

**3. kontrolna zadaća iz
Matematičke analize 3**

Zadatak 1 [xx bodova] Za funkciju $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ i težinsku funkciju $\omega(x) = 1$ izračunajte $\|f\|_1$.

$$[\|f\|_1 = 2]$$

Zadatak 2 [xx bodova] Za funkciju $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = x$ i težinsku funkciju $\omega(x) = 1$ izračunajte $\|f\|_2$.

$$[\|f\|_2 = 1/\sqrt{2}]$$

Zadatak 3 [xx bodova] Za funkcije $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = x^3$ i težinsku funkciju $\omega(x) = 1$ izračunajte skalarni produkt (f, g) i norme $\|f\|$, $\|g\|$.

$$[]$$

Zadatak 4 [xx bodova] Za funkciju $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0] \\ 2, & x \in (0, \pi] \end{cases}$ izračunajte Fourierov polinom prvog stupnja F_1 .

$$[F_1(x) = 1 + \frac{4}{\pi} \sin x \text{ i } F_2 \text{ je isti !}]$$

Zadatak 5 [xx bodova] Trapeznim pravilom izračunajte približnu vrijednost integrala $\int_0^1 x^2 dx$ tako da interval $[0, 1]$ podijelite na 4 jednaka dijela.

$$[I^* = \frac{11}{32} = 0.34375]$$

Zadatak 6 [xx bodova] Na koliko dijelova treba podijeliti interval $[0, 1]$ tako da trapeznim (Simpsonovim) pravilom dobijemo približnu vrijednost integrala $\int_0^1 \sin^2 x dx$ s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$?

$$[M_2 = 2; \quad n = 130 \text{ } (M_4 = 8; \quad n = 9)]$$

Zadatak 7 [xx bodova] Ako je poznata QR-dekompozicija matrice $\mathbf{J}$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 4/5 \\ 0 & 3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i vektor $\mathbf{y} = (1, 0, 1)^T$ za koji $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ se postiže minimum funkcije $F(\mathbf{a}) = \|\mathbf{J}\mathbf{a} - \mathbf{y}\|^2$?

$$[(\frac{3}{5}, -\frac{11}{5})^T]$$

Napomena Zadatak x “rezervni je zadatak” i možete ga riješiti umjesto nekog od prva 4 zadataka ili njegovim rješavanjem postići maksimalno xyz bodova (čime ćete moći kompenzirati eventualne propuste u prethodnim zadaćama).

**3. kontrolna zadaća iz
Matematičke analize 3**

Zadatak 1 [xx bodova] Za funkciju $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ i težinsku funkciju $\omega(x) = 1$ izračunajte $\|f\|_\infty$.

.
$$[\|f\|_\infty = 1]$$

Zadatak 2 [xx bodova] Za funkciju $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = x$ i težinsku funkciju $\omega(x) = 1$ izračunajte $\|f\|_1$.

.
$$[\|f\|_1 = 2]$$

Zadatak 3 [xx bodova] Koliki mora biti parametar $a \in \mathbb{R}$ da bi funkcije $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 1$, $g(x) = x^2$ bile ortogonalne (težinska funkcija zadana je s $\omega(x) = 1$)?

.
$$[a = -4/3]$$

Zadatak 4 [xx bodova] Newtonova metoda za traženje lokalnog minimuma dva puta neprekidno derivabilne funkcije $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zadana je iterativnim postupkom

$$\mathbf{a}^{k+1} = \mathbf{a}^k - (\mathbf{H}_F(\mathbf{a}^k))^{-1} \text{grad } F(\mathbf{a}^k), \quad \mathbf{a}^0 \in \mathbb{R}^n,$$

gdje je $\mathbf{H}_F(\mathbf{a}^k)$ Hessijan funkcije F u točki $\mathbf{a}^k$. Kako se ovaj postupak može modificirati u cilju izbjegavanja računanja inverzne matrice u svakom koraku ?

.
$$[a = -4/3]$$

Zadatak 5 [xx bodova] Zadani su podaci nekog mjerenja: 1, 1.1, 0.9, 1.2, 0.8. Odredite najbolju aproksimaciju u L_1 i L_2 normi.

.
$$[a_1^* = 1, \quad a_2^* = 1]$$

Zadatak 6 [xx bodova] Koliki mora biti parametar $\lambda \in \mathbb{R}$ u matrici $\mathbf{J}$ zadanoj s $\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & \lambda \end{bmatrix}$ da bi matrica $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ bila pozitivno definitna ?

.
$$[\lambda \neq 3]$$

Napomena Zadatak x “rezervni je zadatak” i možete ga riješiti umjesto nekog od prva 4 zadataka ili njegovim rješavanjem postići maksimalno xyz bodova (čime ćete moći kompenzirati eventualne propuste u prethodnim zadaćama).