

Pismeni dio ispita iz Matematike I

I. Za kompleksan broj z definirajte njegov realan i imaginaran dio te njegov modul. Kako se definira imaginarna jedinica i i koliko iznosi i^{50} ?

$$[i^{50} = -1]$$

II. a) Definirajte niz realnih brojeva.

b) Kada je niz konvergentan? Navedite primjer konvergentnog niza.

[npr. niz u 3.zadatku je konvergentan]

III. Definirajte neprekidnost funkcije $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in (a, b)$.

[ako postoji limes funkcije f u točki x_0 i on je jednak $f(x_0)$]

IV. Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dva puta derivabilna funkcija na (a, b) . Kada je neka točka $x_0 \in (a, b)$ lokalni minimum funkcije f ?

$$[f'(x_0) = 0 \text{ i } f''(x_0) > 0]$$

V. Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dva puta derivabilna funkcija na (a, b) . Kada je f konveksna, a kada konkavna na (a, b) ?

$$[\text{konveksna: } f''(x) > 0, \text{ konkavna: } f''(x) < 0 \text{ za svaki } x \in (a, b)]$$

Zadatak 1 U Gaussovoj ravnini skicirajte skup $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3i| < |z - 2| \text{ i } |z - 3 - 2i| \leq 2\}$.

[Presjek poluravnine $y > 2/3x + 5/6$ i kruga $k((3, 2), 2)$]

Zadatak 2 Odredite limes niza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{3n+5}{3n+6} \right)^{2n+3} + \frac{\sqrt[3]{n + \sqrt[3]{n + \sqrt[3]{n}}}}{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}} \right].$$

$$[e^{-2/3}]$$

Zadatak 3 Ispitajte neprekidnost funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadane na sljedeći način:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}, & x < 0; \\ x^{\sin x}, & 0 \leq x \leq 2\pi; \\ 1, & x > 2\pi. \end{cases}$$

[Funkcija je neprekidna svuda osim u 0.]

Zadatak 4 Tvornici konzerva potrebne su valjkaste limenke od 1L. Kakve dimenzije (polumjer i visina) treba imati konzerva da se za njezinu izradu potroši najmanje lima?

(Volumen valjka: $V = r^2\pi h$, oplošje valjka: $O = 2r^2\pi + 2r\pi h$)

$$[r_{\min} = \sqrt[3]{1/2\pi}; h_{\min} = 1/(r_{\min}^2\pi)]$$

Zadatak 5 Odredite tok funkcije $f(x) = xe^{-x^2/2}$.

Pismeni dio ispita iz Matematike I

I. Za kompleksan broj z definirajte njegov realan i imaginaran dio te njegov modul. Kako se definira imaginarna jedinica i i koliko iznosi i^{31} ?

$$[i^{31} = -i]$$

II. a) Definirajte niz realnih brojeva.

b) Kada niz divergira ka $+\infty$? Navedite primjer takvog niza.

$$[\text{npr. } a_n = n^2]$$

III. Definirajte neprekidnost funkcije $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in (a, b)$.

[ako postoji limes funkcije f u točki x_0 i on je jednak $f(x_0)$]

IV. Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dva puta derivabilna funkcija na (a, b) . Kada je neka točka $x_0 \in (a, b)$ lokalni maksimum funkcije f ?

$$[f'(x_0) = 0 \text{ i } f''(x_0) < 0]$$

V. Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dva puta derivabilna funkcija na (a, b) . Za koju točku $x_0 \in (a, b)$ kažemo da je stacionarna, a za koju da je točka infleksije funkcije f ?

[stacionarna točka: $f'(x_0) = 0$, točka infleksije: f' ima strogi lokalni ekstrem u x_0]

Zadatak 1 U Gaussovoj ravnini skicirajte skup $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| \leq |z - 3| \text{ i } |z - 2 - 3i| < 2\}$.

[Presjek poluravnine $y \geq 3/2x - 5/4$ i kruga $k((-2, 3), 2)$]

Zadatak 2 Odredite limes niza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2n+3}{2n+6} \right)^{2n-1} + \frac{\sqrt[4]{n + \sqrt[4]{n + \sqrt[4]{n-2}}}}{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n+1}}}} \right].$$

$$[e^{-3}]$$

Zadatak 3 Ispitajte neprekidnost funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadane na sljedeći način:

$$f(x) = \begin{cases} 3^{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}, & x < 0; \\ x^{\sin x}, & 0 \leq x \leq 2\pi; \\ 2, & x > 2\pi. \end{cases}$$

[Funkcija je neprekidna svuda osim u 0 i 2π .]

Zadatak 4 Tvornici konzerva potrebne su valjkaste limenke od $2L$. Kakve dimenzije (polumjer i visina) treba imati konzerva da se za njezinu izradu potroši najmanje lima?

(Volumen valjka: $V = r^2\pi h$, oplošje valjka: $O = 2r^2\pi + 2r\pi h$)

$$[r_{\min} = \sqrt[3]{1/\pi}; h_{\min} = 1/(r_{\min}^2\pi)]$$

Zadatak 5 Odredite tok funkcije $f(x) = xe^{-x^2/4}$.