Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Elektrotehnički fakultet
Kneza Trpimira 2B
31 000 Osijek

Osijek, 26. veljače 2008.

Seminarski rad iz predmeta "Matematičko programiranje"

Metoda regula falsi za rješavanje nelinearne jednadžbe $f(x) = 0$

Ivan Hečđi[1], Franjo Zemunić[2]

Sažetak. U ovom seminarskom radu analizira se metoda regula falsi ili metoda krivih položaja za rješavanje jednadžbe $f(x) = 0$, gdje je $f \in C^2[a, b]$ funkcija zadana na intervalu $[a, b]$. Dane su osnovne karakteristike i svojstva ove metode. Izrađen je odgovarajući *Mathematica* program pomoću kojega je metoda analizirana na nekoliko ilustrativnih primjera.

Ključne riječi: regula falsi, metoda krivih položaja, Newtonova metoda, metoda bisekcije, nultočke funkcije

Abstract. (False position method for solving a nonlinear equation $f(x) = 0$) In this seminar paper regula falsi or false position method for solving equation $f(x) = 0$ is analysed, where $f \in C^2[a, b]$ is a function defined on the interval $[a, b]$. Basic characteristics and properties of this method are given. A corresponding *Mathematica* program is made by means of which the method is analysed on several illustrative examples.

Keywords: regula falsi, false position method, Newton's method, bisection method, roots of a function

Preuzimanje seminara	Izlaganje	Ocjena	Datum	Potpis

[1]e-mail: ivan.hedi@etfos.hr
[2]e-mail: franjo.zemunic@etfos.hr

1 Uvod

Neka je f neprekidna funkcija definirana na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Tada svaki kompleksni broj ξ, koji je rješenje jednadžbe

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

nazivamo nultočkom funkcije f. Mi ćemo se ograničiti na istraživanje samo realnih nultočaka funkcije f (sjecišta grafa funkcije s osi x). Općenito se može dogoditi da neka funkcija ima više realnih nultočaka, od kojih neke mogu biti višestruke, ili da uopće nema realnih nultočaka.

Ako je funkcija f neprekidna na intervalu $I = [a, b]$ i ako na rubovima intervala prima suprotne vrijednosti (tj. ako je $f(a) \cdot f(b) < 0$), onda (vidi Jukić (2000), str. 120) postoji barem jedna točka $\xi \in I$ za koju vrijedi $f(\xi) = 0$. Ako je, osim toga, prva derivacija f' stalnog predznaka na intervalu I, onda je to i jedina nultočka funkcije f na intervalu I. Na taj se način posao oko traženja realnog rješenja jednadžbe (1) svodi na dva koraka:

1. Separirati interval I u kome funkcija ima nultočku,

2. Nekom iterativnom metodom odrediti aproksimaciju nultočke ξ s unaprijed zadanom točnošću.

Spomenuti interval $I = [a, b]$, u kome se nalazi barem jedna nultočka funkcije f, treba odrediti tako da na njegovim rubovima funkcija prima vrijednosti suprotnog predznaka, tj. da bude

$$f(a) \cdot f(b) < 0. \tag{2}$$

2 Regula Falsi

Regula falsi (*metoda krivih položaja*) je metoda, koju možemo smatrati jednom modifikacijom Newtonove metode, odnosno jednom varijantom metode sekanti. Pretpostavimo da je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $I = [a, b]$ i da je $f(a) \cdot f(b) < 0$. Označimo $x_0 := a$, $b_0 := b$ i povucimo pravac točkama $(x_0, f(x_0))$, $(b_0, f(b_0))$. On siječe os x u točki

$$c_1 = \frac{x_0 f(b_0) - b_0 f(x_0)}{f(b_0) - f(x_0)}, \qquad x_0 < c_1 < b_0. \tag{3}$$

Naime, jednadžba pravca kroz dvije točke $(x_0, f(x_0))$, $(b_0, f(b_0))$ jest

$$y - f(x_0) = \frac{f(b_0) - f(x_0)}{b_0 - x_0}(x - x_0). \tag{4}$$

Ako pravac siječe os x u točki c_1, tada će y koordinata te točke nužno biti nula pa vrijedi

$$f(x_0) + \frac{f(b_0) - f(x_0)}{b_0 - x_0}(c_1 - x_0) = 0. \tag{5}$$

Rješavanjem jednadžbe (5) dobije se izraz (3) (vidi Restrepo).
Ako je $f(c_1) = 0$, nultočka je pronađena. U protivnom postupimo na sljedeći način:

$$\text{ako je } f(c_1)f(x_0) > 0, \qquad \begin{matrix} x_1 = c_1 \\ b_1 = b_0 \end{matrix} \;;\quad \text{inače } \begin{matrix} x_1 = c_1 \\ b_1 = x_0 \end{matrix}\;.$$

Ponavljajući postupak dobivamo niz (x_n) koji linearnom brzinom konvergira prema jednom korijenu jednadžbe $f(x) = 0$ na intervalu $[a, b]$. Prema tome, ovu metodu možemo smatrati i jednom varijantom metode bisekcije.

Ako je x_n jedna aproksimacija nultočke ξ u intervalu $I = [a, b]$ i ako je f derivabilna funkcija, takva da je $|f'(x)| > 0$, $x \in I$, onda vrijedi ovakva ocjena apsolutne pogreške

$$|\xi - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}, \quad \text{gdje je } \ 0 < m_1 = \min_{x \in I} |f'(x)| \, . \tag{6}$$

Naime, prema teoremu o srednjoj vrijednosti, imamo

$$f(\xi) < f(x_n) = (\xi - x_n) f'(c), \quad c \in I.$$

Odavde je

$$|f(x_n)| = |\xi - x_n| \cdot |f'(c)| \geq m_1 \cdot |\xi - x_n| \, ,$$

odakle zbog stroge monotonosti funkcije f slijedi ocjena (6).

Budući da je rješenje ξ jednadžbe $f(x) = 0$ obično granična vrijednost jednog beskonačnog niza, postavlja se pitanje kada zaustaviti iterativni proces. Ako želimo da apsolutna pogreška aproksimacije x_n nultočke ξ ne bude veća od $\varepsilon > 0$, onda je prema (6) dovoljno ispuniti uvjet $\frac{|f(x_n)|}{m_1} < \varepsilon$.

Ovo može biti jedan kriterij za zaustavljanje iterativnog procesa (vidi Scitovski (2004), str. 69).

Primjedba 1 *Iako se na prvi pogled čini da je prirodan kriterij za zaustavljanje iterativnog procesa ispunjenje nejednakosti:* $|f(x_n)| < \varepsilon$, *za neki unaprijed zadani* $\varepsilon < 0$, *lako je iskonstruirati primjer u kome će za neki* n *biti* $|f(x_n)| < \varepsilon$, *a da pogreška aproksimacije* $|\xi - x_n|$ *ipak bude značajna, t.j. da* x_n *na brojevnom pravcu bude daleko od* ξ. *U tom će slučaju broj* m_1 *bit malen, odnosno* $\frac{1}{m_1}$ *velik, pa će biti teško ispuniti zahtjev* $\frac{|f(x_n)|}{m_1} < \varepsilon$, *koji prema (6) treba osigurati da pogreška aproksimacije* x_n *ne premaši* ε.

Ako se dogodi da je $m_1 = 0$, *metodom bisekcije treba suziti interval, tako da bude* $m_1 > 0$.

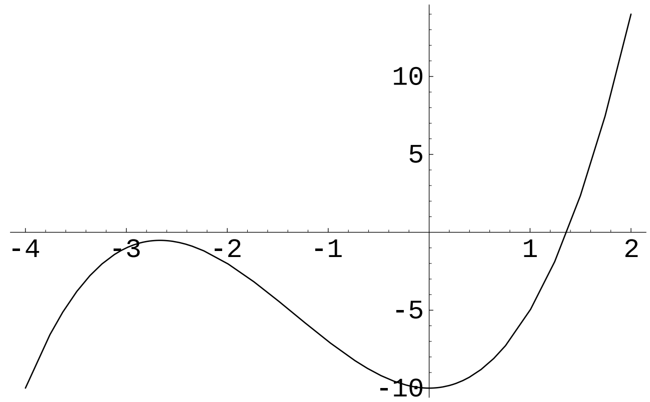
3 Numerički eksperimenti

Na nekoliko numeričkih i praktičnih primjera, a na bazi vlastitog programa izrađenog u programskom sustavu *Mathematica*, ilustrirat ćemo prednosti i nedostatke metode regula falsi.

Primjer 1 *S točnošću* $\epsilon = 0.000005$ *(5 signifikantnih decimala) treba odrediti realnu nultočku funkcije*

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

Ova funkcija ima tri nultočke, od kojih su dvije imaginarne i jedna realna. Realnu, koju možemo lokalizirati u intervalu $I = [-4, 2]$, ćemo i potražiti (*Slika 1*).



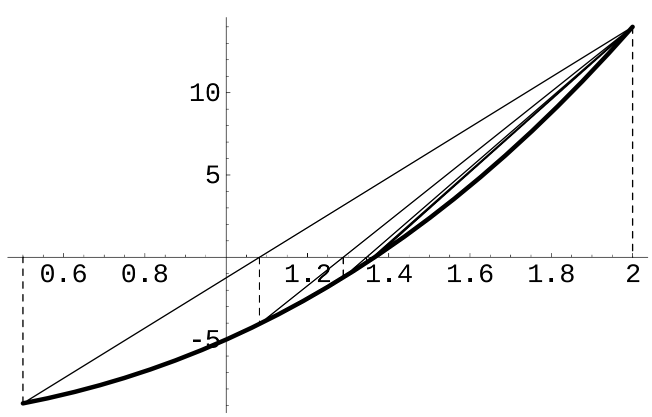
Slika 1: Lokalizacija nultočaka funkcije $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$

Navedeni interval najprije smanjimo izvršavajući dvije iteracije metode bisekcije. Nakon devet iteracija metodom regula falsi dobivamo $x^* = 1.36523$. Za ilustraciju postupka vidi *Slika 2*.

Tijek iterativnog procesa prikazan je u *Tablici 1* (a_0 je lijeva granica, a b_0 desna granica intervala).

n	x_n	a_0	b_0	m_1	ε
0	1.08197	0.5	2	4.75	0.852796
1	1.28798	1.08197	2	4.75	0.258476
2	1.34539	1.28798	2	12.1677	$2.66638 \cdot 10^{-2}$
3	1.36022	1.34539	2	15.2806	$5.40416 \cdot 10^{-3}$
4	1.36397	1.36022	2	16.1934	$1.28554 \cdot 10^{-3}$
5	1.36491	1.36397	2	16.4323	$3.18581 \cdot 10^{-4}$
6	1.36515	1.36491	2	16.493	$7.9772 \cdot 10^{-5}$
7	1.36521	1.36515	2	16.5083	$2.00268 \cdot 10^{-5}$
8	1.36522	1.36521	2	16.5121	$5.03105 \cdot 10^{-6}$
9	1.36523	1.36522	2	16.5131	$1.26409 \cdot 10^{-6}$

Tablica 1 *Tijek iterativnog procesa*

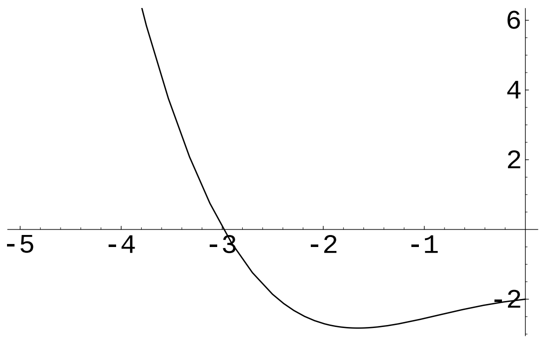


Slika 2: Određivanje nultočke funkcije $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$

Primjer 2 *S točnošću* $\epsilon = 0.000005$ *(5 signifikantnih decimala) treba odrediti realnu nultočku funkcije*

$$f(x) = e^x + 2^{-x} + 2\cos(x) - 6$$

Ova funkcija ima dvije realne nultočke. Jednu od njih možemo lokalizirati u intervalu $I = [-5, 0]$, te ćemo istu i potražiti (*Slika 3*).



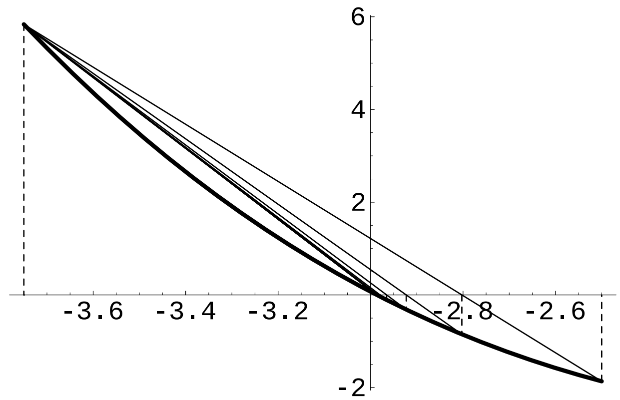
Slika 3: Lokalizacija nultočaka funkcije $f(x) = e^x + 2^{-x} + 2\cos(x) - 6$

Navedeni interval najprije smanjimo izvršavajući dvije iteracije metode bisekcije. Nakon deset iteracija metodom regula falsi dobivamo $x^* = -2.98651$. Za ilustraciju postupka vidi *Slika 4*.

Tijek iterativnog procesa prikazan je u *Tablici 2* (a_0 je lijeva granica, a b_0 desna granica intervala).

n	x_n	a_0	b_0	m_1	ε
0	-2.80249	-3.75	-2.5	2.64244	0.321302
1	-2.92281	-3.75	-2.80249	2.64244	0.119327
2	-2.96521	-3.75	-2.92281	4.10981	$2.62876 \cdot 10^{-2}$
3	-2.97947	-3.75	-2.96521	4.76893	$7.54595 \cdot 10^{-3}$
4	-2.98419	-3.75	-2.97947	5.01109	$2.36945 \cdot 10^{-3}$
5	-2.98575	-3.75	-2.98419	5.09335	$7.66762 \cdot 10^{-4}$
6	-2.98626	-3.75	-2.98575	5.12071	$2.50593 \cdot 10^{-4}$
7	-2.98643	-3.75	-2.98626	5.13004	$8.21614 \cdot 10^{-5}$
8	-2.98648	-3.75	-2.98643	5.13296	$2.69687 \cdot 10^{-5}$
9	-2.9865	-3.75	-2.98648	5.13412	$8.85495 \cdot 10^{-6}$
10	-2.98651	-3.75	-2.9865	5.13412	$2.90807 \cdot 10^{-6}$

Tablica 2 *Tijek iterativnog procesa*



Slika 4: Određivanje nultočke funkcije $f(x) = e^x + 2^{-x} + 2\cos(x) - 6$

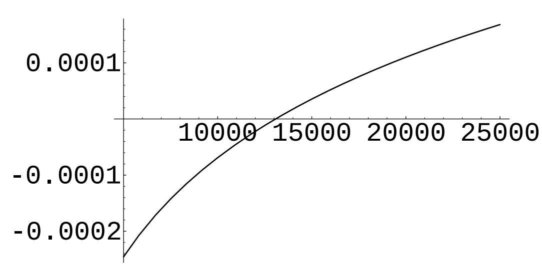
Primjer 3 *Potrebno je s točnošću* $\epsilon = 0.005$ *(2 signifikantne decimale) izračunati otpor 10K3A Betatherm termistora pri temperaturi od* $19°C$*.*

Termistori su elektroničke komponente za mjerenje temperature. Temelje se na svojstvu da se otpor termistorskog materijala mijenja u ovisnosti o temperaturi. Mjerenjem otpora termistorskog materijala možemo odrediti temperaturu.

Za 10K3A Betatherm termistor temperatura u stupnjevima Kelvina može se izračunati iz izraza

$$T = \frac{1}{1.129241 \cdot 10^{-3} + 2.231077 \cdot 10^{-4}\ln(R) + 8.775468 \cdot 10^{-8}\left[\ln(R)\right]^3}$$

Pretpostavit ćemo da se vrijednost otpora nalazi negdje između 5000 i 25000 Ω (*Slika* 5). Kao i u prethodnim slučajevima, navedeni interval najprije smanjimo izvršavajući dvije iteracije metode bisekcije. Nakon šest iteracija metodom regula falsi dobivamo $R^* = 13072.48\ \Omega$.

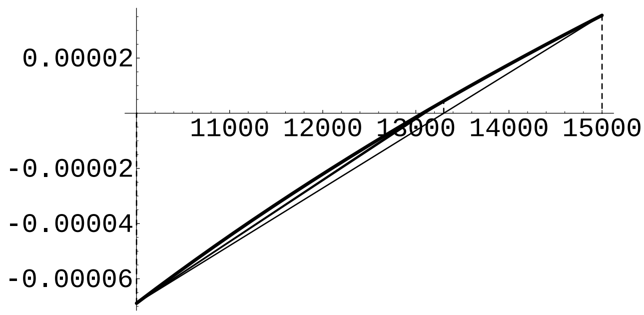


Slika 5: Lokalizacija nultočaka funkcije termistora

Tijek iterativnog procesa prikazan je u *Tablici 3* (a_0 je lijeva granica, a b_0 desna granica intervala).

n	x_n	a_0	b_0	m_1	ε
0	13299.53	10000	15000	$1.723 \cdot 10^{-8}$	257.64
1	13099.77	10000	13299.53	$1.723 \cdot 10^{-8}$	31.189
2	13075.77	10000	13099.77	$1.93875 \cdot 10^{-8}$	3.34188
3	13072.88	10000	13075.77	$1.96774 \cdot 10^{-8}$	0.396787
4	13072.53	10000	13072.88	$1.97128 \cdot 10^{-8}$	$4.77269 \cdot 10^{-2}$
5	13072.49	10000	13072.53	$1.97171 \cdot 10^{-8}$	$5.7498 \cdot 10^{-3}$
6	13072.48	10000	13072.49	$1.97176 \cdot 10^{-8}$	$6.92826 \cdot 10^{-4}$

Tablica 3 *Tijek iterativnog procesa*



Slika 6: Određivanje nultočke funkcije termistora

Dodatni zadaci za vježbu s rješenjima mogu se naći u Demidovič (1995), str. 368.

Niže je naveden program u programskom sustavu *Mathematica* kojim se uz primjenu metode regula falsi i metode bisekcije traži nultočka funkcije.

- **Modul za računanje minimuma**

```
Min1[f_, a_, b_, eps_] := Module[{m = f[a], xi = a, xm = a},
              (* f - funkcija *)
              (* a - lijeva granica intervala *)
              (* b - desna granica intervala *)
              (* eps - tocnost *)
              (* m - izracunati minimum *)
    While[xi < b,
      If[m > f[xi], m = f[xi]; xm = xi];
      xi = xi + eps];
    { m}]
```

- **Modul bisekcija**

```
Bisekcija[f_, a_, b_, it_, P_] := Module[{k = 0, xL, xD, xP, gr},
              (* f - funkcija *)
              (* a - lijeva granica intervala *)
              (* b - desna granica intervala *)
              (* it - broj iteracija *)
              (* P - ako je P==1 ispisuje se svaki korak, inace samo krajnji rezultat *)
     If[f[a]f[b] < 0,
          xL = a; xD = b;
          xP = (xL + xD)/2;
          gr = (xD - xL)/2;
          If[P == 1,
               Print["Bisekcija:  k=", k, "  xL=", xL // N, "  xD=", xD // N,
               "  xP=", xP // N, "  gr=", gr // N] ];
          While[k < it,
               k = k + 1;
               If[f[xL]f[xP] < 0, xD = xP, xL = xP];
               xP = (xL + xD)/2;
               gr = (xD - xL)/2;
               If[P == 1,
                    Print["Bisekcija:  k=", k, "  xL=", xL // N, "  xD=", xD // N,
                    "  xP=", xP // N, "  gr=", gr // N]]],
          Print["Interval nije dobro odredjen"]];
     {k // N, xL // N, xP // N, xD // N, gr // N} ];
```

- **Modul regula falsi**

```
RF[f_, a_, b_, eps_, P_] := Module[{k = 0, ar = a, br = b, cr, gr, h, B},
              (* f - funkcija *)
              (* a - lijeva granica intervala *)
              (* b - desna granica intervala *)
              (* eps - tocnost *)
              (* P - ako je P==1 ispisuje se svaki korak, inace samo krajnji rezultat *)
     h[x_] = Abs[f'[x]];
     cr = (ar f[br] - br f[ar])/(f[br] - f[ar]);
     m = Min1[h, ar, br, 0.0001];
     gr = (Abs[f[cr]]/First[m]);
     data = Table[Graphics[{Dashing[{}], Line[{{ar, 0}, {ar, 0}}]}], {n, 0, 0}];
     data = Append[data, Graphics[{Dashing[{0.01, 0.01}], Line[{{ar, f[ar]}, {ar, 0}}]}]];
     data = Append[data, Graphics[{Dashing[{0.01, 0.01}], Line[{{br, f[br]}, {br, 0}}]}]];
     If[P == 1,
          Print["Regula falsi :  k = ",k,"  ar = ",ar//N,"   br = ",br//N,"  cr = ", cr//N,
          "  m1 = ",First[m]//N,"  gr = ",gr//N]];
     While[gr > eps,
          k = k + 1;
          m = Min1[h, ar, br, 0.0001];
          If[First[m] < 0.001,
               B = Bisekcija[f, ar, br, 1, P];
               ar = B[[2]]; br = B[[4]]; gr = B[[5]];
               cr = (ar f[br] - br f[ar])/(f[br] - f[ar]);
               k = k - 1;
               data = Append[data, Graphics[{Dashing[{0.01, 0.01}], Line[{{ar, f[ar]}, {ar, 0}}]}]];
               data = Append[data, Graphics[{Dashing[{0.01, 0.01}], Line[{{br, f[br]}, {br, 0}}]}]];
               If[P == 1,
                    Print["Regula falsi :  k = ",k,"  ar = ",ar//N,"   br = ",br//N,"  cr = ", cr//N,
                    "  m1 = ",First[m]//N,"  gr = ",gr//N]],
               data = Append[data, Graphics[{Dashing[{}], Line[{{ar, f[ar]}, {br, f[br]}}]}]];
               data = Append[data, Graphics[{Dashing[{0.01, 0.01}], Line[{{cr, 0}, {cr, f[cr]}}]}]];
```

```
                If[f[br]f[cr] > 0,
                     br = cr, ar = cr];
                cr = (ar f[br] - br f[ar])/(f[br] - f[ar]);
                gr = (Abs[f[cr]]/First[m]);
                If[P == 1,
                     Print["Regula falsi :  k = ",k,"  ar = ",ar//N,"   br = ",br//N,"  cr = ", cr//N,
                     "  m1 = ",First[m]//N,"  gr = ",gr//N]]]];
      {k // N, ar // N, br // N, cr // N, data} ];
```

te koji uz pozive

```
B = Bisekcija[f, a, b, 2, 0];
Print["Aproksimacija nakon ", B[[1]], " koraka metode bisekcije:"]
Print["xL=", B[[2]] // N, "   xD=", B[[4]] // N, "  xP=", B[[3]] // N]

a1 = B[[2]]; b1 = B[[4]];
R = RF[f, a1, b1, .000005, 1];
slika = Plot[f[x], {x, a1, b1}, PlotStyle -> {Thickness[.007]}, ImageSize -> 300,
DisplayFunction -> Identity];
Show[{slika, R[[5]]}, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
Print["Aproksimacija nakon ", R[[1]], " koraka metode RF:"];
Print["ar=", R[[2]] // N, "   br=", R[[3]] // N, "  cr=", R[[4]] // N]
```

daje vrijednosti dobivenih aproksimacija nultočaka.

Iz navedenog programa vidimo da se unutar modula regula falsi po potrebi poziva modul bisekcije (vidi Primjedba 1).

Detaljan opis i način upotrebe naredbi korištenih u *Mathematica* programu nalazi se u Wolfram (2003).

Literatura

[1] B.P. Demidovič, *Zadaci i riješeni primjeri iz matematičke analize za tehničke fakultete*, Danjar, Zagreb, 1995.

[2] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2000.

[3] J. Restrepo, http://www.physics.arizona.edu/~restrepo/475A/Notes/sourcea/node17.html, 21.01.2008.

[4] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2004.

[5] S. Wolfram, *The Mathematica Book*, 5^{th} Ed., Wolfram Media, Champaign, 2003. http://documents.wolfram.com/mathematica/