjer 16 *Izvršimo naznačene operacije:* a) $(2 + 3i) + (4 - 5i)$, b) $(2 + 3i)(3 - 2i)$.

$$a) (2 + 3i) + (4 - 5i) = (2 + 4) + (3 - 5)i = 6 - 2i$$

$$b) (2 + 3i)(3 - 2i) = (2 \cdot 3 - 3 \cdot (-2)) + (2 \cdot (-2) + 3 \cdot (3))i = 12 + 5i.$$

Primjer 17 *U ovom primjeru želimo ukazati na čestu grešku. Naime, formula $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ koja vrijedi za realne brojeve $a \geq 0$ i $b \geq 0$ nije točna kada su oba broja (a i b) negativna. Evo primjera:*

$$\text{Pravilno:} \quad \sqrt{-4}\sqrt{-4} = 2i2i = 4i^2 = 4(-1) = -4,$$

$$\text{Nepravilno:} \quad \sqrt{-4}\sqrt{-4} = \sqrt{(-4)(-4)} = \sqrt{16} = 4,$$

Pri tome kod računanja korijena uvijek smo uzeli predznak "+".

Zadatak 11 Odredite realan i imaginaran dio kompleksnog broja:

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| a) $z = (3 + 2i) + (-5 + 4i)$ | b) $z = (8 - 5i) + (2 - 3i)$ |
| c) $z = (-4 + 5i) - (2 - i)$ | d) $z = -(5 - 3i) - (-3 - 4i)$ |
| e) $z = (4 + 3i)(-1 + 2i)$ | f) $z = (5 - 3i)(3 + 4i)$ |
| g) $z = (-3i)(5i)$ | h) $z = (1 - i)(1 + i)$ |
| i) $z = i^{42}$ | j) $z = i^{23}$ |
| k) $z = i^{157}$ | l) $z = (-i)^{50}$ |
| m) $z = \sqrt{12} + \sqrt{-50}$ | n) $z = \sqrt{-3}\sqrt{-6}$. |

Kompleksno-konjugiran broj kompleksnog broja $z = a + bi$ je $\bar{z} = a - bi$ (čitaj: *ze potez* ili *ze nadvučeno*).

Primjer 18 $z = 2 + \sqrt{5}i$, $\bar{z} = 2 - \sqrt{5}i$;
 $z = -2 - \sqrt{5}i$, $\bar{z} = -2 + \sqrt{5}i$.

Primjer 19 Produkt kompleksnog broja $z = a + bi$ s njemu kompleksno konjugiranim brojem $\bar{z} = a - bi$ je realan broj:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2.$$

Zadatak 12 Pokažite da za sve $z, w \in \mathbb{C}$ vrijedi:

- $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$,
- $\bar{\bar{z}} = z$,
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$, $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$,
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
- $z\bar{w} + \bar{z}w = 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$.

Vrijede li jednakosti: $\operatorname{Re}(z \cdot w) = \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Re} w$, $\operatorname{Im}(z \cdot w) = \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w$?

Realan broj $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ nazivamo **modul**, **norma** ili **apsolutna vrijednost** kompleksnog broja $z = a + bi$ (vidi *Sliku U.7*). Primijetite da je $|z|^2 = z\bar{z}$.

Primjer 20 Odredimo one kompleksne brojeve z za koje je $|z| + z = 2 + i$.

Potražimo rješenja u obliku $z = a + bi$. Tada zadana jednadžba glasi $\sqrt{a^2 + b^2} + a + bi = 2 + i$, odakle prema definiciji jednakosti kompleksnih brojeva dobivamo: $\sqrt{a^2 + b^2} + a = 2$ i $b = 1$. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu $b = 1$ dobivamo $\sqrt{a^2 + 1} + a = 2$, odakle je $a = \frac{3}{4}$, tj. $z = \frac{3}{4} + i$.

Zadatak 13 Pokažite da za sve $z, w \in \mathbb{C}$ vrijedi:

- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, $w \neq 0$,
- $-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$, $-|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|$,
- $|z + w| \leq |z| + |w|$, $|z - w| \leq |z| + |w|$,
- $||z| - |w|| \leq |z - w|$,

$$e) |z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}).$$

Dijeljenje kompleksnih brojeva definira se formulom

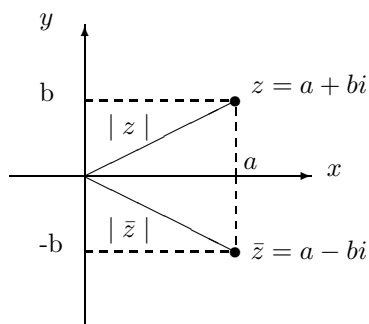
$$\frac{w}{z} := w \cdot z^{-1},$$

gdje je z^{-1} inverzni element kompleksnog broja $z = a + bi$ ($z \neq 0$). Kako je (provjerite) $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i = \bar{z}/(z \cdot \bar{z})$, to je $\frac{w}{z} = w \cdot \bar{z}/(z \cdot \bar{z})$. Dakle, da bi se našao kvocijent $\frac{w}{z}$, dovoljno je pomnožiti brojnik i nazivnik sa $\bar{z}$.

Primjer 21 Zapišimo u algebarskom obliku kompleksne brojeve: a) $\frac{1}{1+i}$, b) $\frac{3+2i}{5-i}$;

$$a) \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i} \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, \quad b) \frac{3+2i}{5-i} = \frac{3+2i}{5-i} \frac{5+i}{5+i} = \frac{15+3i+10i+2i^2}{25+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Svakom kompleksnom broju $z = a + bi$ odgovara jedinstvena točka (a, b) ravnine i obrnuto svakoj točki (a, b) ravnine odgovara jedinstveni kompleksan broj $z = a + bi$. Ravninu u kojoj se svakom kompleksnom broju pridružuje točka nazivamo **Gaussova** ili **kompleksna ravnina** (Slika U.7).



Slika U.7.

Brojevi z i $\bar{z}$ simetrično su smješteni u odnosu na realnu os.

Primjer 22 Odrediti skup točaka (x, y) ravnine koje zadovoljavaju jednadžbu $yi + (5i - x^2)i + 5 = 0$.

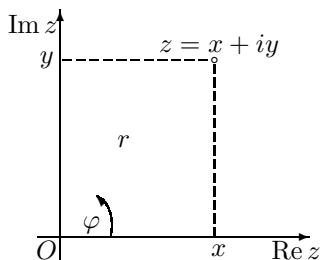
Jednadžbu možemo zapisati u ekvivalentnom obliku $(y - x^2)i = 0$, odakle je $y = x^2$. Dakle, traženi skup točaka je parabola s jednadžbom $y = x^2$.

Zadatak 14 Skicirajte dio ravnine za koji vrijedi:

$$a) |z - 1 - i| \leq 2 \ \& \ |z - 1| < 1, \quad b) |z + 1| = |z - 1|, \quad c) |z + 2| < |z + 4|.$$

4.1 Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Sa *Slike U.8* vidimo da je $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, gdje je $r = |z|$, a φ kut što ga spojnica od ishodišta O do točke (x, y) u Gaussovoj ravnini zatvara s pozitivnim smjerom realne osi.



Slika U.8.

Prema tome, kompleksan broj $z = x + iy$ možemo zapisati u tzv. **trigonometrijskom obliku**:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Kut φ zovemo **argument kompleksnog broja** z i označavamo ga s $\arg z$.

Primijetite da je parom (r, φ) potpuno određen kompleksan broj, kao što je to ranije u algebarskom obliku bilo određeno parom (x, y) . Primijetite također da je argument φ kompleksnog broja z određen do na $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, jer su funkcije $\sin$ i $\cos$ periodične s temeljnim periodom 2π .

Primjer 23 *Provjerite da vrijedi:*

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad 1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right), \quad \sqrt{3} - i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

Jednakost kompleksnih brojeva zapisanih u trigonometrijskom obliku opisana je sljedećim teoremom.

Teorem 1 *Dva kompleksna broja z_1, z_2 , zadana u trigonometrijskom obliku*

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

jednaka su onda i samo onda ako je

$$r_1 = r_2 \quad \& \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi,$$

gdje je k neki cijeli broj.

Pomoću dobro poznatih adicijskih formula iz trigonometrije:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_1 \pm \varphi_2) &= \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \mp \sin \varphi_1 \sin \varphi_2, \\ \sin(\varphi_1 \pm \varphi_2) &= \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \pm \cos \varphi_1 \sin \varphi_2, \end{aligned}$$

lako je provjeriti pravila za množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva zadanih u trigonometrijskom obliku, dana ovim teoremom (vidi i *Sliku U.9*)

Teorem 2 Neka je

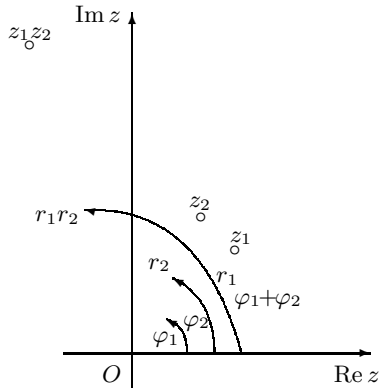
$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Tada vrijedi:

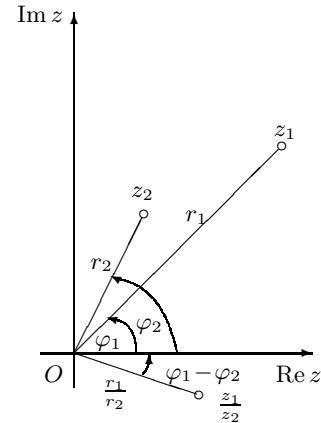
$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \quad z_2 \neq 0.$$

a) Množenje



b) Dijeljenje



Slika U.9.

Koristeći se metodom matematičke indukcije lako je dokazati sljedeći korolar.

Korolar 1 Neka je $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Specijalno za $r = 1$ vrijedi **Moivreova formula**:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Primjer 24 Odredimo trigonometrijski oblik kompleksnog broja $z = \frac{(1+i)^6}{(\sqrt{3}+i)^5}$.

Kako je (vidi Primjer 23) $1+i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$, $\sqrt{3}+i = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$, potenciranjem dobivamo:

$$(1+i)^6 = 2^3 (\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}), \quad (\sqrt{3}+i)^5 = 2^5 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right).$$

Koristeći Teorem 2 dobivamo:

$$z = \frac{2^3}{2^5} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} \right) \right) = \frac{1}{4} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

Zadatak 15 Matematičkom indukcijom pokažite da za kompleksan broj $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $r \neq 0$, vrijedi formula

$$z^{-n} = r^{-n} (\cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi)), \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Definicija 6 Za kompleksan broj z kažemo da je n -ti korijen iz kompleksnog broja w ako je $z^n = w$.

Primjer 25 Ako u Moivreovu formulu stavimo $\varphi = \frac{2\pi}{n}$, dobit ćemo jednakost

$$\left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^n = (\cos 2\pi + i \sin 2\pi)$$

ili

$$\left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^n = 1,$$

jer je $\cos 2\pi = 1$, $\sin 2\pi = 0$. Prema tome, kompleksan broj $z = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ je n -ti korijen iz jedinice.

Tada je i svaki od brojeva $z^0, z^1, z^2, \dots, z^{n-1}$, tj. brojeva

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

također n -ti korijen iz jedinice.

Sljedeći teorem govori nam da kompleksan broj $w \neq 0$ ima točno n različitih n -tih korijena.

Teorem 3 (Moivreov teorem) Neka je $w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $r \neq 0$, kompleksan broj zapisan u trigonometrijskom obliku. Tada jednačba $z^n = w$, $n \in \mathbb{N}$, ima točno n različitih rješenja

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Dokaz. Neka je $z = \varrho(\cos \psi + i \sin \psi)$. Da bi bilo $[\varrho(\cos \psi + i \sin \psi)]^n = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, tj. $\varrho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ mora biti $\varrho^n = r$ & $n\psi = \varphi + 2k\pi$, odnosno

$$\varrho = \sqrt[n]{r} \quad \& \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

gdje je k bilo koji cijeli broj. Prema tome, rješenja jednačbe $z^n = w$ glase

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Sada pokažimo da postoji točno n različitih rješenja. Svaki cijeli broj k možemo zapisati u obliku $k = nq + s$, gdje je $0 \leq s < n$. Kako je $\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\varphi + 2(nq+s)\pi}{n} = \frac{\varphi + 2s\pi}{n} + 2q\pi$, a funkcije $\sin$ i $\cos$ periodične s temeljnim periodom 2π , zaključujemo da je $z_k = z_s$. To znači da imamo točno n različitih rješenja koja dobivamo za $k = s = 0, 1, \dots, n-1$. □

Primijetimo da argumenti korijena

$$\frac{\varphi}{n}, \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \frac{\varphi + 4\pi}{n}, \dots, \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}$$

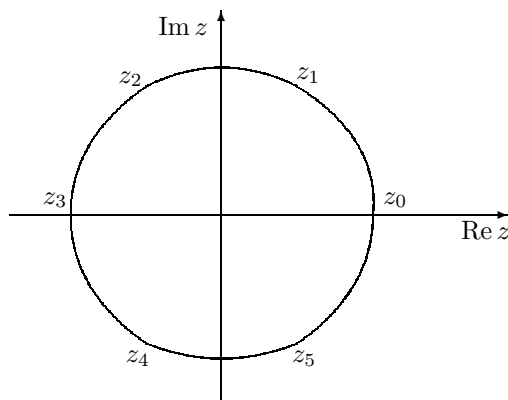
čine aritmetički niz s diferencijom $\frac{2\pi}{n}$ i da je modul svakog korijena jednak $\sqrt[n]{r}$. To znači da korijeni $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ čine vrhove pravilnog n -terokuta upisanog u kružnicu sa središtem u ishodištu i radijusa $\sqrt[n]{r}$.

Primjer 26 Odredimo sve 6-te korijene kompleksnog broja $w = 1$.

Traženi korijeni su

$$z_k = \sqrt[6]{1} \left(\cos \frac{0 + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{6} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Lako se može pokazati da su to brojevi $z_0 = 1$, $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = -1$, $z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (vidi Sliku U.10).



Slika U.10

Zadatak 16 Izračunajte sve 4-te korijene kompleksnog broja $w = -16$.

Zadatak 17 Riješite jednadžbe u skupu $\mathbb{C}$:

a) $z^3 = 1 - i$,

b) $z^2 + (3 - i)z + 2 - i = 0$,

c) $z^2 - 2iz - 1 - 8i = 0$.

Literatura

- [1] A. F. BERMANT, I. G. ARAMANOVIĆ *Kratki kurs matematičkog analiza*, Nauka, Moskva, 1967.
- [2] K. BURG, H. HAF, F. WILLE *Höhere Mathematik für Ingenieure*, Teubner, Stuttgart, 19992.
- [3] M. CRNJAC, D. JUKIĆ, R. SCITOVSKI, *Matematika*, Ekonomski fakultet, Osijek, 1994.
- [4] J. B. FRALEIGH, *Calculus*, 2nd edition, Wesley, Reading, 1985.
- [5] R. GALIĆ, *Uvod u linearnu algebru*, Elektrotehnički fakultet, Osijek, 1995.
- [6] L. J. GOLDSTEIN, *Calculus and its Applications*, 3rd edition, Prentice-Hall, N. J., 1977.
- [7] D. JUKIĆ, *Linearna algebra*, Ekonomski fakultet, Osijek, 1992.
- [8] D. JUKIĆ, *The matrix of a linear operator in a pair of ordered bases*, Mathematical Communications **2**(1977), 77 – 82.
- [9] S. KUREPA, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1978.

- [10] S. KUREPA, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Liber, Zagreb, 1979.
- [11] H. NEUNZERT, W. G. ESCHMANN, A. BLICKENDÖRFER-EHLERS, K. SCHELKES, *Analysis 1, 2*, Springer-Verlag, Berlin, 1996
- [12] R. SCITOVSKI, R. GALIĆ, M. BENŠIĆ, *Numerička analiza. Vjerojatnost i statistika*, Elektrotehnički fakultet, Osijek, 1993.
- [13] M. STECHER, *Linear Algebra*, Harper & Row, Publishers, New York, 1988.
- [14] J. A. THORPE, P. G. KUMPEL, *Elementary Linear Algebra*, CBS College Publishing, Philadelphia, 1984.
- [15] Š. UNGAR, *Matematička analiza 3*, Matematički odjel PMF-a, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1994.
- [16] S. WOLFRAM, *The Mathematica Book – 3rd ed.*, Wolfram Media, Inc., Champaign, 1998.