

Pismeni dio ispita iz Matematike I
A grupa

I. a) Definirajte racionalnu funkciju. Koja je razlika između prave i neprave racionalne funkcije?

b) Definirajte parcijalni razlomak.

c) Nadopunite tvrdnju:

Svaku _____ racionalnu funkciju moguće je na _____ način prikazati kao zbroj parcijalnih razlomaka.
[c) pravu, jedinstven]

II. Zadana je funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Kada kažemo da funkcija f ima limes L u točki $x_0 \in D$?

III. Definirajte neprekidnost funkcije $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in (a, b)$.

[ako postoji limes funkcije f u točki x_0 i on je jednak $f(x_0)$]

IV. Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna u točki $x_0 \in (a, b)$. Napišite jednadžbu tangente i normale na graf funkcije f u točki x_0 .

[jedn.tangente: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$; jedn.normala: $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$]

V. Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dva puta derivabilna funkcija na (a, b) . Koji su nužni, a koji dovoljni uvjeti da funkcija f u točki $x_0 \in (a, b)$ ima lokalni ekstrem?

[nužni: $f'(x_0) = 0$, dovoljni: $f''(x_0) \neq 0$ (min: $f''(x_0) > 0$; max: $f''(x_0) < 0$)]

Zadatak 1 Racionalnu funkciju $f(x) = \frac{3x^2 + 34x - 33}{x^3 + x^2 - 16x + 20}$ rastavite na parcijalne razlomke.
[$f(x) = 7/(x-2)^2 + 275/(49(x-2)) - 128/(49 \cdot (x+5))$]

Zadatak 2 Odredite limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(5x) + tg^2 x}{2x \sin x}.$$

[27/4]

Zadatak 3 Ispitajte neprekidnost funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadane na sljedeći način:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{shx}{5x}, & x \leq 0; \\ 2\frac{x-7}{\sin x}, & 0 < x \leq 2; \\ \frac{x^4 - 2x^2 + 3x - 14}{x^3 - 8}, & x > 2. \end{cases}$$

[Funkcija je neprekidna svuda osim u 2.]

Zadatak 4 Odredite jednadžbe tangente i normale na graf funkcije $f(x) = e^{\arctg(\frac{x}{3x-1})} + (\cos x)^x$ u točki $x_0 = 0$.

$$[f(0) = 2, f'(0) = -1, y_t = -x + 2, y_n = x + 2]$$

Zadatak 5 Odredite tok funkcije $f(x) = \frac{5}{x^2 - 9}$ i skicirajte njezin graf.

[nema nultočki, parna je, vertikalne asimptote: $x = 3, x = -3, f'(x) = \frac{-10x}{(-9+x^2)^2}$, maksimum: $M(0, -5/9), f''(x) = \frac{30(3+x^2)}{(x^2-9)^3}$, nema točaka infleksije, pada na $(0, 3) \cup (3, +\infty)$, raste na $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$, konkavna na $(-3, 3)$, konveksna na $\mathbb{R} \setminus [-3, 3]$]

Pismeni dio ispita iz Matematike I
B grupa

I. a) Definirajte racionalnu funkciju. Koja je razlika između prave i neprave racionalne funkcije?

b) Definirajte parcijalni razlomak.

c) Nadopunite tvrdnju:

Svaku _____ racionalnu funkciju moguće je na _____ način prikazati kao zbroj parcijalnih razlomaka.

. [c) pravu, jedinstven]

II. Zadana je funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Kada kažemo da funkcija f ima limes L u točki $x_0 \in D$?

III. Definirajte neprekidnost funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in D$.

. [ako postoji limes funkcije f u točki x_0 i on je jednak $f(x_0)$]

IV. Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna u točki $x_0 \in (a, b)$. Napišite jednadžbu tangente i normale na graf funkcije f u točki x_0 .

. [jedn.tangente: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$; jedn.normala: $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$]

V. Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dva puta derivabilna funkcija na (a, b) . Koji su nužni i dovoljni uvjeti da funkcija f bude konkavna, odnosno konveksna na (a, b) ?

. [konveksna: $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$, konkavna: $f''(x) < 0, \forall x \in (a, b)$]

Zadatak 1 Racionalnu funkciju $f(x) = \frac{3x^2 + 34x - 33}{x^3 + x^2 - 16x + 20}$ rastavite na parcijalne razlomke.
.
[$f(x) = 7/(x - 2)^2 + 275/(49(x - 2)) - 128/(49 \cdot (x + 5))$]

Zadatak 2 Odredite limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x) + tg^3 x}{x \sin x}.$$

. [4.5]

Zadatak 3 Ispitajte neprekidnost funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadane na sljedeći način:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{chx}{4+x^2}, & x \leq 0; \\ 3^{\frac{x-7}{tgx}}, & 0 < x \leq 1; \\ \frac{x^4-2x^2+3x-14}{x^3-8}, & x > 1. \end{cases}$$

. [Funkcija je neprekidna svuda osim u 0 i 1.]

Zadatak 4 Odredite jednadžbe tangente i normale na graf funkcije $f(x) = e^{\arctg(\frac{3x}{x+5})} + (\cos x)^x$ u točki $x_0 = 0$.

. [$f(0) = 2, f'(0) = 3/5, y_t = 3/5x + 2, y_n = -5/3x + 2$]

Zadatak 5 Odredite tok funkcije $f(x) = \frac{-2}{16 - x^2}$ i skicirajte njezin graf.

. [nema nultočki, parna je, vertikalne asimptote: $x = 4, x = -4, f'(x) = \frac{-4x}{(16-x^2)^2}$, maksimum: $M(0, -1/8), f''(x) = \frac{4(16+3x^2)}{(x^2-16)^3}$, nema točaka infleksije, pada na $(0, 4) \cup (4, +\infty)$, raste na $(-\infty, -4) \cup (-4, 0)$, konkavna na $(-4, 4)$, konveksna na $\mathbb{R} \setminus [-4, 4]$]

