

Pismeni dio ispita iz Matematike I

Teorija

I. Kompleksan broj z zapišite u trigonometrijskom obliku i napišite formulu za n -ti korijen iz kompleksnog broja z .

II. Što je prirodno područje definicije ili domena funkcije f ? Koje vrste asimptota funkcije poznajete i kako se one definiraju?

[D_f je skup svih realnih brojeva za koje funkcija postiže realne vrijednosti.]

III. Definirajte limes niza! Kada kažemo da je niz konvergentan, a kada da je divergentan?

[Pogledati definiciju N.6.]

IV. Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dva puta derivabilna funkcija na (a, b) . Koji su nužni, a koji dovoljni uvjeti da funkcija f u točki $x_0 \in (a, b)$ ima lokalni ekstrem?

[nužni: $f'(x_0) = 0$, dovoljni: $f''(x_0) \neq 0$ (min: $f''(x_0) > 0$); max: $f''(x_0) < 0$)]

V. Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dva puta derivabilna funkcija na (a, b) . Koji su nužni i dovoljni uvjeti da funkcija f bude konkavna, odnosno konveksna na (a, b) ?

[f konkavna: $f''(x) < 0, \forall x \in (a, b)$, f konveksna: $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$]

Zadaci

Zadatak 1 Riješite sljedeće jednačbe u skupu $\mathbb{C}$:

a) $z^2 = 16i - 12$;

b) $z^2 + (6i - 2)z - 10i - 5 = 0$.

[a) izračunati drugi korijen iz broja $16i - 12$: $z_1 = 2 + 4i$, $z_2 = -2 - 4i$, b) koristiti formulu za rješenja kvadratne jednačbe: $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -5i$]

Zadatak 2 Odredite domenu funkcije f zadane formulom

$$f(x) = \frac{(x-1)(3x-4)(x-2)}{x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 5} + \frac{3^{\frac{2}{x}}}{\ln(Tg(3x))},$$

gdje je $Tg : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ restrikcija funkcije tangens, te odredite sve asimptote funkcije f .

[$D_f = \langle 0, \frac{\pi}{6} \rangle \setminus \{ \frac{\pi}{12} \}$, $x = 0$ i $x = \frac{\pi}{12}$ su vertikalne asimptote]

Zadatak 3 Odredite limes niza

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{2n+3}{2n+4} \right)^{5n-3} + \log_3 \left(\frac{\sqrt[3]{n^2-1} + 7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+n+1}-n} \right) + \frac{(-1)^n}{n^5} \right].$$

$$[e^{-5/2} + \log_3 7 + 0 = e^{-5/2} + \log_3 7.]$$

Zadatak 4 Zadan je krug s centrom u točki S i radijusa r . Neka je jedan vrh trokuta točka S , a neka druga dva vrha leže na kružnici. Odredite unutrašnji kut trokuta α pri vrhu S tako da površina trokuta bude maksimalna (koristeći diferencijalni račun i činjenicu da je $\cos x = \sin x$ za $x = \frac{\pi}{4}$ rad).

$$[\alpha = \pi/2]$$

Zadatak 5 Odredite tok funkcije $f(x) = x^2 e^{-x}$ i skicirajte njezin graf.

. $[D_f = \mathbb{R}, \text{ nultočka: } N(0, 0), y = 0 \text{ horizontalna asimptota, ni parna ni neparna, maksimum: } M(2, 4/e^2), \text{ minimum: } m(0, 0), \text{ točke infleksije: } I_1(0.59, 0.19), I_2(3.41, 0.38)]$

Napomena: Na pismenom se ne smiju koristiti nikakve tablice niti memo, dok se kalkulator smije koristiti. Za prolaz je potrebno skupiti barem 60 bodova iz teorije i barem 40 bodova iz zadataka.

Rezultati će biti najkasnije u petak, 3. travnja 2009. godine do 14 sati na

http://www.mathos.hr/~scitowsk/M1/M1_Pismeni.htm

Derivacije	
$f(x)$	$f'(x)$
C	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log x$	$\frac{\log e}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

M.Miloloža Pandur, Lj. Primorac